SERGE ALINHAC

Caractérisation d'espaces de fonctions analytiques et non quasi-analytiques sur une variété à bord

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 442, p. 115-123

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__115_0>

Séminaire BOURBAKI
26e année, 1973/74, n° 442

CARACTÉRISATION D'ESPACES DE FONCTIONS ANALYTIQUES ET NON QUASI-ANALYTIQUES SUR UNE VARIÉTÉ A BORD

[d'après M. BAOUENDI et C. GOULAOUIC]

par Serge ALINHAC

Introduction

Les résultats présentés ici précisent la structure de certains espaces de fonctions régulières sur un ouvert à bord Ω , ou plus généralement sur une variété analytique réelle à bord convenable.

Ces espaces sont $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ (l'espace des fonctions indéfiniment différentiables jusqu'au bord de Ω), $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$ (l'espace des fonctions analytiques jusqu'au bord) ou des espaces intermédiaires non quasi-analytiques notés $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ $(s \geq 1)$; ils seront définis plus loin.

On parvient à caractériser une fonction f d'un de ces espaces par des propriétés de la suite des itérés $A^i f$ $(i \in \mathbb{N})$, où A est un opérateur différentiel bien choisi, lié à la géométrie de l'ouvert ou de la variété.

Cela permet de montrer que ces espaces sont isomorphes à des espaces de suites, et de donner diverses applications.

Des résultats analogues avaient déjà été obtenus pour une variété sans bord (cf. [2]) et un opérateur A elliptique. L'originalité du présent travail est le choix judicieux de A , autorisant le "traitement du bord".

I. Généralités et rappels de quelques résultats anciens

Ces résultats, comme ceux qui sont présentés plus loin, sont de deux ordres : un résultat de régularité locale "à l'intérieur", et une "propriété d'itérés".

Considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et A un opérateur différentiel elliptique d'ordre deux à coefficients analytiques dans Ω . On a alors la

PROPOSITION I.1.- Soit $f \in C^{\infty}(\Omega)$ une fonction telle que $Af \in \mathcal{A}(\Omega)$. Alors $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

La "propriété d'itérés" est la suivante :

PROPOSITION I.2.- Soit $f \in C^{\infty}(\Omega)$ telle que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $M > 0$ avec : $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $\|A^i f\|_{L^2(K)} \leq M^{i+1}(2i)!$. Alors $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

La proposition I.1 est bien connue (cf. par exemple Petrovski) ; la proposition I.2 a été établie d'abord par Aronszajn pour $A = \Delta$ (Laplacien usuel), puis en général par Kotake et Narasimhan [2]. Les résultats présents généralisent les propositions I.1 et I.2 au cas d'un ouvert "à bord", ou même "à coins cubiques" (cf. Hanouzet [3]).

II. Le problème du bord et la forme des opérateurs A choisis

Soient Ω un ouvert borné régulier, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et f une fonction, $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$.

Notre premier but est d'obtenir, pour un opérateur A convenable, un résultat du type :

$$Af \in \mathcal{A}(\bar{\Omega}) \Rightarrow f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega}) .$$

On imposera que A soit elliptique en tout point de Ω , afin d'obtenir $Af \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Néanmoins, si l'on choisit, par exemple, $A = \Delta$, on devra imposer de plus $f|_{\partial\Omega} \in \mathcal{A}(\partial\Omega)$, faute de quoi Af pourra être analytique jusqu'au bord de Ω sans que f le soit.

Il convient donc d'éliminer cette condition supplémentaire de trace sur $\partial\Omega$.

A cet effet, on peut regarder la variété à bord $\bar{\Omega}$ comme image d'une variété sans bord V par une certaine application, et voir si certains opérateurs elliptiques sur V "descendent" sur $\bar{\Omega}$. Donnons deux exemples de ce procédé :

Exemple 1.- Soient S^2 la sphère unité de R^3 , et $p : S^2 \to [-1,+1]$ l'application restriction à S^2 de la projection $(x,y,z) \mapsto z$. On vérifie que le Laplacien Δ_S de la sphère se projette par p en l'opérateur différentiel $L \equiv \frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d}{dt}$. On nomme l'opérateur L "opérateur de Legendre".

