ARMAND BOREL

Cohomologie de certains groupes discrets et laplacien p-adique

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n^{o} 437, p. 12-35

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__12_0>

Séminaire BOURBAKI 437-01
26e année, 1973/74, n° 437 Novembre 1973

COHOMOLOGIE DE CERTAINS GROUPES DISCRETS ET LAPLACIEN P-ADIQUE

[d'après H. GARLAND]

par Armand BOREL

Les résultats principaux de [7] concernent la nullité, en certaines dimensions, du r-ième groupe de cohomologie $H^r(\Gamma ; M)$ d'un sous-groupe discret Γ d'un groupe simple p-adique $G(K)$, (K corps p-adique), qui est co-compact (i.e. $G(K)/\Gamma$ compact), pour la cohomologie à coefficients dans un Γ-module unitaire de dimension finie M , (par exemple la cohomologie réelle). Cette cohomologie s'identifie à celle d'un complexe cellulaire fini, le quotient par Γ de l'immeuble de Bruhat-Tits T [5] du revêtement simplement connexe $\widetilde{G}$ de G , ou encore à un espace de formes harmoniques (au sens combinatoire), et les démonstrations se divisent en gros en deux parties

(1) Réduction à un problème local. On montre que si certaines valeurs propres du laplacien combinatoire sur le "link" d'un simplexe quelconque de dimension donnée $< r$ de T sont suffisamment grandes, alors $H^r(\Gamma ; M) = 0$, $(1 \leq r < \dim T)$.

(2) Estimation de la plus petite des valeurs propres entrant en ligne de compte.

La première partie peut en fait s'exposer pour un complexe simplicial fini presque quelconque, ce qui est fait au § 1. On en tire une première forme des théorèmes de nullité (1.5, 1.6), qui est généralisée au § 2 et appliquée à Γ au § 3. La deuxième partie est un problème sur des immeubles de systèmes de Tits finis, complètement résolu en dimension un, mais loin de l'être en général. Les §§ 4, 5 exposent les résultats obtenus par Garland sur cette question, qui permettent de montrer (6.1) l'existence d'un entier N , ne dépendant que du K-rang ℓ de G , tel que $H^r(\Gamma ; M) = 0$ pour $0 < r < \ell$ si le corps résiduel de K a au moins N éléments (hypothèse que l'on espère bien être superflue, suivant une conjecture de Serre qui a été le point de départ de [7]).

En revanche, le groupe $H^\ell(\Gamma ; \mathbb{R})$ n'est pas nul en général (7.3). On verra (7.2) que si G est simplement connexe, sa dimension est égale à la multiplicité de la représentation spéciale de $G(K)$ dans $L^2(\Gamma \backslash G(K))$.

Ces résultats et, dans une certaine mesure, leurs démonstrations, présentent une analogie assez frappante avec ceux de Y. Matsushima [12] concernant la cohomologie réelle de sous-groupes discrets co-compacts d'un groupe de Lie réel simple non-compact H , (connexe, à centre fini pour simplifier). Matsushima associe à H un entier $m(H) \geq 0$ tel que $H^*(\Gamma ; \mathbb{R})$ s'identifie à la cohomologie relative de l'algèbre de Lie de H modulo celle d'un sous-groupe compact maximal L de H au moins jusqu'en dimension $m(H)$, quel que soit le sous-groupe discret co-compact Γ de H . La constante $m(H)$ se détermine à partir de la plus petite valeur propre d'un opérateur auto-adjoint associé à la courbure riemannienne de l'espace riemannien symétrique H/L . Les laplaciens locaux intervenant dans (1) ci-dessus sur l'immeuble T jouent donc un rôle analogue à celui de la courbure de H/L , ce qui a conduit Garland à les baptiser "courbure p-adique".

Le théorème de Matsushima peut aussi s'exprimer en disant que sur H/L , toute forme harmonique Γ-invariante de degré $\leq m(H)$ est H-invariante. Il en est en somme de même pour celui de Garland, car on voit facilement que sur T , toute forme harmonique $\widetilde{G}(K)$-invariante de dimension $\neq 0$ est nulle (4.2 (1)).

Les théorèmes de nullité valent aussi pour Γ non nécessairement co-compact, à condition de remplacer $H^r(\Gamma ; M)$ par un espace de formes harmoniques de carré intégrable convenable (cf. 2.2, 3.5, 6.1). Lorsqu'ils sont valables, ils montrent en particulier que toute r-forme harmonique de carré intégrable sur T est nulle si $r \neq 0, \ell$, ce qui devrait aussi être vrai sans hypothèse sur le corps résiduel.

§ 1. Formes harmoniques sur un complexe simplicial fini

1.1. Soit X un complexe simplicial fini, satisfaisant à la condition :

C 1. Tout simplexe de X est face d'un simplexe de dimension $\ell = \dim X$.

On note $X(r)$ l'ensemble des simplexes de dimension r de X et, pour $s \in X(r)$, on note $c_X(s)$ ou $c(s)$ le nombre de simplexes de dimension ℓ contenant s. Il est élémentaire que l'on a

(1) $$(\ell - r).c(s) = \sum_{t \in X(r+1),\, t \supset s} c(t) .$$

L'espace $C^r(X ; \mathbb{R})$ ou C^r des cochaines réelles de degré r de X sera muni du produit scalaire

(2) $$(f,g) = \sum_{s \in X(r)} c(s).f(s).g(s) , \qquad (f , g \in C^r) .$$

Soient d l'opérateur cobord sur X, $\{[t:s]\}$ le système de coefficients d'incidence le définissant, et ∂ l'adjoint de d par rapport au produit scalaire (2). On a donc, pour $f \in C^r$, $s \in X(r-1)$, $u \in X(r+1)$

(3) $$df(u) = \sum_{t \in X(r),\, t \subset u} [u:t].f(t) ,$$

(4) $$\partial f(s) = \sum_{t \in X(r),\, t \supset s} [t:s].(c(t)/c(s)).f(t) .$$

Soient $\Delta = d.\partial + \partial.d$ le laplacien de X et $\Delta^+ = \partial.d$. Un élément $f \in C^r$ est harmonique si $\Delta f = 0$, ce qui équivaut à $df = \partial f = 0$. Soit $\mathbb{H}^r = \mathbb{H}^r(X ; \mathbb{R})$ l'espace des formes harmoniques de degré r. On a la décomposition orthogonale "de Hodge" :

(5) $$C^r = \mathbb{H}^r \oplus dC^{r-1} \oplus \partial C^{r+1} ,$$

où

(6) $$\mathbb{H}^r \oplus dC^{r-1} = C^r \cap (\ker d) , \qquad \mathbb{H}^r + \partial C^{r+1} = C^r \cap (\ker \partial) ,$$

donc

(7) $$\mathbb{H}^r \cong H^r(X ; \mathbb{R}) .$$

La décomposition (5) est stable par Δ , qui est auto-adjoint ≥ 0 , et > 0 sur $dC^{r-1} + \partial C^{r+1}$. On note $k^r(X)$ <u>la valeur propre minimale</u> de Δ sur ∂C^{r+1} $(0 \leq r < \ell)$. Notons que sur ∂C^{r+1} , on a $\Delta = \Delta^+$ et que $\ker \Delta^+ = \mathbb{H}^r + dC^{r-1}$. Par suite, $k^r(X)$ est aussi la plus petite valeur propre strictement positive de Δ^+ sur C^r . Evidemment, $k^r(X)$ est invariant par changement d'orientation des simplexes de X , i.e. par changement du système des coefficients d'incidence. Par convention, $k^r(X) = +\infty$ si $\partial C^{r+1} = \{0\}$.

