CLAUDE CHEVALLEY

Théorie des blocs

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 419, p. 34-49

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__34_0>

THÉORIE DES BLOCS

par Claude CHEVALLEY

Références

La théorie des représentations d'un groupe fini G sur un corps K de caractéristique p a été fondée par R. Brauer, qui lui a consacré, ainsi qu'à ses applications, une longue série de mémoires, dans lesquels il se limite généralement au cas des K-représentations simples de G sont absolument simples. On trouvera un exposé des théorèmes principaux - exclusion faite de ceux qui se rapportent à la théorie des blocs - dans Serre [10]. Pour la théorie des blocs, on pourra se reporter à l'exposé de R. Brauer dans [1], ou au livre de Curtis-Reiner [4]. La définition des groupes de défaut que nous donnons ici n'est pas celle initialement présentée par Brauer ; elle est due à Rosenberg [9]. De nombreux résultats de la théorie générale sont dus à J. A. Green (cf. [5], [6], [7], [8]). La définition des groupes de défaut galoisiens, ainsi qu'un certain nombre de résultats cités dans cet exposé, sont dus à M. Broué [3].

1. Définition

On sait le parti que l'on tire dans l'étude d'un groupe fini G de l'étude des représentations de G , c'est-à-dire des homomorphismes de G dans les groupes linéaires $GL(V)$ (V étant un espace vectoriel, $GL(V)$ désigne le groupe de tous les automorphismes de V). La donnée d'une représentation de G (par des automorphismes d'un espace vectoriel sur un corps K) équivaut à celle d'une représentation de l'algèbre de groupe $K[G]$ (qui se compose des combinaisons linéaires formelles des éléments de G à coefficients dans K). Si K est de caractéristique 0 , ou plus généralement si sa caractéristique ne divise pas l'ordre de G , l'algèbre $K[G]$ est semi-simple ; c'est-à-dire que les $K[G]$-modules se décomposent en somme directe de $K[G]$-modules simples (un $K[G]$-module simple étant un module $\neq \{0\}$ qui n'admet que les sous-modules évidents) ; et la théorie des représentations des algèbres semi-simples est bien connue : l'algèbre elle-même est somme directe d'idéaux à gauche simples, et ceux-ci fournissent des modèles de tous les modules simples ; de plus, l'élément unité est somme d'idempotents centraux mutuellement orthogonaux primitifs $e_1, \ldots, e_n$ (i.e. qui sont $\neq 0$ mais qui ne se laissent plus décomposer de manière non triviale en sommes d'idempotents centraux), et ces idempotents centraux correspondent bi-univoquement aux classes de modules simples. Pour chaque module simple V , il existe un indice i et un seul, soit $i(V)$, tel que $e_{i(V)} V \neq \{0\}$, et, pour que deux modules simples V , V' soient isomorphes, il faut et suffit que $i(V) = i(V')$.

Par contre, si K est de caractéristique $p > 0$ et si p divise l'ordre de G , $K[G]$ n'est jamais semi-simple. Cette algèbre admet un radical $R \neq \{0\}$ (R est l'ensemble des éléments qui sont annulés dans toute représentation simple) ; l'algèbre $K[G]/R$ est semi-simple ; les $K[G]$-modules simples sont isomorphes aux idéaux à gauche minimaux de $K[G]/R$; les classes de $K[G]$-modules simples correspondent donc bi-univoquement aux idempotents primitifs du centre de $K[G]/R$. Malheureusement, la détermination de R est en général un problème difficile ; cet idéal n'est lié d'aucune manière simple connue aux propriétés du groupe G , de sorte que la détermination des classes de représentations simples de G sur un corps de caractéristique p est un problème pour la solution duquel on ne dispose d'aucune méthode générale.

La détermination du centre Z de $K[G]$ est par contre facile : si on associe à chaque classe C d'éléments conjugués la somme z_C des éléments de C dans $K[G]$, on obtient une base de Z . Mais l'image de Z dans $K[G]/R$, qui est naturellement contenue dans le centre Z' de cette algèbre, est en général une sous-algèbre propre de Z' ; les idempotents primitifs de $Z/(R \cap Z)$ (qui sont simplement les images des idempotents primitifs de Z) ne sont en général plus primitifs dans Z' .