Exemple 2.- Soient $\pi = R^2$ le plan réel et $p : \pi \to R_+$ l'application définie par $(x,y) \mapsto t = x^2 + y^2$. Le Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ se projette par p en l'opérateur $4\frac{d}{dt}\, t\, \frac{d}{dt}$ de R_+ .

On est donc conduit à choisir pour A une "dégénérescence" au voisinage du bord $\partial\Omega$ du type de celle de $\frac{d}{dt}\, t\, \frac{d}{dt}$ près de $t = 0$.

D'une façon précise, on fera l'hypothèse

(H_1) Au voisinage de tout point du bord $\partial\Omega$, l'opérateur A s'écrit dans les coordonnées locales (x,y) (avec (x,y) appartenant à un voisinage V de 0 dans $\bar{R}^n_+$)

$$A = D_y\, y\, D_y + \sum_{|\mu| \le 2} b_\mu D_x^\mu + \sum_{|\mu| \le 1} c_\mu D_x^\mu\, y\, D_y \ .$$

Cela signifie que toute dérivation normale au bord présente dans A "dégénère" sur le bord. On impose en revanche que les termes de dérivations tangentielles se maintiennent sur le bord, et y constituent un opérateur elliptique. C'est, pour l'essentiel, le sens de la seconde hypothèse faite sur A :

(H_2) Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in D(V)$, on ait l'inégalité a priori

$$\|yu\|_{H^2(R^n_+)} + \sum_{|\alpha| \le 2} \|D_x^\alpha u\|_{L^2(R^n_+)} \le C(\|Au\|_{L^2(R^n_+)} + \|u\|_{L^2(R^n_+)}) \ .$$

Donnons des exemples d'opérateurs vérifiant (H_1) et (H_2) :

Exemple 1.- Supposons que Ω est un ouvert borné régulier de R^n, tel qu'il existe une fonction φ, $\varphi : R^n \to R$, $\varphi \in C^\infty(R^n)$, pour laquelle

$$\Omega = \{x \in R^n \,,\ \varphi(x) > 0\}$$

$$\partial\Omega = \{x \in R^n \,,\ \varphi(x) = 0\} \quad \text{et} \quad d\varphi \neq 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\ .$$

On note $\operatorname{grad} \varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ et on pose $\Lambda_{jk} = \varphi_k D_j - \varphi_j D_k$ $(j, k \geq 1)$. On considère alors la forme intégro-différentielle

$$a(u,v) = \int_\Omega \{ \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} \varphi\, a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v} + \sum_{j,k} \Lambda_{jk} u\, \overline{\Lambda_{jk} v} \}\, dx \ ,$$

dans laquelle on suppose $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\bar\Omega)$,

$$\operatorname{Re} \sum_{\substack{|\alpha| = 1 \\ |\beta| = 1}} a_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha\, \overline{\xi^\beta} \geq C|\xi|^2 \qquad \text{pour tout} \quad \xi \in C^n \ ,$$

et $\operatorname{Re} a_{\alpha\alpha}$ assez grand pour $|\alpha| = 0$ pour qu'on ait la coercivité

$$\operatorname{Re} a(u,u) \geq C' \{ \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|\sqrt{\varphi}\, D_j u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j,k} \|\Lambda_{jk} u\|^2_{L^2(\Omega)} \} \ .$$

A la forme a est associé l'opérateur

$$A = A(x,D) = \sum_{\alpha,\beta} D^\beta \varphi\, a_{\alpha\beta}\, D^\alpha + \sum_{i,j} \Lambda^*_{ij}\, \Lambda_{ij} \ .$$

On démontre que A vérifie (H_1) et (H_2).