1.2. Si s est un simplexe de X , on note $\mathrm{St}\, s$ <u>l'étoile</u> (fermée) de s , sous-complexe formé des simplexes de X contenant s , et $\mathrm{Lk}\, s$ le "<u>link</u>" de s , réunion des faces de $\mathrm{St}\, s$ ne rencontrant pas s . Ce dernier est un sous-complexe de dimension $\ell - \dim s - 1$, satisfaisant aussi à C 1.

Si P est un sommet de X , soit ρ_P la transformation linéaire de C définie par

$$(\rho_P f)(s) = f(s) \text{ si } P \in s , \quad (\rho_P f)(s) = 0 \text{ sinon}, \qquad (s \in X(r)) .$$

Il est immédiat que

(1) $$\rho_P^2 = \rho_P \ , \quad (\rho_P f, g) = (f, \rho_P g) \ , \quad \sum_{P \in X(0)} \rho_P = (r+1).\mathrm{Id}. \text{ sur } C^r .$$

On pose

$$d_P = d \circ \rho_P \ , \quad \partial_P = \rho_P \circ \partial \ , \quad \Delta_P = d_P . \partial_P + \partial_P . d_P \ , \quad \Delta_P^+ = \partial_P . d_P .$$

1.3. LEMME.- <u>Pour tout</u> $f \in C^r$ $(1 \leq r \leq \dim X)$, <u>on a</u>

$$r.(\Delta^+ f, f) = \sum_{P \in X(0)} (\Delta_P^+ f, f) - (\ell - r).(f,f) .$$

Soient $t \in X(r+1)$ et P un sommet de t . Par définition

$$d_P f(t) = \sum_{P \in s \subset t} [t:s].f(s) \quad , \quad df(t) = d_P f(t) + [t:s_o].f(s_o) \ ,$$

où s_o est la face de t de dimension r ne contenant pas P . On en tire

$$r.df(t)^2 = \sum_{P \in t} d_P f(t)^2 - \sum_{s \subset t} f(s)^2 \ .$$

Comme $(\Delta^+ f,f) = (df,df) = \sum_t c(t)\ df(t)^2$, cela entraîne

$$r.(\Delta^+ f,f) = \sum_{t\,,\,P\,,\,P \in t} c(t).d_P f(t)^2 - \sum_{t\,,\,s\,,\,s \subset t} c(t).f(s)^2 \ ,$$

$(t \in X(r+1)\ ,\ s \in X(r)\ ,\ P \in X(0))$. La première somme est égale à

$$\sum_{P \in X(0)} \ \sum_{t \in X(r+1)\,,\,P \in t} c(t).d_P f(t)^2 = \sum_{P \in X(0)} (\Delta_P^+ f,f) \ ,$$

et 1.1(1) montre que la deuxième est égale à $(\ell - r).(f,f)$.

1.4 LEMME.- Soient $r \geq 1$, $f \in C^r \cap \ker \partial$, $P \in X(0)$. On suppose que $\widetilde{H}^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P\ ;\ \mathbb{R}) = 0$. Alors $(\Delta_P^+ f,f) \geq k^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P).(\rho_P f,f)$.

[$\widetilde{H}^i$ est le i-ème groupe de cohomologie réduit : $\widetilde{H}^i = H^i$ si $i \geq 1$, et $\widetilde{H}^o = \mathrm{coker}(H^o(pt) \to H^o)$.]

Pour $m \geq 1$ et $h \in C^m(X)$, désignons par h_o la cochaine de degré $m-1$ sur Lk P définie par

$$h_o(s) = [P * s\ ;\ s]\ h(P * s) \qquad (s \in (\mathrm{Lk}\ P)(m-1)\ ;\ P * s = \text{joint de } P \text{ et } s) .$$

Si d_o est l'opérateur cobord sur Lk P , défini à l'aide des coefficients

$$[t:s]_o = [P * t : P * s].[P * s : s].[P * t : t]$$

alors $d_o h_o = (d_P h)_o$. Evidemment, $h_o = (\rho_P h)_o$. D'autre part, $c_X(P * s) = c_{\mathrm{Lk}\ P}(s)$ pour $s \in (\mathrm{Lk}\ P)(m-1)$, donc, vu 1.2(1)

(1) $$(\rho_P h,h) = (\rho_P h,\rho_P h) = (h_o,h_o) \ ,$$

le dernier produit scalaire étant aussi défini par 1.1(2), mais sur Lk P .

Vu 1.1(4), on a

(2) $$c_X(P).\ \partial h(P) = \sum_{s \in (\mathrm{Lk}\ P)(0)} c_{\mathrm{Lk}\ P}(s) h_o(s) = (h_o,1)\ ,\ (h \in C^1(X)) \ .$$

Soient ∂_o l'adjoint de d_o , $\Delta_o = \partial_o . d_o + d_o . \partial_o$ et $\Delta_o^+ = \partial_o . d_o$. Vu (1) et $(d_P h)_o = d_o h_o$, on a, pour $h \in C^m$,

(3) $\qquad (\partial_P h)_o = (\partial h)_o = \partial_o h_o \quad , \quad (\Delta_P h)_o = \Delta_o h_o \quad , \qquad (m \geq 2)$,

(4) $\qquad (\Delta_P^+ h)_o = \Delta_o^+ . h_o \quad , \qquad (\Delta_P^+ h , h) = (\Delta_o^+ h_o , h_o) \quad , \qquad (m \geq 1)$.

Plaçons-nous maintenant sous les hypothèses du lemme. Montrons tout d'abord que $f_o \in \partial_o C^r(\mathrm{Lk}\ P)$. Si $r \geq 2$, alors $\partial_o f_o = 0$ vu (3) ; mais $\ker \partial_o \cap C^{r-1} = \partial_o C^r$ puisque $H^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P ; \mathbb{R}) = 0$, (cf. 1.1(5), (6), (7)). Si $r = 1$, (2) montre que f_o est orthogonale aux cochaines constantes, qui forment $\mathbb{H}^o$ puisque $\widetilde{H}^o(\mathrm{Lk}\ P) = 0$, d'où $f_o \in \partial_o C^1$ aussi dans ce cas. On a alors, par définition de $k^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P)$:

(5) $\qquad (\Delta_o h_o , h_o) = (\Delta_o^+ h_o , h_o) \geq k^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P) . (h_o , h_o)$,

et le lemme résulte de (1), (4) et (5).

1.5 THÉORÈME.- <u>Soient</u> $r \geq 1$ <u>et</u> $m^{r-1}(X) = \min_{P \in X(0)} k^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P)$. <u>On suppose que</u> $\widetilde{H}^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P ; \mathbb{R}) = 0$ <u>pour tout sommet</u> P <u>de</u> X . <u>Alors on a</u>

(1) $\qquad r . (\Delta^+ f , f) \geq ((r+1) . m^{r-1}(X) - (\ell - r)) . (f , f) \quad , \qquad (f \in C^r \cap \ker \partial)$.

<u>En particulier</u>, $r . k^r(X) \geq (r+1) . m^{r-1}(X) - (\ell - r)$ <u>et si</u> $m^{r-1}(X) > (\ell - r)/(r+1)$, <u>alors</u> $\mathbb{H}^r = 0$.

1.4 entraîne que $(\Delta_P^+ f , f) \geq m^{r-1}(X) . (\rho_P f , f)$ pour tout $P \in X(0)$. (1) résulte alors de 1.3, compte tenu de 1.2(1).

