SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PAUL-ANDRÉ MEYER

Le théorème de dérivation de Lebesgue par rapport à une résolvante

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. nº 422, p. 88-97
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__88_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
25e année, 1972/73, n° 422

Novembre 1972

LE THÉORÈME DE DÉRIVATION DE LEBESGUE PAR RAPPORT A UNE RESOLVANTE

[d'après G. MOKOBODZKI]

par Paul-André MEYER

Introduction

Le théorème de dérivation de Lebesgue sur la droite peut s'énoncer de la manière suivante.

Soit f une fonction décroissante et positive sur $\mathbb{R}$, continue à droite, bornée et telle que $f(+\infty) = 0$: f s'écrit

(1) $$f(x) = \int_x^\infty \mu(dt)$$ où μ est une mesure positive bornée.

Formons $D_h f(x) = \frac{1}{h}(f(x) - f(x+h))$. Alors :

1) $D_h f$ converge p.p. au sens de Lebesgue lorsque $h \to 0$;

2) la limite de $D_h f$ est la densité de la partie absolument continue de μ ;

3) on a le lemme maximal de Hardy-Littlewood : soit $D^*f = \sup_h D_h f$. Alors

(2) $$\int_x^\infty \varphi_{\{D^*f > c\}}(t)dt \leq \frac{f(x)}{c} \quad \text{pour tout } c > 0 .$$

[On rappelle que $\varphi_{\{..\}}$ est la fonction caractéristique de $\{..\}$! .]

Ce théorème ne passe pas pour évident. Il en existe des généralisations à $\mathbb{R}^n$, et aux intégrales multiples, mais on sait que la situation est plus compliquée que dans $\mathbb{R}$. En voici maintenant une généralisation d'un type tout différent :

Soit f une fonction surharmonique positive dans $\mathbb{R}^3$, potentiel newtonien d'une mesure positive bornée μ

(1') $$f(x) = \int n(x,t)\,\mu(dt) .$$

Formons $D_h f(x) = \frac{c}{h^2}(f(x) - M_{x,h} f)$, où c est une constante convenable, et $M_{x,h}(f)$ est la moyenne de f sur la boule de centre x et de rayon h. Alors :

1) $D_h f$ converge p.p. au sens de Lebesgue lorsque $h \to 0$;

2) la limite de $D_h f$ est la densité de la partie absolument continue de μ ;

3) on a le "lemme maximal" suivant : soit $D^* f = \sup_h D_h f$. Alors

(2') $$\int n(x,t)\, \varphi_{\{D^* f > c\}}(t)dt \leq \frac{f(x)}{c} \qquad \text{pour tout } c > 0 .$$

C'est vraiment le même théorème ! Personne n'a, semble-t-il, essayé de démontrer des résultats de ce genre en théorie du potentiel avant que Mokobodzki fasse une théorie entièrement générale de la dérivation par rapport à un semi-groupe sous-markovien (ou plus généralement encore une résolvante), qui comprend les deux théorèmes ci-dessus comme cas particuliers. Les résultats de Mokobodzki sont déjà anciens (1969), et n'ont absolument pas été diffusés comme ils le méritent : leur auteur lui-même semble les négliger. On peut renvoyer le lecteur à l'excellente rédaction de Mokobodzki (cf. [1]).

Notations générales

- E est un ensemble muni d'une tribu $\underline{\underline{B}}$. $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une <u>résolvante</u> sousmarkovienne, c'est-à-dire une famille de noyaux positifs sur $(E,\underline{\underline{B}})$ possédant les propriétés

$$\lambda V_\lambda 1 \leq 1 \qquad\qquad V_\lambda - V_\mu = -(\lambda - \mu) V_\lambda V_\mu$$

les noyaux V_λ croissent lorsque λ décroît. Leur limite pour $\lambda \to 0$ est un noyau V , le <u>noyau potentiel</u>, qui n'est en général pas borné. Nous lui imposerons plus loin, toutefois, de n'être "pas trop grand".