Néanmoins, ils se décomposent en sommes d'idempotents primitifs de Z' ; à chacun d'eux se trouve donc associé non pas une classe de représentations simples équivalentes de G mais un ensemble fini (non vide) de telles classes. Les idempotents primitifs de Z sont appelés les <u>blocs</u> de $K[G]$; si b est l'un de ces blocs, on dit qu'un $K[G]$-module V " appartient " au bloc b si $bx = x$ pour tout $x \in V$ (dans le cas où V est simple, cette condition équivaut à $bV \neq \{0\}$).

La considération des blocs fait donc apparaître certaines liaisons entre les diverses classes de $K[G]$-modules simples, en contraste avec ce qui se passe dans le cas de la caractéristique 0, où les diverses représentations simples se comportent de manière complètement indépendante les unes des autres (indépendance qui s'exprime par exemple par les relations d'orthogonalité entre les coefficients des représentations matricielles, ou par le fait que l'algèbre du groupe est somme directe d'idéaux à gauche simples).

2. Blocs et modules projectifs

Soit e un idempotent primitif de $K[G]$; $K[G]e$ est alors un $K[G]$-module projectif (car le module libre $K[G]$ est somme directe de $K[G]e$ et de $K[G](1 - e)$), et il est indécomposable (i.e. il est $\neq \{0\}$ et ne se laisse décomposer que d'une manière triviale en somme directe de deux sous-modules). Réciproquement, tout $K[G]$-module projectif indécomposable est isomorphe à l'un des $K[G]e$. Si $K[G]$ était semi-simple, $K[G]e$ serait simple ; dans le cas général, il n'en est plus ainsi, mais, si R est le radical de $K[G]$, $M_e = K[G]e/Re$ est simple, et tout $K[G]$-module simple peut s'obtenir de cette manière. Le module $K[G]e$ peut d'ailleurs se reconstruire à partir de M_e : c'est son enveloppe projective P_e caractérisée par le fait qu'elle admet un homomorphisme surjectif φ sur M_e tel que tout sous-module propre de P_e soit contenu dans Ker φ . Le module P_e admet une suite de Jordan-Hölder $P_e^{(0)} = P_e \supset P_e^{(1)} \supset \ldots \supset P_e^{(m)} = \{0\}$ (les $P_e^{(k)}$ sont des sous-modules de P_e et les $P_e^{(k-1)}/P_e^{(k)}$ sont simples). Nous dirons qu'un module simple M <u>intervient</u> dans P_e si l'un des $P_e^{(k-1)}/P_e^{(k)}$ est isomorphe à M .

Voici maintenant la relation de ce qui précède à la théorie des blocs. A chaque idempotent primitif e de $K[G]$ correspond un bloc b , caractérisé par la condition que $eb \neq 0$; ce qui équivaut à dire que M_e appartient à b . La relation " M_e et $M_{e'}$ appartiennent au même bloc " est alors la relation d'équivalence engendrée par la relation : " il existe au moins un module simple qui intervient à la fois dans P_e et $P_{e'}$ ".

3. Blocs et représentations en caractéristique 0

Il est facile de voir que pour étudier les représentations d'un groupe fini G sur des corps K de caractéristique $p > 0$, il suffit de considérer le cas où K est fini. On peut alors remonter de K à un corps L de caractéristique 0 ; il existe un corps L et un sous-anneau $\underline{\mathfrak{o}}$ de L qui possèdent les propriétés suivantes : $\underline{\mathfrak{o}}$ est l'anneau d'une valuation discrète v de L (i.e. v est une fonction $L \to R_+$ telle que $v(xy) = v(x)v(y)$, $v(x+y) \leq \mathrm{Sup}(v(x), v(y))$ et le groupe des valeurs prises par v sur L^* est un groupe cyclique infini ; $\underline{\mathfrak{o}}$ est l'anneau des x tels que $v(x) \leq 1$) ; si $\mathfrak{p}$ est l'idéal de v (i.e. l'ensemble des x tels que $v(x) < 1$), $\underline{\mathfrak{o}}/\mathfrak{p}$ est un corps isomorphe à K ; de plus, L est complet (i.e. muni de la distance $(x,y) \to v(x-y)$, c'est un espace métrique complet). On a alors un homomorphisme évident : $\underline{\mathfrak{o}}[G] \to K[G]$; les blocs de $K[G]$ peuvent se remonter en idempotents centraux de $\underline{\mathfrak{o}}[G]$, donc de $L[G]$. Or, à chaque idempotent central $\tilde{b}$ de $L[G]$ se trouve associé un ensemble de classes de $L[G]$-modules simples, à savoir celui des classes de modules simples V tels que $\tilde{b}.V \neq \{0\}$. On obtient ainsi une répartition dans les divers blocs des représentations simples de G sur le corps L de caractéristique 0 .