1.6. Le théorème précédent est, dans le présent contexte, la "fundamental estimate" de [7 : § 5]. Si $r \geq 2$ et si les links des sommets de $\mathrm{Lk}\ P$, (autrement dit les links des 1-simplexes de X contenant P) sont acycliques en dimension $r - 2$, on peut appliquer le théorème à $\mathrm{Lk}\ P$ pour estimer $k^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P)$ à l'aide de $m^{r-2}(\mathrm{Lk}\ P)$, donc, en définitive, pour estimer $k^r(X)$ à l'aide des $k^{r-2}(\mathrm{Lk}\ s)$,

$(s \in X(1))$ et ainsi de suite. Par une récurrence sans difficulté, laissée au lecteur, on démontre ainsi :

THÉORÈME.- Soient j , $r \in \mathbb{N}$, $(1 \le j \le r < \ell)$. On suppose $\widetilde{H}^{r-m}(\mathrm{Lk}\ s) = 0$ pour tout $s \in X(m-1)$ et $1 \le m \le j$. Soit $m^{r,j}(X) = \min_{s \in X(j-1)} k^{r-j}(\mathrm{Lk}\ s)$. Alors

(1) $\quad (r-j+1).(\Delta^{+}f,f) \ge ((r+1)\ m^{r,j}(X) - j.(\ell - r)).(f,f)$, $(f \in C^{r} \cap \ker \partial)$.

En particulier $(r-j+1).k^{r}(X) \ge (r+1).m^{r,j}(X) - j(\ell - r)$ et si $m^{r,j}(X) > j(\ell-r)/(r+1)$, alors $H^{r} = 0$. De plus $m^{r,j}(X) > j(\ell-r)/(r+1)$ entraîne $m^{r,i} > i(\ell-r)/(r+1)$ pour $1 \le i \le j$.

La plus forte de ces conditions correspond donc à $j = r$; elle porte sur des sous-complexes de dimension $\ell - r$ et s'écrit

(2) $$\min_{s \in X(r-1)} k^{0}(\mathrm{Lk}\ s) > r(\ell - r)/(r+1) .$$

On peut aussi obtenir 1.6 directement, sans récurrence, par une généralisation convenable de 1.3, 1.4, où l'on remplace P par un simplexe de dimension $j - 1$.

§ 2. Généralisations

2.1. La première consiste à considérer la cohomologie de X à coefficients dans un système local $\widetilde{M}$ associé à un $\pi_1(X)$-module unitaire M de dimension finie. Le système local est alors formé d'espaces vectoriels M_s munis canoniquement d'un produit scalaire positif, et l'on définit sur l'espace $C^{r}(X\,;\widetilde{M})$ des cochaines à coefficients dans $\widetilde{M}$ un produit scalaire par 1.1(2), étant entendu que $f(s).g(s)$ désigne maintenant le produit scalaire dans M_s . Le système $\widetilde{M}$ est trivial sur l'étoile d'un simplexe et en particulier $C^{m}(\mathrm{Lk}\ s\,;\widetilde{M}) = C^{m}(\mathrm{Lk}\ s\,;\mathbb{R}) \otimes M$. Il s'ensuit que 1.3, 1.4 subsistent, avec la même constante $k^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P)$, (indépendante de M), et il en est de même pour 1.5, 1.6.

2.2. Dans une autre direction, ne supposons plus X fini, mais de dimension finie, satisfaisant à C 1 du § 1 et à :

C 2. Il existe une constante C telle que $\mathrm{Card}\, \mathrm{St}\, s \leq C$ pour tout simplexe s, (i.e. X est "uniformément localement fini".) On munit $C^r(X;\widetilde{M})$ du produit scalaire 1.1(2) et on note $L^r(X;\widetilde{M})$ ou L^r l'espace des cochaines de degré r qui sont "de carré intégrable", c'est-à-dire telles que $(f,f) < \infty$. En utilisant C 2, on voit facilement que d est un opérateur borné de L^r à L^{r+1} $(r = 0,1,\ldots)$. Par suite, ∂, Δ, Δ^+ sont aussi bornés, et un élément $f \in L^r$ est harmonique si et seulement si $df = \partial f = 0$. On note $\mathbb{H}^r$ l'espace des formes harmoniques de degré r de carré intégrable. On a une décomposition orthogonale

$$L^r = \mathbb{H}^r \oplus \overline{dL^{r-1}} \oplus \overline{\partial L^{r+1}} \qquad (r \in \mathbb{N}), \tag{1}$$

où $\overline{}$ dénote l'adhérence dans L^r, mais il n'y a bien entendu plus de lien direct entre $H^r(X;\widetilde{M})$ et $\mathbb{H}^r$. On définit $k^r(X)$ comme $\inf(\Delta^+ f,f)$ sur la boule unité de $\overline{\partial L^{r+1}}$. Alors les résultats du § 1 restent valables, de même que leurs démonstrations, à quelques changements d'écriture près. En particulier, si $m^{r-1} > (\ell - r)/(r+1)$, alors il existe $c > 0$ tel que $(df,df) \geq c.(f,f)$ pour tout $f \in \partial L^{r+1}$, ce qui entraîne que dL^r est fermé dans L^{r+1}.

§ 3. Sous-groupes discrets de groupes simples p-adiques I

3.1. K désigne un corps valué complet non discret, localement compact, non archimédien (autrement dit, une extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré fini ou un corps de séries formelles à une variable sur un corps fini), v sa valuation et k_v le corps résiduel correspondant ; k_v est donc fini.

G est un groupe affine connexe, défini sur K, presque simple sur K, et

$\widetilde{G}$ son revêtement universel. Le groupe $G(K)$ des points de G à valeurs dans K est muni d'une structure de groupe topologique localement compact totalement discontinu (et même de groupe de Lie sur K). On note ℓ le K-rang $rg_K(G)$, (dimension des sous-tores algébriques déployés sur K maximaux de G , cf. [1 : § 5]) ou de $\widetilde{G}$, ce qui revient au même [2].

3.2. On suppose $\ell \geq 1$, ce qui équivaut à $G(K)$ non compact, et on note $T(\widetilde{G})$ ou T l'immeuble de Bruhat-Tits de $\widetilde{G}(K)$ [5]. Il a, entre autres, les propriétés suivantes :

(i) T est un complexe simplicial localement fini, de dimension ℓ , satisfaisant à C 1 de 1.1.

(ii) T est contractile.

(iii) $\widetilde{G}(K)$ opère proprement sur T . Quels que soient $g \in \widetilde{G}(K)$ et le simplexe s de T , g induit l'identité sur $s \cap g.s$. Les groupes d'isotropie des sommets de T sont les sous-groupes compacts maximaux de $\widetilde{G}(K)$; ceux des simplexes de T sont les sous-groupes parahoriques de $\widetilde{G}(K)$; ils forment un système de Tits de rang $\ell + 1$, à groupe de Weyl de type affine, et T est l'immeuble de Tits associé à ce système.

(iv) $\widetilde{G}(K)$ est transitif sur $T(\ell)$.

(v) Si $s \in T(r)$, $(0 \leq r < \ell)$, alors Lk s est l'immeuble d'un système de Tits fini, de rang $\ell - r$.

Fixons un simplexe C_o de dimension ℓ de T (une "chambre"). Vu (iv), l'étoile d'un simplexe de T est transformée, par un automorphisme de T , de l'étoile d'une face de C_o . En particulier, T est uniformément localement fini, et il n'y a qu'un nombre fini de types d'étoiles. On pose

(1) $m^{r-1}(T) = \min_{P \in C_o(0)} k^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P) = \min_{P \in T(0)} k^{r-1}(\mathrm{Lk}\ P)$

(2) $m^{r,j}(T) = \min_{s \in C_o(j-1)} k^{r-j}(\mathrm{Lk}\ s) = \min_{s \in T(j-1)} k^{r-j}(\mathrm{Lk}\ s)$, $(0 \leq j \leq r < \ell)$.