- Une fonction f sur E est dite <u>surmédiane</u> si elle est $\underline{\underline{B}}$-mesurable positive, et $\lambda V_\lambda f \leq f$ pour tout $\lambda > 0$. Si de plus on a $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda f = f$, f est dite <u>excessive</u> (la limite au premier membre existe pour toute f surmédiane, on la note $\hat{f}$, et c'est une fonction excessive). On notera $\underline{\underline{S}}$ (resp. $\underline{\underline{S}}_b$) le cône convexe $\wedge$-stable des fonctions surmédianes finies (resp. bornées).

- L'expression <u>négligeable</u> s'applique à un ensemble négligeable à la fois pour toutes les mesures $V(x,.)$ $(x \in E)$. L'expression <u>presque partout</u> signifie

"sauf sur un ensemble négligeable". Par exemple, si $f \in \underline{\underline{S}}$, on a $f = \hat{f}$ p.p. .

- La notation $f \ll g$ (ordre fort) signifie $g = f + h$, où h est <u>surmédiane</u>.

- Nous nous donnons (et donc supposons qu'il existe) un espace vectoriel Λ-stable $\underline{\underline{C}}$ de fonctions $\underline{\underline{B}}$-mesurables bornées sur E , satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) si $f \in \underline{\underline{C}}^+$, Vf est une fonction bornée, et $\lambda V_\lambda f \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} f$ p.p. ,

b) il existe une suite (a_n) d'éléments de $\underline{\underline{C}}$ qui converge vers 1 en croissant,

c) la tribu $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{C}})$ engendrée par $\underline{\underline{C}}$ est égale à $\underline{\underline{B}}$ [il suffit même que $\underline{\underline{B}}$ soit contenue dans la complétion universelle de $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{C}})$, mais on n'insistera pas sur ce point].

Si le noyau potentiel V est borné, on peut prendre pour $\underline{\underline{C}}$ l'espace $\underline{\underline{S}}_b - \underline{\underline{S}}_b$.

DÉFINITION.- Soit D un opérateur défini sur $\underline{\underline{S}}$, à valeurs dans l'ensemble des fonctions $\underline{\underline{B}}$-mesurables positives finies ou non (D n'est pas supposé linéaire, pas même positivement homogène). On dit que D est <u>presque dérivant</u> si

1) $D(u + v) \geq Du$ $\qquad (u , v \in \underline{\underline{S}})$

2) $u \leq v$, $u(x) = v(x) \Rightarrow Du(x) \geq Dv(x)$ $\qquad (u , v \in \underline{\underline{S}})$.

On dit que D est <u>dérivant</u> si de plus

3) $h \in \underline{\underline{C}}^+ \Rightarrow DVh = h$ p.p.

4) si $h \in \underline{\underline{C}}^+$, $u \in \underline{\underline{S}} \Rightarrow D(u + Vh) > Du$ p.p. dans l'ensemble $\{Du < \infty , h > 0\}$.

Nous verrons plus loin que 4) est en fait une conséquence des trois autres. Nous abrégerons les mots "opérateur presque dérivant, dérivant" en o.p.d., o.d. .
La terminologie de Mokobodzki est différente (opérateurs <u>presque positifs</u> pour les opérateurs satisfaisant à 2)).

Voici des exemples fondamentaux de tels opérateurs : posons $D_\lambda = \lambda(I - \lambda V_\lambda)$. Alors $\bar{D} = \limsup_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ et $\underline{D} = \liminf_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ sont des o.d. (sous les hypothèses

précédentes d'existence de $\underline{\underline{C}}$) et $D^* = \sup_\lambda D_\lambda$ est un o.p.d. . Signalons tout de suite que l'on peut obtenir des résultats sur $\bar{D}$ et $\underline{D}$, sans aucune hypothèse quant à $\underline{\underline{C}}$, en travaillant sur la résolvante $(V_{\lambda+\mu})_{\lambda>0}$, μ fixe > 0 , et en faisant ensuite tendre μ vers 0 .

Si la résolvante est de la forme $V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t dt$, où (P_t) est un semi-groupe, on obtient d'autres exemples en remplaçant D_λ par $\frac{1}{t}(I - P_t)$.