Les idempotents centraux $\tilde{b}$ que l'on obtient en remontant les blocs de $K[G]$ sont les idempotents primitifs de $\mathfrak{o}[G]$; leurs sommes fournissent tous les idempotents de $L[G]$ qui appartiennent à $\mathfrak{o}[G]$.

Nous allons maintenant dire à quelle condition deux $L[G]$-modules simples appartiennent au même bloc. Il nous faut pour cela parler de la descente (ou réduction modulo $\mathfrak{p}$) des $L[G]$-modules simples. Soit V l'un deux ; il est facile de voir qu'il existe toujours un $\mathfrak{o}[G]$-module $V_{\mathfrak{o}}$ tel que $V \simeq L \otimes_{\mathfrak{o}} V_{\mathfrak{o}}$; la connaissance de $V_{\mathfrak{o}}$ permet naturellement de construire un $K[G]$-module $K \otimes_{\mathfrak{o}} V_{\mathfrak{o}}$. Les divers $K[G]$-modules qu'on obtient ainsi à partir de V (relativement aux divers choix possibles de $V_{\mathfrak{o}}$) ne sont en général pas isomorphes ; mais ils fournissent le même élément du groupe de Grothendieck, ce qui signifie que, si $K \otimes V_{\mathfrak{o}}$, $K \otimes V'_{\mathfrak{o}}$ sont deux d'entre eux, pour tout $K[G]$-module simple W , le nombre des quotients d'une suite de Jordan-Hölder de $K \otimes V_{\mathfrak{o}}$ qui sont isomorphes à W est égal au nombre analogue pour $K \otimes V'_{\mathfrak{o}}$; si ce nombre est $\neq 0$, nous dirons pour abréger que le $K[G]$-module simple W " intervient " dans V .

Ceci dit, la relation " V et W appartiennent au même bloc " entre $L[G]$-modules simples V et W est la relation d'équivalence engendrée par la relation suivante : " il existe au moins un $K[G]$-module simple qui intervient à la fois dans V et W ".

On peut exprimer autrement la condition pour que V et V' appartiennent à un même bloc. Nous supposerons pour simplifier que L est assez grand pour que toutes les représentations simples de $L[G]$ soient absolument simples (i.e. restent simples quand on fait une extension quelconque du corps de base) ; on dit alors que L est neutralisant pour G ; il suffit pour cela que L contienne des racines primitives n-ièmes de l'unité, n étant le P.P.C.M. des ordres des éléments de G. Soit $Z_{\underline{\mathfrak{o}}}$ le centre de $\underline{\mathfrak{o}}[G]$; si V est un $L[G]$-module simple, et $z \in Z_{\underline{\mathfrak{o}}}$, l'opération de z dans V est une homothétie de rapport $\lambda_V(z) \in \underline{\mathfrak{o}}$, et λ_V est un homomorphisme de $Z_{\underline{\mathfrak{o}}}$ dans $\underline{\mathfrak{o}}$. Comme on a un homomorphisme canonique $\underline{\mathfrak{o}} \to \underline{\mathfrak{o}}/\mathfrak{p} = K$, on déduit de λ_V un homomorphisme $\bar{\lambda}_V : Z_{\underline{\mathfrak{o}}} \to K$. Ceci étant, pour que deux $L[G]$-modules V et V' appartiennent à un même bloc, il faut et suffit que $\bar{\lambda}_V = \bar{\lambda}_{V'}$. Ce critère se prête facilement au calcul dès qu'on connait les $L[G]$-modules simples, ou même seulement les caractères (ceux-ci permettent en effet évidemment de calculer les fonctions λ_V).

4. Groupes de défaut d'un bloc

Nous allons maintenant associer à tout bloc b de $K[G]$ (K étant comme ci-dessus un corps dont la caractéristique p divise l'ordre de G) une classe de p-sous-groupes conjugués de G.

Le groupe G opère comme groupe d'automorphismes de $K[G]$ (à tout élément $s \in G$ étant associé l'automorphisme de $K[G]$ qui "prolonge" l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(s)$). Les éléments du centre de $K[G]$ sont évidemment ceux qui sont invariants par G.