3.3 THÉORÈME.- Soient Γ un sous-groupe discret co-compact de $G(K)$, M un Γ-module unitaire de dimension finie et j , $r \in \mathbb{N}$ $(1 \leq j \leq r < \ell)$. Si $m^{r,j}(T) > j(\ell - r)/(r+1)$, alors $H^r(\Gamma ; M) = 0$.

(a) On suppose tout d'abord que $G = \widetilde{G}$ et que Γ opère "très librement" sur T , ce qui signifie :

(1) $\gamma(\mathrm{St}\ P) \cap \mathrm{St}\ P = \emptyset$ quels que soient $P \in T(0)$ et $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$.

Cette condition entraîne que $X = T/\Gamma$, muni de la structure cellulaire quotient de celle de T , est en fait un complexe simplicial. De plus la projection canonique $\pi : T \to X$ est un isomorphisme de $\mathrm{St}\ s$ (resp. $\mathrm{Lk}\ s$) sur $\mathrm{St}\ \pi(s)$ (resp. $\mathrm{Lk}\ \pi(s)$) pour tout simplexe s de T . Vu 3.2(iv) et l'hypothèse sur Γ , X est fini. D'après le théorème de Solomon-Tits (voir par exemple [7 : Appendix II]), un immeuble de Tits à groupe de Weyl fini, de dimension n , est un bouquet de sphères de dimension n . Par conséquent, vu 3.2(v), on a

(2) $\widetilde{H}^m(\mathrm{Lk}\ s) = 0$, $(s \in X(j-1)$, $0 \leq m < \ell - j)$.

D'après 1.6 pour la cohomologie réelle, ou 2.1 dans le cas général, on a donc $H^r(X ; \widetilde{M}) = 0$. Mais Γ opère librement sur T , qui est contractile, donc X est un $K(\Gamma, 1)$, et $H^r(X ; \widetilde{M}) = H^r(\Gamma ; M)$, d'où 3.3 sous l'hypothèse (a).

(b) Dans le cas général, on remarque tout d'abord que si Γ' est un sous-groupe distingué d'indice fini de Γ , alors $H^r(\Gamma ; M)$ s'identifie au sous-espace des invariants de Γ/Γ' dans $H^r(\Gamma' ; M)$. Pour se ramener à (a), il suffit donc de prouver le lemme suivant

3.4 LEMME.- <u>Soit</u> $\sigma : \widetilde{G} \to G$ <u>l'isogénie centrale canonique. Alors il existe un sous-groupe discret co-compact</u> Γ' <u>de</u> $\widetilde{G}(K)$, <u>qui opère très librement sur</u> T , <u>et tel que</u> $\sigma(\Gamma') \cong \Gamma'$ <u>soit distingué d'indice fini dans</u> Γ .

Tout automorphisme défini sur K de $\widetilde{G}$ induit un automorphisme de $\widetilde{G}(K)$, donc de T . On en déduit une opération, aussi propre, de $G(K)$ sur T , <u>a fortiori</u> transitive sur $T(\ell)$. Par suite, Γ opère proprement sur T , et T/Γ est compact. Comme T est connexe, cela entraîne tout d'abord que Γ est de type fini. Le groupe $H = \sigma(\widetilde{G}(K))$ est fermé distingué dans $G(K)$, et $G(K)/H$ est compact commutatif, d'exposant fini [2 : 3.19] ; par conséquent, l'image de Γ dans $G(K)/H$ est un groupe fini et $\Gamma_1 = H \cap \Gamma$ est un sous-groupe distingué d'indice fini de Γ . Il est co-compact, donc $\Gamma_2 = \sigma^{-1}(\Gamma_1) \cap \widetilde{G}(K)$ est co-compact dans $\widetilde{G}(K)$. Comme $\ker \sigma$ est fini, Γ_2 est aussi discret. Il s'ensuit immédiatement que l'ensemble des $\gamma \in \Gamma_2$ pour lesquels il existe $P \in T(0)$ tel que $\gamma(\mathrm{St}\ P) \cap \mathrm{St}\ P \neq \emptyset$ est réunion d'un nombre fini de classes de conjugaisons de Γ_2 . Mais Γ_2 s'identifie à un sous-groupe de type fini d'un $\mathbb{GL}_n(K)$, donc l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini ou, ce qui revient au même, de ses sous-groupes distingués d'indice fini, est réduite à $\{e\}$ [7 : 2.7]. Il existe donc un sous-groupe distingué d'indice fini Γ_3 de Γ_2 qui opère très librement sur T . Il est sans torsion, et σ l'applique isomorphiquement sur un sous-groupe d'indice fini de Γ . Il suffit alors de prendre pour Γ' l'image réciproque dans Γ_3 de l'intersection de conjugués de $\sigma(\Gamma_3)$ dans Γ .

3.5. En utilisant 2.2, on démontre comme en 3.3(a) :

PROPOSITION.- <u>Soient</u> j , r <u>et</u> $m^{r,j}(T)$ <u>comme en</u> 3.3. <u>Soient</u> Γ <u>un sous-groupe discret de</u> $\widetilde{G}(K)$ <u>qui opère très librement sur</u> T <u>et</u> M <u>un</u> Γ<u>-module unitaire</u>

<u>de dimension finie</u>. <u>Alors l'espace</u> $\mathbb{H}^r(T/\Gamma\,;\widetilde{M})$ <u>des formes harmoniques de carré intégrable sur</u> T/Γ , <u>à coefficients dans le système local associé à</u> M , <u>est nul</u>.

[En fait, la démonstration de 3.3 montre aussi que si Γ est un sous-groupe discret de $G(K)$, alors l'espace $\mathbb{H}^r(T\,;M)^\Gamma$ des formes harmoniques Γ-invariantes sur T , de carré intégrable modulo Γ , est nul. Cet espace s'identifie à $\mathbb{H}^r(T/\Gamma\,;\widetilde{M})$ si Γ opère très librement. Pour pouvoir le dire dans le cas général, il faudrait étendre les considérations du § 1 et de 2.2 à des complexes non simpliciaux, ce dont le conférencier n'a guère envie.]

§ 4. <u>Estimation de valeurs propres</u> : <u>réduction au rang deux</u>

4.1. Dans ce paragraphe, G est un groupe muni d'un système de Tits (G,B,N,S) , T l'immeuble associé et ℓ la dimension de T . A partir du n° 4.3, G est fini ; jusque-là, G et T peuvent aussi être les $\widetilde{G}(K)$ et T du § 3. On suppose $\ell \geq 1$.