Les résultats fondamentaux : énoncés

On expliquera plus loin pourquoi le numérotage des énoncés commence à 2 . Dans les théorèmes 2, 3, 4, D est dérivant.

THÉORÈME 2.- Si u est surmédiane finie, on a $VDu \ll u$.

THÉORÈME 3.- Si h est positive, et Vh finie, alors $DVh = h$ p.p. .

COROLLAIRE.- Si $V|\varphi|$ est finie, $\lambda V_\lambda \varphi \to \varphi$ p.p. .

Noter que c'est un "théorème ergodique local" au sens abélien, dont les hypothèses sont différentes des hypothèses usuelles : il n'y a pas de mesure privilégiée sur E .

COROLLAIRE.- Si f et g sont positives, Vf et Vg finies, alors
$(f \leq g \text{ p.p.}) \Leftrightarrow (Vf \ll Vg)$.

Voici le théorème de dérivation de Lebesgue, au moins pour les fonctions surmédianes finies. Pour s'en rendre compte, prendre $D = \underline{D}$.

THÉORÈME 4.- Si u est surmédiane finie, on a $Du = \bar{D}u$ p.p. .

Ce théorème donne aussi la décomposition de Lebesgue : posons $VDu = u'$ et $u - VDu = u''$. Alors u'' est excessive (th. 2) ; $Du'' = 0$ p.p., et tout potentiel $Vh \ll u$ est tel que $Vh \ll u'$. Ainsi u' est "absolument continue" et u'' "singulière" .

On suppose maintenant que D est presque dérivant. Le théorème suivant correspond au lemme maximal de Hardy-Littlewood, mais il a un champ d'appli-

cation bien plus vaste. Dans la théorie de la dérivation classique, il sert à démontrer le th. de Lebesgue. Ici, il est assez curieux qu'on ne sache le démontrer qu'après les autres théorèmes.

THÉORÈME 5.- Supposons que $V1$ soit finie, et que D soit un opérateur presque dérivant tel que $DV\lambda \leq \lambda$ p.p. pour $\lambda \in R_+$. On a alors pour $u \in \underline{\underline{S}}$

$$u \geq \lambda . VI_{\{Du \geq \lambda\}} .$$

L'opérateur D^* satisfait aux hypothèses ci-dessus, et l'inégalité est vraie pour D^* même si $V1$ n'est pas finie.

La méthode de démonstration des quatre théorèmes repose entièrement sur l'emploi des réduites, dont l'existence et les propriétés essentielles sont données dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME 1.- Soit u une fonction mesurable positive. Il existe une plus petite fonction surmédiane majorant u . On l'appelle la réduite au-dessus de u , et on la note Ru .

Si $u = v - w$ $(v \in \underline{\underline{S}}$, $w \in \underline{\underline{S}})$, on a $Ru \ll v$.

Si de plus $v = Vh$ $(h \geq 0)$ et $A = \{u = Ru\}$, alors $Ru \ll V(hI_A)$.

Remarque.- Soit D un opérateur satisfaisant à 1 , 2 , 3 ; l'opérateur $D' = tD + (1 - t)\bar{D}$ satisfait à 1 , 2 , 3 et 4 pour tout $t \in]0,1[$, donc $D'u = \bar{D}u$ p.p. si $u \in \underline{\underline{S}}$, d'où le même résultat pour D lui-même (en particulier, D satisfait à 4).

Le théorème 1 est vraiment le résumé de toute la théorie du potentiel par rapport à une résolvante. On ne va pas le démontrer ici, mais plutôt en déduire les autres théorèmes. Il s'établit à partir d'un énoncé analogue de théorie du potentiel discrète, par un "passage du discret au continu". Voir l'article [1] de Mokobodzki (particulièrement, la prop. 12, p. 184 pour la dernière assertion de l'énoncé, et les pages 178-182 pour la première (1)).

---

(1) Pour la seconde assertion, toutefois, Mokobodzki ne traite que le cas où V est borné et $h = 1$. On peut toujours se ramener au cas borné en considérant un noyau $V'f = V(af)$, où a est partout > 0 .