Soit d'une manière générale A un groupe additif sur lequel opère G ; il y a une manière évidente de construire des éléments de A invariants par G, qui est de former $\sum_{s \in G} s.a$, où a est un élément quelconque de G. Mais on n'obtient naturellement pas ainsi tous les invariants. On peut généraliser le procédé : si H est un sous-groupe de G et si a est un élément H-invariant, l'élément $\sum_{s \bmod H} s.a$ est G-invariant (cet élément est $\sum_{s \in R} s.a$, où R est un système de représentants des classes de G suivant H ; la somme ne dépend évidemment pas du choix de R). Les éléments $\sum_{s \bmod H} s.a$, pour tous les éléments H-invariants a , forment un sous-groupe A_H de A , évidemment d'autant plus grand que H est plus grand ; de plus, A_H ne dépend évidemment que de la classe de conjugaison de H .

Supposons maintenant que A soit muni d'une structure d'algèbre de dimension finie sur K , G opérant comme groupe d'automorphismes de cette algèbre. On montre alors que, pour tout idempotent primitif e de l'algèbre des éléments G-invariants de A , les groupes H tels que $e \in A_H$ sont tous ceux qui contiennent des conjugué de l'un d'entre eux, soit H_o ; la classe de conjugaison de H_o est bien déterminée par cette condition ; les groupes de cette classe sont appelés les <u>groupes de défaut de</u> e (relativement à l'opération de G dans A). La démonstration se fonde sur les faits suivants :

1) si $x \in A_H$, $x' \in A_{H'}$, xx' appartient à $\sum_{s \in G} A_{sHs^{-1} \cap H'}$;

2) A_H est un idéal bilatère de l'algèbre des éléments G-invariants de A ;

3) si un idempotent primitif d'une algèbre B de dimension finie sur K appartient à la somme de deux idéaux bilatères de B , il appartient déjà à l'un de ces idéaux. De plus, on voit tout de suite que les groupes de défaut de e sont des p-groupes.

Appliquant ceci au cas où $A = K[G]$, on obtient la notion de <u>groupe de défaut d'un bloc</u> b ; l'ordre commun des groupes de défaut d'un bloc s'appelle le <u>défaut du bloc</u> ; l'indice d'un groupe de défaut dans un p-groupe de Sylow de G qui le contient s'appelle le <u>codéfaut</u> du bloc.

Les groupes de défaut d'un bloc ne sont pas des p-sous-groupes quelconques de G ; si D est l'un d'eux, D est intersection de deux p-groupes de Sylow de G ; D est un groupe de Sylow du centralisateur d'un élément p-régulier (i.e. d'ordre premier à p) de G, et son normalisateur n'admet aucun p-sous-groupe distingué contenant D et $\neq D$. On ne connait pas de caractérisation des groupes de défaut des blocs.

A tout bloc b, nous avons associé un idempotent primitif $\tilde{b}$ de $\mathfrak{o}[G]$. Tout ce que nous venons de dire peut se répéter en remplaçant la considération de b par celle de $\tilde{b}$ et celle de $K[G]$ par celle de $\mathfrak{o}[G]$.

Il y a une autre espèce de groupes de défaut qu'on peut associer à b (ou à $\tilde{b}$), dont la définition a été donnée par M. Broué. Soit L' une extension de L obtenue par adjonction d'une racine primitive n-ième de l'unité ζ, n étant le P.P.C.M. des ordres des éléments de G. Le groupe de Galois Γ de L'/L opère alors comme groupe de permutations sur G : si $\sigma \in \Gamma$, σ change ζ en ζ^r, où $r \in \mathbb{Z}$, et on pose $\sigma.s = s^r$ pour $r \in G$ (c'est l'opération qui intervient dans la démonstration du théorème de Brauer-Tate sur un corps quelconque). On en déduit une opération de Γ comme groupe de transformations linéaires de $\mathfrak{o}[G]$; ces transformations ne sont pas en général des automorphismes d'algèbre, mais on montre qu'elles sont compatibles avec la multiplication dans le centre $Z_{\mathfrak{o}}$ de $\mathfrak{o}[G]$. On peut donc associer à l'idempotent primitif $\tilde{b}$ de $Z_{\mathfrak{o}}$ un groupe de défaut D qui est un p-sous-groupe de Γ (on notera que Γ est abélien) ; D s'appelle le <u>groupe de défaut galoisien de</u> $\tilde{b}$ (ou de b) ; son ordre s'appelle le <u>défaut galoisien</u>, et son indice dans le p-groupe de Sylow de Γ le <u>codéfaut galoisien</u>.