Soit C le simplexe de dimension ℓ de T fixe par le groupe B du système de Tits donné, et notons $I_\ell = \{0,1,\ldots,\ell\}$ l'ensemble de ses sommets. Tout simplexe $s \in T(r)$ $(0 \leq r \leq \ell)$ est transformé par G d'une et une seule face C_I de C , dont l'ensemble $I \subset I_\ell$ des sommets définit le type $I(s)$ de s . La réunion T_I des simplexes de type I est donc une orbite de G . Pour $i \in I_\ell$, on pose (cf. 1.1, 1.2)

$$\rho_i = \sum_{P \in T_{\{i\}}} \rho_P \quad , \qquad \Delta_i^+ = \sum_{P \in T_{\{i\}}} \Delta_P^+ \ .$$

4.2. La deuxième propriété de 3.2(iii) et 3.2(iv) entraînent que si $t \in T(r)$ et si s est une face de t , alors $c(s)/c(t)$ est le nombre des simplexes de type $I(t)$ contenant s , et ceux-ci forment une orbite du groupe d'isotropie de s . Comme les coefficients d'incidence sont invariants par G , on voit que dans l'expression de $\partial f(s)$ donnée par 1.1(4), $(f \in C^r(T)$, $s \in T(r-1))$, le coefficient de $f(t)$ ne dépend que du type de t , et est égal à $[t:s]$ si f est invariante par le groupe d'isotropie de s . Il s'ensuit que, sur l'ensemble $C^r(T)^G$ des r-cochaines invariantes par G , la restriction $f \mapsto f|u$ à un simplexe $u \in T(\ell)$, qui commute évidemment à d , commute aussi à ∂ . Elle commute alors aussi à Δ ou Δ^+ . Comme il n'y a pas de forme harmonique non nulle en dimension > 0 sur un simplexe, on en déduit tout d'abord

(1) $$f \in C^r(T)^G \ , \ (1 \leq r \leq \ell) \ , \ df = \partial f = 0 \Rightarrow f = 0 \ .$$

Il est élémentaire que sur un simplexe de dimension ℓ , les valeurs propres de Δ sur C^o sont 0 avec la multiplicité un (sur l'espace des cochaines constantes) et $\ell + 1$ avec la multiplicité ℓ , (sur l'espace des fonctions de moyenne nulle). Par conséquent, si $f \in C^o(T)^G$ est une fonction propre non nulle de Δ , de valeur propre $c \neq 0$, alors $c = \ell + 1$.

4.3. Rappelons que G est dorénavant fini. $\partial C^1(T)$ est le sous-espace de $C^o(T)$ orthogonal aux constantes (vu 1.1 (5) et le fait que T est connexe). Comme $c(s)$ ne dépend que de $I(s)$ on a, en posant $c(i) = c(P)$ pour $P \in T_{\{i\}}$

(1) $$f \in \partial C^1(T) \Leftrightarrow \sum_{0 \leq i \leq \ell} c(i) \sum_{P \in T_{\{i\}}} f(P) = 0 \ .$$

Soit maintenant $f \in \partial C^1(T)$ fonction propre de Δ , de valeur propre c . La somme $\bar{f}$ des transformées de f par G est encore dans le même espace propre de Δ , donc, vu la dernière remarque de 4.2, ou bien $c = \ell + 1$ ou bien $\bar{f} = 0$; autrement dit

(2) $$f \in \partial C^1(T) \ , \ \Delta f = c.f \ , \ c \neq \ell+1 \Rightarrow \sum_{P \in T_{\{i\}}} f(P) = 0 \ , \ (0 \leq i \leq \ell).$$

4.4. Le but principal de ce paragraphe est de prouver le :

LEMME.- Supposons $\ell \geq 2$ et soit $m^{o}(T) = \min_{P \in T(0)} k^{o}(\mathrm{Lk}\ P)$. Alors ou bien $k^{o}(T) = \ell + 1$ ou bien $(\ell - k^{o}(T))^{2} \leq \ell^{2}.(\ell - 1 - m^{o}(T))/m^{o}(T)$.

Il s'ensuit que, étant donné $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que si $m^{o}(T) \geq \ell - 1 - b$, alors $k^{o}(T) \geq \ell - a$. Ce lemme est en substance le lemme 6.3 de [7], et la démonstration est essentiellement la même.

Soit $f \in \partial C^{1}(T)$ et supposons $\Delta f = c.f$. Il s'agit d'évaluer $(\Delta f, f) = (df, df)$. On voudrait pour cela appliquer 1.4 à df . Mais ce dernier n'est pas en général annulé par ∂ . La méthode de Garland consiste à multiplier f sur les sommets d'un type i fixé par une constante convenable, de manière à ce que ∂df soit nulle sur $T_{\{i\}}$, d'appliquer 1.4 à cette transformée de f , puis de sommer sur i . La démonstration sera donnée en 4.6, après avoir discuté en 4.5 quelques propriétés de la transformation à faire subir à f .

4.5. Soient $i \in I_{\ell}$ et $t \in \mathbb{R}$. Etant donnée $f \in C^{o}$, on définit $f_{i,t} \in C^{o}$ par

(1) $$f_{i,t}(P) = t.f(P) \quad (P \in T_{\{i\}}) , \quad f_{i,t}(P) = f(P) \quad (P \in T_{\{j\}} , j \neq i) .$$

De la définition de ρ_{i} (cf. 4.1), on déduit

(2) $$(1 - \rho_{i}).f_{i,t} = (1 - \rho_{i}).f \quad ; \quad (1-\rho_{i})df_{i,t} = (1-\rho_{i})df , \quad (f \in C^{o}(T)) ,$$

ce qui entraîne tout d'abord

(3) $$(\rho_{i}df_{i,t} , df_{i,t}) = (df_{i,t} , df_{i,t}) - ((1 - \rho_{i})df , df) .$$

Soient $P \in T_{\{i\}}$ et $s \in (\mathrm{Lk}\ P)(1)$. Comme $d^{2} = 0$, on a

$$d_{P}(df_{i,t})(P * s) = \pm\, df_{i,t}(s) = \pm\, df(s) ,$$

d'où

(4) $$(\Delta_{i}^{+}df_{i,t} , df_{i,t}) = \sum_{P \in T_{\{i\}} , s \in (\mathrm{Lk}\,P)(1)} c(P * s).df(s)^{2} .$$

Mais il est immédiat que si s est un simplexe dont le type ne contient pas i, alors

(5) $$c(s) = \sum_{P \in T_{\{i\}} \cap \mathrm{Lk}\, s} c(P * s) ,$$

par conséquent

(6) $$(\Delta_i^+ df_{i,t}, df_{i,t}) = \sum_{s \in T(1),\, i \notin I(s)} c(s).df(s)^2 = ((1 - \rho_i)df , df) .$$

Vu la définition de ∂ (cf. 1.1(4)), de d, et 1.1(1), on a, pour $P \in T_{\{i\}}$

(7) $$\partial\, df_{i,t}(P) = t.\ell.f(P) + B ,$$

où B est combinaison linéaire des valeurs de f sur des sommets de type $\neq \{i\}$, et ne dépend pas de t. Supposons maintenant que $\Delta^+ f = c.f$. On a alors $\partial df(P) = c.f(P)$ et (7), pour $t = 1$, montre que $B = (c - \ell).f(P)$, d'où le

LEMME.- Soient $f \in \partial C^1(T)$ et supposons que $\Delta f = c.f$. Si $t = (\ell - c)/\ell$, alors $\partial df_{i,t}(P) = 0$ pour tout $P \in T_{\{i\}}$, et tout $i \in I_\ell$.