Si par exemple $\Omega = \{x \in R^n \,,\ |x|^2 < 1\}$, A sera l'opérateur

$$A = \sum_{i=1}^n D_i(1 - |x|^2) D_i + \sum_{j,k} (x_j D_k - x_k D_j)^2 + 1 \ .$$

Exemple 2.- Considérons une variété analytique réelle V à bord Γ. On sait qu'une telle variété est isomorphe à une pièce d'un espace numérique R^N, N convenable. Cela permet de construire sur V et Γ des champs analytiques globaux en nombre suffisant, qui jouent alors dans la construction de A le même rôle que les D_j et les Λ_{jk} dans l'exemple 1.

L'existence d'une fonction analytique φ avec les propriétés de l'exemple 1 peut s'obtenir sous des hypothèses topologiques pour Γ.

III. Les principaux résultats

1. Classes de fonctions envisagées

a) Classes de Gevrey

DÉFINITION.- Soient K un compact, $K \subset \mathbb{R}^n$, et $s \geq 1$; on appelle espace de Gevrey d'ordre s sur K l'espace $G_s(K)$ des restrictions à K de fonctions u de classe C^∞ dans un voisinage de K, tel qu'il existe $L > 0$ avec

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n , \quad \|D^\alpha u\|_{L^2(K)} \leq L^{|\alpha|+1}(|\alpha|\,!)^s .$$

Une fonction u est dans $G_s(\Omega)$ si et seulement si, pour tout compact $K \subset \Omega$, $u \in G_s(K)$.

On a bien sûr $G_1 = \mathcal{A}$.

b) Les espaces $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$

DÉFINITION.- On note, pour tout entier $k \geq 0$,

$$R_k = \begin{cases} (D_y\, y\, D_y)^p & \text{si } k = 2p \\ y\, D_y(D_y\, y\, D_y)^p & \text{si } k = 2p+1 , \end{cases}$$

en sorte que R_k est un opérateur différentiel d'ordre k en la variable y (réelle).

Alors, pour tout $s \geq 1$, on désigne par $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ l'espace des $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u \in G_s(\Omega)$, qui vérifient de plus sur toute carte locale ω d'un point de $\partial\Omega$ les inégalités :

$$\exists M > 0 , \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1} , \quad \forall k \in \mathbb{N} , \quad \|D_x^\alpha R_k u\|_{L^2(\omega)} \leq M^{|\alpha|+k+1}((|\alpha|+k)!)^s .$$

On montre que $G_s(\bar{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{A}_s(\bar{\Omega}) \hookrightarrow G_{2s-1}(\bar{\Omega})$, et en particulier $\mathcal{A}_1(\bar{\Omega}) = \mathcal{A}(\bar{\Omega})$.

2. Le théorème d'itération

THÉORÈME.- Soit un réel $s \geq 1$; on suppose que les coefficients de A sont de classe G_s sur $\bar{\Omega}$ et que $\partial\Omega$ est de classe G_s ; soit alors $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction u est dans $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$;

(ii) il existe $K > 0$ telle que

$$\forall\, i \in \mathbb{N} , \qquad \|A^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq K^{2i+1}(2i!)^s .$$

Ce théorème a un caractère global. En fait, il est la conséquence d'un résultat plus fort, local, démontré par Baouendi et Goulaouic (Théorème 4.2 de [1]).

Il est à noter que l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) n'est nullement triviale ; sa vérification s'effectue par un calcul direct assez délicat.