5. Groupes de défaut et H-projectivité

On rappelle qu'un module sur un anneau est dit projectif quand il est isomorphe à un facteur direct d'un module libre. Quand l'anneau est une algèbre semi-simple de dimension finie sur un corps, les modules sont tous projectifs. Il n'en est plus ainsi pour l'anneau $K[G]$ (où K est, comme précédemment, un corps dont la caractéristique divise l'ordre de G). Dans ce cas, on peut associer à tout sous-groupe H de G une notion affaiblie de projectivité. Rappelons qu'un module M est projectif si et seulement si toute suite exacte de la forme $0 \to M_1 \to M_2 \to M \to 0$ est scindée (i.e. M_1 admet un supplémentaire dans M_2) ; on dit que M est H-projectif si toute suite exacte $0 \to M_1 \to M_2 \to M \to 0$ qui est scindée en tant que suite exacte de H-modules l'est également en tant que suite exacte de G-modules. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit (théorème de Higman) que l'application identique de M puisse se mettre sous la forme $\sum\limits_{s \bmod H} s.u_s$ où les u_s sont des endomorphismes de la structure de H-module de M .

Soit M un $K[G]$-module indécomposable (i.e. qui ne se laisse décomposer que d'une manière triviale en somme directe). Alors, il existe un sous-groupe H_o de G tel que les sous-groupes H pour lesquels M est H-projectif soient exactement ceux qui contiennent des conjugués de H_o ; ces conditions déterminent H_o à conjugaison près. Les groupes conjugués à H_o sont appelés par Green les "vertex" de M ; je propose de les appeler ses vortex ; ce sont des p-sous-groupes de G .

On notera l'analogue de cette définition avec celle des groupes de défaut. Les deux cas ont été réunis par Green dans une axiomatique qui comprend également la théorie des représentations induites et de l'inflation en cohomologie.

Il résulte immédiatement du théorème de Higman que, si un bloc b admet le groupe de défaut H , tous les $K[G]$-modules simples qui appartiennent à b

sont H-projectifs. Il n'est pas vrai cependant en général que leurs vortex soient les conjugués de H ; on peut seulement affirmer que l'un au moins des $K[G]$-modules simples qui appartiennent à b admet H comme vortex ; d'autres peuvent avoir des vortex contenus strictement dans H .

Ici encore, on peut remplacer la considération des $K[G]$-modules simples par celle des $\underline{\mathfrak{o}}[G]$-modules M tels que $L \otimes_{\underline{\mathfrak{o}}} M$ soit un $L[G]$-module simple.

La démonstration du fait qu'il existe au moins un $K[G]$-module simple appartenant à b qui admet les groupes de défaut de b comme vortex est assez longue. Elle est basée d'une part sur un théorème de Green, d'autre part sur une nouvelle définition des groupes de défaut de b .

a) Le théorème de Green est le suivant :

le degré de tout $K[G]$-module indécomposable M est divisible par l'indice d'un vortex de M dans un p-groupe de Sylow le contenant.

La démonstration dépend d'une étude approfondie de la construction des représentations de p-groupes.

Il résulte de là que le degré de tout $K[G]$-module simple appartenant à b est divisible par le codéfaut de b ; on voit d'ailleurs facilement que cela reste vrai si on remplace le degré par le degré absolu (le degré absolu d'un $K[G]$-module simple M étant le degré des modules en lesquels se décompose $\bar{K} \otimes_K M$, si $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K). Pour établir le résultat énoncé ci-dessus, il suffit donc de montrer que le P.G.C.D. des contributions de p aux degrés absolus des $K[G]$-modules simples appartenant à b divise le codéfaut de b .

b) La nouvelle définition que nous avons mentionnée des groupes de défaut est la suivante :

Pour toute classe C , soit z_C la somme des éléments de C dans $K[G]$;

les z_C forment donc une base du centre de $K[G]$. Appelons par ailleurs groupes de défaut de C les p-groupes de Sylow des centralisateurs des éléments de C . Ceci étant, soit $b = \Sigma_C a_C z_C$ l'expression de b comme combinaison linéaire des z_C ; on montre qu'il y a au moins une classe C telle que $a_C \neq 0$ et que bz_C ne soit pas nilpotent, et que toute classe C satisfaisant à ces conditions admet comme groupes de défaut les groupes de défaut de b .