4.6. Nous passons maintenant à la démonstration de 4.4. Soit $f \in \partial C^1(T)$ une fonction propre non nulle de Δ et soit c sa valeur propre. On suppose $c \neq \ell + 1$. D'après 4.3(2), on a alors $\sum_{P \in T_{\{j\}}} f(P) = 0$ pour tout $j \in I_\ell$. Cette condition est encore satisfaite par $f_{i,t}$, donc (4.3(1)), $f_{i,t}$ est aussi contenue dans $\partial C^1(T)$, et l'on a

(1) $$(df_{i,t}, df_{i,t}) = (\Delta f_{i,t}, f_{i,t}) \geq k^0(T).(f_{i,t}, f_{i,t}) .$$

Soit $P \in T_{\{i\}}$. Nous reprenons les notations de 1.4, et considérons l'application $h \mapsto h_0$ de $C^1(T)$ dans $C^0(\mathrm{Lk}\, P)$ de 1.4. Faisons maintenant $t = (\ell - c)/\ell$. Alors $\partial df_{i,t}(P) = 0$ (4.5, Lemme), donc $(df_{i,t})_0$ est orthogonale aux constantes, (1.4(2)), i.e. dans $\partial C^1(\mathrm{Lk}\, P)$, et on peut lui appliquer 1.4 (5) d'où, vu 1.4 (1),

(4)

$$(\Delta_P^+ df_{i,t}, df_{i,t}) \geq k^o(\mathrm{Lk}\ P).(\rho_P df_{i,t}, df_{i,t}) \geq m^o(T).(\rho_P df_{i,t}, df_{i,t}) .$$

En sommant sur $P \in T_{\{i\}}$ et en utilisant 4.5(3), (6), on obtient

$$((1 - \rho_i)df, df) \geq m^o(T).((df_{i,t}, df_{i,t}) - ((1 - \rho_i)df, df)) ,$$

d'où, compte tenu de (1),

$$(1 + m^o(T)).((1 - \rho_i)df, df) \quad \geq \quad m^o(T).k^o(T).(f_{i,t}, f_{i,t}) .$$

On a $\sum_i (1 - \rho_i) = (\ell + 1).\mathrm{Id} - \sum_i \rho_i$, donc, sur C^1 , la somme des $(1 - \rho_i)$ est égale à $(\ell - 1).\mathrm{Id}$. D'autre part, on tire immédiatement de la définition de $f_{i,t}$ que $\sum_i (f_{i,t}, f_{i,t}) = (\ell + t^2).(f,f)$, d'où, vu que $(df,df) = c.(f,f)$,

$$(1 + m^o(T)).(\ell - 1).c.(f,f) \quad \geq \quad m^o(T).k^o(T).(\ell + t^2).(f,f) .$$

Si $k^o(T) = \ell + 1$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on peut prendre $c = k^o(T)$; on obtient alors

$$(1 + m^o(T)).(\ell - 1) \quad \geq \quad m^o(T).(\ell + t^2) ,$$

et le lemme s'ensuit en remplaçant t par sa valeur $(\ell - k^o(T))/\ell$.

4.7 PROPOSITION.- Soient ℓ un entier > 1 , et $a \in \mathbb{R}$. Il existe $b \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : si T est l'immeuble d'un système de Tits fini, de rang $\ell + 1$, et si $k^o(\mathrm{Lk}\ s) \geq 1 - b$ pour tout $s \in T(\ell - 2)$, alors $k^o(T) \geq \ell - a$.

Cela résulte de 4.4, par récurrence sur le rang.

§ 5. Valeurs propres pour le rang deux

Les valeurs propres de Δ^+ sur $C^o(T)$, lorsque T est l'immeuble d'un système de Tits de rang deux, de type de Lie, sont déterminées dans [7 : § 7], et l'avaient aussi été antérieurement par Feit et Higman [6]. Nous nous bornerons ici à résumer la discussion de [7].

5.1. Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas général de 4.1, dont nous reprenons les notations. Pour $I \subset I_\ell$, notons B_I le groupe d'isotropie de C_I ;

en particulier, $B_I = B$ si $I = I_\ell$. L'ensemble T_I des simplexes de type I s'identifie à G/B_I donc, si l'on désigne par $C(Y)$ l'espace des fonctions réelles sur l'ensemble Y , et par $|I|$ le cardinal de I :

$$C^r(T) = \bigoplus_{I \subset I_\ell,\ |I| = r+1} C(G/B_I) .$$

On note f_I la composante dans $C(G/B_I)$ d'un élément $f \in C^r(T)$. Soit encore π_{IJ} la projection canonique de G/B_J sur G/B_I lorsque $I \subset J \subset I_\ell$. On a alors (pour un choix évident des coefficients d'incidence) ;

(1) $$(df)_I = \sum_{j \in I} (-1)^{j+1} f \circ \pi_{I(j),I} , \qquad (f \in C^r(T)) ,$$

où $I(j)$ désigne $I = \{i_o, \ldots, i_{r+1}\}$ $(i_o < i_1 < \ldots < i_{r+1})$ privée de son j-ième terme. Posons $c(I) = c(C_I)$. Vu les propriétés de transitivité de G sur T déjà utilisées, on a

(2) $$c(I) = [B_I : B] , \quad c(t) = c(I(t)) \quad (t \in T(r)) ,$$

(3) $$(\partial f)(x.B_I) = \sum_{j \notin I} [C_{I\cup j} : C_I].(c(I\cup j)/c(I)). \sum_{y \in xB_I/B_{I\cup j}} f(x.y) ,$$

$(f \in C^r(T) \ ; \ I \subset I_\ell , \ |I| = r)$.

5.2. On note $H(G,B)$ l'algèbre de Hecke des fonctions bi-invariantes par B sur G , à support contenu dans un nombre fini de doubles classes modulo B , pour le produit de convolution. Elle est engendrée par les fonctions caractéristiques P_i des doubles classes Bw_iB , où $\{w_i\}$ $(0 \le i \le \ell)$ désigne l'ensemble générateur canonique S d'involutions du groupe de Weyl W de (G,B,N,S) [4]. Posons $Q_i = 1 + P_i$. C'est la fonction caractéristique de $B + B.w_i.B = B_{I_\ell(i)}$, groupe que l'on notera B^i . 5.1(3) donne alors, pour $r = \ell$:

(1) $$\partial f(x.B^i) = c(I_\ell(i))^{-1} (-1)^{i+1} f * Q_i , \qquad (f \in C^\ell(T)) ,$$

où le $*$ à droite indique l'opération de $H(G,B)$ sur $C(G/B)$ par convolution. Posons encore $q(i) = c(I_\ell(i)) - 1$. On a donc

(2) $$q(i) = [Bw_iB : B] = [B : w_iBw_i^{-1} \cap B] , \qquad (0 \le i \le \ell) .$$

5.3. Supposons maintenant $\ell = 2$ et G fini. W est un groupe dihedral, caractérisé par l'ordre m de w_ow_1, et l'on ne s'intéresse qu'aux cas où $m = 2 , 3 , 4 , 6$ (i.e. où W est le groupe de Weyl d'un groupe de Lie semi-simple de rang deux, les valeurs de m correspondant respectivement aux types $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{B}_2$ et $\mathbb{G}_2$). On a $C^o(T) = C(G/B^o) \oplus C(G/B^1)$, et il résulte immédiatement de 5.1(1) et 5.2(1) que, par rapport à cette décomposition de $C^o(T)$, $\Delta(f_o,f_1) = (f_o,f_1) * A$, où

(1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -c(0)^{-1}.Q_1 \\ -c(1)^{-1}.Q_o & 1 \end{pmatrix} ,$$

donc que $(\Delta - \mathrm{Id})^2.c(0).c(1)$ est la matrice diagonale ayant Q_1Q_o et Q_oQ_1 comme termes diagonaux. Il reste donc à trouver les valeurs propres de ces derniers. C'est trivial pour $m = 2$, car Q_o et Q_1 commutent ; dans les autres cas, on donne explicitement un polynôme (de degré $2 , 3 , 4$ suivant que $m = 3 , 4 , 6$) en Q_iQ_j $(i \neq j , 0 \le i , j \le 1)$ nul dans $H(G,B)$ [7 : p. 407-408]. On en tire que les valeurs de $k^o(T)$ pour $m = 2 , 3 , 4 , 6$ sont respectivement