Démonstration du théorème 2

La notation $\underline{\underline{C}}$ est là pour suggérer un espace de fonctions continues bornées. Aussi dirons-nous qu'une fonction k, positive bornée, est "s.c.s." s'il existe des $k_n \in \underline{\underline{C}}^+$ tels que $k = \inf_n k_n$.

Lemme 1.- Pour toute fonction positive mesurable g et toute mesure positive bornée μ, $\mu(g) = \sup \mu(k)$, k s.c.s. $\leq g$.

Raisonnement par classes monotones. On utilise ici le fait que $\underline{\underline{B}}$ est la tribu engendrée par $\underline{\underline{C}}$.

Lemme 2.- Si k est positive s.c.s., alors $DVk \leq k$ p.p.

On prend des $k_n \in \underline{\underline{C}}^+$ qui décroissent vers k. Alors $DVk_n = k_n$ p.p. (propriété 3). D'autre part, $Vk \ll Vk_n$, donc $DVk \leq DVk_n$ (propriété 1). Ainsi $DVk \leq k_n$ p.p. pour tout n.

L'énoncé suivant est une forme du principe du maximum et de sa réciproque : cette forme n'est pas tout à fait classique, elle est par ex. établie dans Meyer [2]. L'assertion relative à f s.c.s. résulte du lemme 1 ci-dessus.

Lemme 3.- Si a est surmédiane, f positive, alors ($a \geq Vf$ sur $\{f > 0\}$) $\Rightarrow$ ($a > Vf$ partout). Inversement, si $a \geq 0$ a cette propriété (même seulement pour f s.c.s) alors a est surmédiane.

Démonstration principale.- Nous partons de $u \in \underline{\underline{S}}$, et nous voulons montrer que $u - VDu \in \underline{\underline{S}}$. Nous allons montrer

si k est s.c.s., $0 \leq k \leq Du$, alors $Vk \ll u$.

Cela suffira : cela entraînera d'abord $VDu \leq u$ (lemme 1). Puis il s'agit de voir si $(I - \lambda V_\lambda)(u - VDu) \geq 0$. Choisissons des k_n s.c.s., croissant avec n, tels que $0 \leq k_n \leq Du$, tels qu'à un x fixé on ait $Vk_n \uparrow VDu$ et $V_\lambda Vk_n \uparrow V_\lambda VDu$. Nous avons d'après la phrase soulignée $(I - \lambda V_\lambda)(u - Vk_n) \geq 0$, et au point x $(I - \lambda V_\lambda)(u - VDu) \geq 0$.

La phrase soulignée, à son tour, s'énonce ainsi (lemme 3). Si h est s.c.s. positive, et $u - Vk \geq Vh$ sur $\{h > 0\}$, alors $u - Vk \geq Vh$.

Supposons le contraire. Choisissons une fonction a partout > 0, somme d'une série (a_n) d'éléments de $\underline{\underline{C}}^+$, et telle que Va soit bornée. Comme $u - Vk \not\geq Vh$, nous pouvons choisir $\lambda > 0$ assez petit pour que $u - Vk + \lambda Va \not\geq Vh$. Posons alors $t = V(h + k) - (u + \lambda Va)$. Comme t prend des valeurs, nous avons $Rt \neq 0$. Soit $A = \{t = Rt\}$; nous avons $Rt \ll V((h + k)I_A)$, donc A n'est pas négligeable. D'autre part, nous avons $u - Vk \geq Vh$ sur $\{h > 0\}$ par hypothèse, donc (Va étant p.p. > 0) $t < 0$ sur $\{h > 0\}$, et $A \subset \{h \leq 0\}$ p.p. . Nous allons montrer que $Du < h + k$ p.p. sur A, et comme $k \leq Du$, $h \leq 0$ p.p. sur A, il en résultera que notre supposition était stupide.