Il est possible, dans le cas particulier $s = 1$ (fonctions analytiques), de ramener simplement la preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i) à un résultat de régularité analytique. On procède comme suit (cf. Lions et Magènes [4]) :

On considère la fonction $w(x,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} t^{2i} \frac{A^i u(x)}{(2i)!}$; d'après (ii), $w \in C^\infty(\bar{\Omega} \times]-\varepsilon , \varepsilon[)$ pour un certain ε petit ; on a de plus $(A + D_t^2)w = 0$. Supposant acquis un résultat d'analyticité jusqu'au bord pour des opérateurs de la forme A ($A + D_t^2$ en est justement un!), on en déduit que $w \in \mathcal{A}(\bar{\Omega} \times]-\varepsilon , \varepsilon[)$, et donc

$$u(x) = w(x,0) \in \mathcal{A}(\bar{\Omega}) .$$

Dans le cas général, la preuve est beaucoup plus délicate, et repose sur des estimations *a priori* déduites de (H_1) et (H_2) (cf. [1], p. 222 à 236).

Notons cependant que, toujours dans le cas $s = 1$, les changements de variables indiqués dans l'exemple 2, partie II, peuvent permettre "de réduire le problème "sans bord". Il convient alors de préciser légèrement la forme de A, afin que l'opérateur transformé $\tilde{A}$ soit elliptique, et d'établir les correspondances de régularité (C^∞ et analytique) entre les fonctions u considérées et leurs transformées $\tilde{u}$.

IV. Applications

Elles concernent essentiellement la structure des espaces $C^\infty(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$, $s \geq 1$.

Plaçons-nous dans le cas de l'exemple 1, partie II, et supposons la forme $a(u,v)$ hermitienne. L'opérateur A, considéré comme opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$ avec pour domaine $D(A) = \{u \in L^2(\Omega) , Au \in L^2(\Omega)\}$, est alors auto-adjoint. Soit (φ_j) une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$ constituée par des fonctions propres de A. On note J l'application qui, à tout $f \in L^2(\Omega)$, fait correspondre la suite (f_j) de ses coefficients de Fourier sur la base (φ_j).

On note, pour toute suite $P(j)$ de réels positifs,

$$\ell^2_{P(j)} = \{(f_j) \in \mathbf{C}^N , \sum_{j=0}^{+\infty} |f_j|^2 P(j) < +\infty\} .$$

On a alors le

THÉORÈME.- L'application J est un isomorphisme

a) de $C^\infty(\bar{\Omega})$ sur l'espace $\mathcal{S}$ des suites à décroissance rapide ;

b) de $D'(\bar{\Omega})$ sur l'espace $\mathcal{S}'$ des suites à croissance lente ;

c) de $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ sur l'espace $\varinjlim_{M>0} \ell^2_{\exp(M j^{1/sn})}$, $s \geq 1$.

Ce résultat est une conséquence du théorème des itérés cité dans la partie III et d'un résultat de théorie spectrale pour l'opérateur A , précisant le comportement de ses valeurs propres λ_j , lorsque $j \to +\infty$.

COROLLAIRE.- Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés et réguliers inclus respectivement dans R^{n_1} et R^{n_2} (non vides). Alors $\mathcal{A}(\bar{\Omega}_1)$ est isomorphe à $\mathcal{A}(\bar{\Omega}_2)$ si et seulement si $n_1 = n_2$.

Il est possible de déduire également du théorème des résultats d'interpolation et d'approximation relatifs aux espaces $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ (cf. [1] pour plus de détails).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC - Régularité analytique et Itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Applications, J. of Functional Analysis, vol. 9 (1972), p. 208-248.

[2] T. KOTAKE and N. S. NARASIMHAN - Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator, Bull. Soc. Math. de France, 90 (1962), p. 449-471.

[3] B. HANOUZET - Caractérisation de classes de fonctions C^∞ par des itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés sur des ouverts irréguliers, Sém. Goulaouic-Schwartz, exposé n° 2, 1971/72, Ecole Polytechnique, Centre de Math., Paris.

[4] J.-L. LIONS et E. MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes, tome 3 (Dunod) Paris, 1970.

La Bibliographie de [1] contient de nombreuses références à des sujets connexes.