(2) $$1 , \quad 1 - q(1)^{\frac{1}{2}}.c(1)^{-1} , \quad 1 - (q(0) + q(1))^{\frac{1}{2}}.(c(0) + c(1))^{-\frac{1}{2}}$$
$$1 - (q(0) + q(1) + q(0)^{\frac{1}{2}}q(1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} .(c(0).c(1))^{-\frac{1}{2}} .$$

Cela montre qu'elles sont arbitrairement proches de un si $q(0)$ et $q(1)$ sont assez grands. Si maintenant K, k_v, G et T sont comme en 3.1, alors les coefficients $q(i)$ pour T, ou, ce qui revient au même, pour les links des simplexes de dimension $\le \ell - 2$ de T, sont des puissances du cardinal $|k_v|$ de k_v. Par conséquent, vu que $\mathrm{Lk}\, s$ $(s \in T(\ell - 2))$ est de l'un des types considérés ici :

5.4 PROPOSITION.- <u>Soit</u> $b > 0$. <u>Il existe un entier</u> $n(b) > 0$ <u>tel que si</u> T <u>est l'immeuble de Tits d'un</u> K-<u>groupe simple simplement connexe</u> G <u>de</u> K-<u>rang</u> $\ell \ge 2$

et si $|k_v| \geq n(b)$, *alors* $k^o(Lk\ s) \geq 1 - b$ *pour tout* $s \in T(\ell - 2)$.

§ 6. *Sous-groupes discrets de groupes simples p-adiques* II

6.1 THÉORÈME.- *Soit* $\ell_o \geq 1$. *Il existe un entier* $N(\ell_o)$ *ayant la propriété suivante. Si* K , k_v , G , ℓ *sont comme en* 3.1, *si* $\ell \leq \ell_o$, $|k_v| \geq N(\ell_o)$, *alors* $H^r(\Gamma ; M) = 0$ $(1 \leq r < \ell)$ *quels que soient le sous-groupe discret co-compact* Γ *de* $G(K)$ *et le* Γ*-module unitaire de dimension finie* M .

Soit $a > 0$ tel que $\ell - a > r(\ell - r)/(r+1)$ pour $2 \leq \ell \leq \ell_o$ et $1 \leq r < \ell$. On choisit ensuite $b > 0$ pour que 4.7 soit satisfaite si $\ell \leq \ell_o$, et on prend $N(\ell_o)$ égal au $n(b)$ de 5.4. On a alors $k^o(Lk\ s) > r(\ell - r)/(r+1)$ pour tout $s \in T(\ell - 2)$ et 6.1 résulte de 3.3, appliqué au cas $j = r$.

Remarque.- Si l'on ne suppose pas Γ co-compact, la conclusion reste valable pour l'espace $\mathbb{H}^r(T ; M)$ des r-formes harmoniques Γ-invariantes sur T , de carré intégrable modulo Γ , avec la même démonstration, compte tenu de 3.5. Pour G simplement connexe, c'est le Théor. 8.3 de [7].

6.2. Supposons $\ell = 2$, $r = 1$. La condition de 3.3 est alors $k^o(Lk\ s) > \frac{1}{2}$ pour tout $s \in T(1)$. Les valeurs données en 5.3 montrent qu'elle est toujours remplie, sauf pour $m = 4$, $|k_v| = 2$ et $m = 6$, $|k_v| = 2$, 3 . Cependant, par des calculs directs (non publiés), H. Garland a montré que l'on a aussi $H^1(\Gamma ; M) = 0$ dans ces cas-là. Il n'y a donc pas de restriction sur le corps résiduel si $\ell = 2$.

6.3. La nullité de $H^1(\Gamma ; \mathbb{R})$, (action triviale) équivaut au fait que $(\Gamma ; \Gamma)$ est d'indice fini dans Γ . Rappelons qu'elle a été démontrée par A. Kazhdan (cf. [10]) sans hypothèse sur $|k_v|$, pour $\ell \geq 2$.

6.4. Les démonstrations utilisent essentiellement l'existence d'un produit scalaire positif non-dégénéré sur M invariant par Γ . "On" espère évidemment que cette hypothèse n'est pas nécessaire. Remarquons qu'elle est tout de même souvent satisfaite lorsque Γ est construit "arithmétiquement". Rappelons brièvement cette construction, qui est en fait le seul procédé général connu pour obtenir des Γ discrets co-compacts. Soit F un corps de nombres totalement réel admettant une complétion $F_v \cong K$ et soit H un F-groupe simple tel que $H \otimes_F K = G$ et que $(H \otimes_F F_w)(\mathbb{R})$ soit compact pour toute place à l'infini w de F . On sait que, sous ces hypothèses, tout sous-groupe S-arithmétique de H , où $S = \{v\}$, vu comme sous-groupe de $H(K)$, est discret et co-compact. D'autre part, comme H est compact à l'infini, il est clair que si M est l'espace d'une représentation rationnelle définie sur F de G , alors M admet une structure unitaire respectée par $H(F)$, et en particulier par Γ .

6.5. Enfin, il paraît assez plausible que l'hypothèse de simplicité faite sur G peut être considérablement affaiblie. Plus précisément, soient K_i $(1 \leq i \leq s)$ un corps p-adique, G_i un K_i-groupe, simple sur K_i , et de K_i-rang $\ell_i \geq 1$. Soit $L = \prod_{1 \leq i \leq s} G_i(K_i)$. On suppose la somme ℓ des ℓ_i au moins égale à deux. Il est alors naturel de conjecturer que l'on a $H^i(\Gamma ; \mathbb{R}) = 0$ $(1 \leq i < \ell)$ quel que soit le sous-groupe discret co-compact Γ irréductible (projection sur tout produit partiel des $G_i(K_i)$ non discrète) de L . En tout cas on peut montrer, au moins en caractéristique zéro, que, étant donné r $(1 \leq r \leq \max \ell_i)$, si l'on a $H^j(\Gamma_i ; \mathbb{R}) = 0$ pour $1 \leq j \leq \min(r , \ell_i - 1)$ quel que soit le sous-groupe discret co-compact Γ_i de $G_i(K_i)$ $(1 \leq i \leq s)$, alors $H^i(\Gamma ; \mathbb{R}) = 0$ pour $1 \leq i \leq r$ et Γ discret, co-compact, irréductible dans L .

L'hypothèse faite sur le i-ième facteur est vide si $r = 1$ ou si $\ell_i = 1$. Cela montre en particulier la nullité de $H^1(\Gamma ; \mathbf{R})$ lorsqu'il y a au moins deux facteurs.