Nous avons $u + \lambda Va + t = V(h + k)$ partout, donc $u + \lambda Va + Rt \geq V(h + k)$ partout, avec égalité sur A. D'après les propriétés 1 et 2 des o.p.d., on a alors $D(u + \lambda Va) \leq D(u + \lambda Va + Rt) \leq DV(h + k)$ sur A. D'après le lemme 2, on a $DV(h + k) \leq h + k$ p.p., et cette fonction étant finie, la propriété 1 entraîne que Du est finie p.p. sur A. Mais alors $D(u + \lambda Va) > Du$ p.p. sur A, d'après la propriété 4 appliquée à chacun des $a_n \in \underline{\underline{C}}^+$. Finalement, on a bien $Du < h + k$ p.p. sur A (c.q.f.d.).

Démonstration du théorème 3

1. Soit $h_n = h_n \wedge na_n$, et supposons le théorème établi pour h_n. Alors $DVh \geq DVh_n$ (propriété 1), qui vaut h_n p.p. d'après notre supposition. Donc $DVh \geq h$ p.p. et $VDVh \gg Vh$. D'autre part $VDVh \ll Vh$ (th. 2), donc $VDVh = Vh$, et la fonction positive $DVh - h$ (dont le potention est fini puisque Vh est finie par hypothèse) a un potentiel nul : donc $DVh = h$ p.p. et le théorème est aussi vrai pour h.

2. On se trouve donc ramené au cas où h est majorée par na_n. Il suffit de montrer que $VDVh = Vh$, pour la raison suivante. Considérons l'ensemble des h positives telles que $DV(h \wedge na_n) = h \wedge na_n$ p.p.. Il contient $\underline{\underline{C}}^+$ d'après la propriété 3, et le fait que $\underline{\underline{C}}$ est $\wedge$-stable. La limite d'une suite croissante

d'éléments de cet ensemble lui appartient encore (même raisonnement qu'en 1. ci-dessus). Si des h_n de cet ensemble décroissent vers h, alors $DV(h\wedge na_n) \leq DV(h_n\wedge na_n) = h_n\wedge na_n$ p.p., et la relation $VDV(h_n\wedge na_n) = V(h_n\wedge na_n)$ entraîne l'égalité comme ci-dessus. Par classes monotones, $\underline{\underline{C}}$ engendrant la tribu $\underline{\underline{B}}$, on a l'égalité pour $h\wedge na_n$ pour toute h positive, et le th. est vrai pour les fonctions comprises entre 0 et na_n.

3. Soit donc h comprise entre 0 et na_n. Comme nous savons que $VDVh \leq Vh$ (th. 2), il suffit de montrer que $VDVh \geq Vh$. Introduisons sans définition formelle les fonctions s.c.i., qui satisfont à des lemmes analogues aux lemmes 1 et 2. Tout revient à montrer que si f est s.c.i. bornée, $f \geq DVh$, alors $Vf \geq Vh$. Supposons le contraire, reprenons la fonction a partout > 0 de la démonstration du th. 2, et choisissons $\lambda > 0$ tel que $V(h - f - \lambda a) \nleq 0$. Notons t cette fonction, A l'ensemble $\{t = Rt\}$. Rt n'est pas nulle, et comme $Rt \ll V(hI_A)$ A n'est pas négligeable. Mais $Vh = V(f + \lambda a) + t$, donc $Vh \leq V(f + \lambda a) + Rt$ avec égalité sur A, donc $DVh \geq DV(f + \lambda a)$ sur A. Comme $VDVh \leq Vh$, DVh est finie p.p., donc DVf finie p.p. sur A, et la propriété 4 entraîne que $DVh > DVf$ p.p. sur A. Mais le lemme 2 (retourné, f étant s.c.i.) nous dit que $DVf \geq f$ p.p., donc $DVh > f$ p.p. sur A, qui est absurde.

Les corollaires sont faciles : pour le premier, appliquer le résultat précédent aux opérateurs $\bar{D}$ et $\underline{D}$.

Démonstration du théorème 4

D'après le th. 2, nous avons $V\bar{D}u \ll u$, donc $\bar{D}u$ est finie p.p.. Posons $u' = V\bar{D}u$, $u'' = u - V\bar{D}u$. Si $h \geq 0$ est telle que $Vh \ll u$, nous avons $\bar{D}Vh \leq \bar{D}u$ (pr. 1), donc $V\bar{D}Vh \ll V\bar{D}u$, donc (comme $\bar{D}Vh = Vh$: th. 3) $Vh \ll u'$. D'après le th. 2, on a $VDu \ll u$, donc $VDu \ll u' = V\bar{D}u$, et $Du \leq \bar{D}u$ p.p. (Corol. 2). L'égalité s'obtient en échangeant les deux opérateurs.

Pour obtenir la décomposition de Lebesgue, nous remarquons que u'' est surmédiane (th. 2). Nous avons $\underline{D}u' + \bar{D}u'' \leq \bar{D}u$, donc $V(\underline{D}u' + \bar{D}u'') \ll V\bar{D}u \ll u$,

donc $V(\underline{D}u' + \bar{D}'') \ll u' = V\underline{D}u'$. Donc $V\bar{D}u'' = 0$ et $Du'' = 0$ p.p. .

Démonstration du théorème 5

Lemme.- Soit D un o.p.d., et soient u une fonction surmédiane, h une fonction positive. Si l'on a p.p. $Du > DVh$ sur $\{Vh \geq u\}$, on a $u \geq Vh$.

En effet, supposons le contraire. Posons $t = Vh - u$, $A = \{t = Rt\}$; on a $Rt \neq 0$, $Rt \ll V(hI_A)$, donc A n'est pas négligeable. On a $u + t = Vh$, donc $u + Rt \geq Vh$ avec égalité sur A , et $Du \leq D(u + Rt) \leq DVh$ sur A . Cela contredit l'hypothèse que $Du > DVh$ p.p. sur $\{t \geq 0\}$.

Démontrons alors le théorème. Quitte à remplacer D par $\sup(D,\bar{D})$, qui est encore un o.p.d., nous pouvons supposer que pour toute $f \geq 0$ bornée on a $DVf \geq f$ p.p.. Soit $h = \lambda.I_{\{Du < \lambda\}}$. Alors $D(u + Vh) \geq \sup(Du,DVh)$; comme $DVh \geq h$ p.p., on a $D(u + Vh) \geq \lambda$ p.p. . Soit $\lambda' < \lambda$, on a par hypothèse $\lambda' \geq DV\lambda'$, et l'inégalité s'écrit $D(u + Vh) > DV\lambda'$ p.p., d'où l'on tire $u + Vh \geq V\lambda'$ p.p., et $u + Vh \geq V\lambda$ p.p.. Compte tenu de la définition de h , cela s'écrit $u \geq \lambda V(I_{\{Du \geq \lambda\}})$.

Supposons $V1$ finie ; on a $p(I - pV_p)V\lambda = pV_p\lambda \leq \lambda$, donc $D^* = \sup_p p(I - pV_p)$ satisfait à l'hypothèse précédente.

Lorsque $V1$ n'est pas finie, on peut encore appliquer le résultat précédent à la résolvante $(V_{\mu+\lambda})$, où $\mu > 0$ est fixé. L'opérateur D^*_μ correspondant est $\sup_p p(I - pV_{\mu+p})$, qui est plus grand que le précédent. Nous avons donc, u étant aussi μ-surmédiane

$$\lambda V_\mu(I_{\{D^*u \geq \lambda\}}) \leq \lambda V_\mu(I_{\{D^*_\mu u \geq \lambda\}}) \leq u$$

après quoi on fait tendre μ vers 0 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. MOKOBODZKI - Densité relative de deux potentiels comparables ; Quelques propriétés remarquables des opérateurs presque positifs. Séminaire de Probabilités de Strasbourg IV (1969), Lecture Notes in Math., vol. 124, Springer-Verlag, 1970.

[2] P. A. MEYER - Deux petits résultats de théorie du potentiel, Séminaire de Probabilités de Strasbourg V (1970), Lecture Notes in Math., vol. 191, Springer-Verlag, 1971.