§ 7. Cohomologie de dimension maximum et représentation spéciale

7.1. Dans ce paragraphe, on suppose G simplement connexe. Comme précédemment T est l'immeuble de Tits de $G(K)$ et B un sous-groupe parahorique minimal de $G(K)$. On note χ l'unique caractère de l'algèbre de Hecke $H(G,B)$ qui est égal à -1 sur les P_i (notations de 5.2). Il existe sur G/B une et une seule fonction (sphérique élémentaire) φ qui est fonction propre de $H(G,B)$ pour le caractère χ et vaut un sur B . Elle est de carré intégrable, et le plus petit sous-espace fermé H_σ de $L^2(G)$ la contenant est irréductible. C'est un élément de la série discrète, la représentation spéciale de $G(K)$, qui sera notée σ (cf. [11, 14]). L'espace $L^2(G(K)/B)$ s'identifie, comme $G(K)$-module, à l'espace $L^\ell(T ; \mathbf{C})$ des ℓ-formes complexes de carré intégrable sur T . Vu 5.2(1), une telle cochaine f est harmonique si et seulement si $f * Q_i = 0$, i.e. $f * P_i = -f$ $(0 \leq i \leq \ell)$, donc si et seulement si $f * Q = \chi(Q).f$ $(Q \in H(G,B))$, puisque les P_i engendrent $H(G,B)$. En particulier $\varphi \in \mathbb{H}^\ell(T ; \mathbf{R})$. On montre qu'en fait l'isomorphisme $L^2(G/B) \xrightarrow{\sim} L^\ell(T ; \mathbf{C})$ applique H_σ sur $\mathbb{H}^\ell(T ; \mathbf{R})$, mais nous n'avons pas besoin de ce fait ici.

7.2 THÉORÈME.- On conserve les notations et hypothèses de 7.1. Soit Γ un sous-groupe discret co-compact de $G(K)$. Alors $\dim H^\ell(\Gamma ; \mathbf{R})$ est égale à la multiplicité de la représentation spéciale dans $L^2(\Gamma \backslash G(K))$.

(cf. [7 : 10.4] ; pour $G = \mathbf{SL}_2$, ce résultat est dû à Ihara [9].) Rappelons que, comme $\Gamma \backslash G(K)$ est compact, $L^2(\Gamma \backslash G(K))$ est somme discrète à multiplicités finies de représentations irréductibles de $G(K)$. Soit

(1) $$V_\Gamma = \{f \in L^2(\Gamma\backslash G(K)) \mid f * Q = \chi(Q).f \ , \ (Q \in H(G,B))\} \ .$$

Un raisonnement standard montre que $\dim V_\Gamma$ est la multiplicité de la représentation spéciale dans $L^2(\Gamma\backslash G(K))$. Rappelons-le brièvement. Tout d'abord si $H \subset L^2(\Gamma\backslash G(K))$ est une copie de la représentation spéciale, on a $\dim H \cap V_\Gamma = 1$, vu 7.1. Soit maintenant $f \in V_\Gamma$, de norme un. Alors le "coefficient" $c_{f,f}$ défini par $c_{f,f}(g) = (f,g.f)$ $(g \in G(K))$ est égal à φ , vu la caractérisation de cette dernière. L'application $u \longmapsto c_{f,u}$ de $L^2(\Gamma\backslash G(K))$ dans $L^2(G)$ est alors un opérateur d'entrelacement, qui applique isomorphiquement le plus petit sous-espace fermé invariant par $G(K)$ contenant f sur H_σ .

Soit $f \in V_\Gamma$. On a $f * Q = f$ si Q est la fonction caractéristique de B , donc f est invariante à droite par B . Vu ce qui a été dit en 7.1, on a alors

(2) $$V_\Gamma \cong C^\ell(T\,;\,\mathbb{C})^\Gamma \cap \ker \partial \ .$$

Supposons maintenant que Γ opère très librement (cf. 3.3). Alors $C^\ell(T)^\Gamma = C^\ell(\Gamma\backslash T)$, donc

(3) $$V_\Gamma \cong H^\ell(\Gamma\backslash T\,;\,\mathbb{C}) = H^\ell(\Gamma\,;\,\mathbb{C}) = H^\ell(\Gamma\,;\,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \ ,$$

d'où le théorème dans ce cas. En général, on peut trouver un sous-groupe distingué Γ' d'indice fini de Γ qui opère très librement (cf. dém. de 3.4). Il est classique que $H^\ell(\Gamma\,;\,\mathbb{R}) = H^\ell(\Gamma'\,;\,\mathbb{R})^{\Gamma/\Gamma'}$ et évident que $V_\Gamma = (V_{\Gamma'})^{\Gamma/\Gamma'}$. Il suffit alors de remarquer que les isomorphismes de (3), pour $\Gamma = \Gamma'$, commutent avec l'action naturelle de Γ/Γ' .

7.3. On suppose Γ sans torsion et l'on dénote $\chi(\Gamma)$ sa caractéristique d'Euler-Poincaré : $\chi(\Gamma) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(\Gamma\,;\,\mathbb{R})$. D'après [13 : § 3], il existe une mesure de Haar sur $G(K)$ telle que l'on ait

$$\chi(\Gamma) = (-1)^\ell \operatorname{vol}(\Gamma\backslash G(K)) \ ,$$

pour tout Γ (discret, co-compact, sans torsion, ou même avec torsion pour une définition convenable de $\chi(\Gamma)$). Si $H^i(\Gamma ; R) = 0$ pour $0 < i < \ell$, alors

$$\dim H^{\ell}(\Gamma ; R) = \mathrm{vol}(\Gamma \backslash G(K)) + (-1)^{\ell+1} .$$

En passant à des sous-groupes d'indice fini de Γ , on voit que l'on peut rendre le membre de gauche arbitrairement grand.

[Note ajoutée en mai 1974 :

Peu de temps après la rédaction de cet exposé, H. Garland et le conférencier ont remarqué que si la conjecture de 6.5 est vraie pour chaque groupe $G_i(K_i)$, elle l'est aussi pour leur produit.

Plus récemment, W. Casselman a établi 6.1 sans restriction sur le corps K (Research Announcement à paraître au Bull. A. M. S.). En considérant la cohomologie d'Eilenberg-Mac Lane continue de $G(K)$ à coefficients dans $L^2(G(K)/\Gamma)$, (ou, si $M \neq \mathbf{C}$, à coefficients dans la représentation induite de $G(K)$ à partir de M), il le déduit du théorème suivant :

Soit P un K-sous-groupe parabolique minimal de G et soit π la représentation naturelle de $G(K)$ dans l'espace des fonctions localement constantes sur $G(K)/P(K)$. Alors les seuls sous-quotients irréductibles et pré-unitaires de π sont la représentation triviale et la représentation de Steinberg.]

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL et J. TITS - Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S., n° 27 (1965), 55-151.

[2] A. BOREL et J. TITS - Compléments à l'article "Groupes réductifs", Ibid. n° 41, (1972), 253-276.

[3] A. BOREL et J. TITS - Homomorphismes "abstraits" des groupes algébriques simples, Annals of Math. 97 (1973), 499-571.

[4] N. BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie, chap. IV, V, VI, Hermann, Paris (1968).

[5] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes réductifs sur un corps local I, Publ. Math. I.H.E.S., n° 41 (1972), 1-251.

[6] W. FEIT and G. HIGMAN - The nonexistence of certain generalized polygons, J. of Algebra, 1 (1964), 114-131.

[7] H. GARLAND - p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups, Annals of Math., 97 (1973), 375-423.

[8] H. GARLAND - On the cohomology of discrete subgroups of semi-simple Lie groups, Proc. Int. Colloquium Bombay 1973 (à paraître).

[9] Y. IHARA - On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 219-235.

[10] A. KAZHDAN - Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups.

[11] H. MATSUMOTO - Fonctions sphériques sur un groupe semi-simple p-adique, C.R.Acad.Sci. Paris, 269(1969), 829-832.

[12] Y. MATSUSHIMA - On Betti numbers of compact, locally symmetric Riemannian manifolds, Osaka Math. J., 14 (1962), 1-20.

[13] J.-P. SERRE - Cohomologie des groupes discrets, dans "Prospects in Mathematics", Annals of Math. Studies 70, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[14] J. A. SHALIKA - On the space of cusp forms of a p-adic Chevalley group, Annals of Math., 92 (1970), 262-278.