La démonstration permet donc d'exprimer le codéfaut d'un bloc au moyen d'invariants numériques des modules simples appartenant au bloc. On peut aussi exprimer le codéfaut galoisien. Pour tout $L[G]$-module simple, soient δ_M la dimension de M comme espace vectoriel sur son corps gauche d'endomorphismes $\mathfrak{K}_M$, s_M^2 la dimension de $\mathfrak{K}_M$ sur son centre L_M et ν_M la dimension de L_M sur M (i.e. le nombre de modules simples mutuellement inéquivalents intervenant dans $\bar{L} \otimes_L M$, si $\bar{L}$ est une clôture algébrique de L). Le P.G.C.D. des δ_M pour les M appartenant à b est le même que le P.G.C.D. des degrés absolus des $K[G]$-modules simples appartenant à b ; la contribution de p à ce nombre est donc le codéfaut de b . Le codéfaut galoisien de b est égal à la contribution de p au P.G.C.D. des ν_M (pour les M appartenant à b) ; quant au P.G.C.D. des s_M , il est $\not\equiv 0 \pmod p$. Plus précisément, il y a un $L[G]$-module simple M_o appartenant à b tel que les contributions de p à $\delta(M_o)$, $s(M_o)$, $\nu(M_o)$ soient simultanément égales au codéfaut de b , à 1 et au codéfaut galoisien de b .

Le théorème de Green mentionné ci-dessus permet d'obtenir des résultats numériques sur les caractères : supposons qu'un $\mathfrak{o}[G]$-module M de type fini soit H-projectif, où H est un p-sous-groupe de G ; soit χ le caractère de $L \otimes_{\mathfrak{o}} M$; si s est un p-élément qui n'est conjugué à aucun élément de H , on a $\chi(s) = 0$; si s est un élément p-régulier et D un p-groupe de Sylow du centralisateur de s , $\chi(s)$ est multiple (dans l'anneau des entiers algébriques) du P.G.C.D. des nombres $|D:(D \cap tHt^{-1})|$ pour tous les $t \in G$. On retrouve comme cas particulier le fait que, si M est projectif, on a $\chi(s) = 0$ pour tout p-élément s .

La détermination des blocs

Alors que la détermination des $K[G]$-modules simples est en général un problème très difficile, R. Brauer a donné une méthode de détermination des blocs qui permet de se ramener à la détermination de certains caractères de sous-groupes de G (donc à des problèmes de caractéristique 0). Cette méthode consiste à se donner un p-sous-groupe H de G et à chercher les blocs admettant H comme groupe de défaut.

Première réduction. Soit N le normalisateur de H ; on se ramène d'abord à la détermination des blocs de N admettant H comme groupe de défaut. Désignons pour cela par Z_N la sous-algèbre de $K[G]$ formée des éléments qui commutent à ceux de N . Soit φ l'application de $K[G]$ dans $K[N]$ définie par $\varphi(s) = s$ si s centralise H , $\varphi(s) = 0$ dans le cas contraire ; on montre alors que φ induit un homomorphisme de Z_N dans le centre de $K[N]$ (il suffit d'ailleurs pour qu'il en soit ainsi que N soit un groupe contenu dans le normalisateur de H et contenant le centralisateur de H ; le fait que K soit de caractéristique p est ici essentiel). On montre que φ induit une bijection de l'ensemble des blocs de G admettant H comme groupe de défaut sur celui des blocs de N admettant H comme groupe de défaut.

Deuxième réduction. Supposons maintenant que H soit distingué dans G . Soit W le centralisateur de H . Alors, si f est un bloc de $K[W]$, la somme des transformés distincts de f par les opérations de G (qui opère de manière évidente dans $K[W]$) est un bloc de G , et tout bloc b de G peut s'obtenir de cette manière ; pour que b admette H comme groupe de défaut, il faut que f admette $H \cap W$ comme groupe de défaut ; cette condition n'est en général pas suffisante ; pour obtenir une condition nécessaire et suffisante, introduisons un sur-corps $\bar{K}$ de K qui soit neutralisant pour G et un homomorphisme ψ de centre Z_W de $K[W]$ dans $\bar{K}$ tel que $\psi(f) \neq 0$; on impose alors de plus la condition que le groupe d'isotropie de ψ dans G (qui opère sur $\mathrm{Hom}(Z_W, \bar{K})$) contienne HW comme sous-groupe d'indice $\not\equiv 0 \pmod p$.

Troisième réduction. Supposons maintenant que H soit dans le centre de G . On a un homomorphisme ψ de $K[G]$ dans $K[G/H]$; ψ induit une bijection de l'ensemble des blocs de G admettant H comme groupe de défaut sur l'ensemble des blocs de G/H admettant $\{1\}$ comme groupe de défaut.

Blocs de défaut un

Les réductions précédentes ont ramené le problème de la détermination des blocs d'un groupe G à celui de la détermination des blocs de défaut un de certains quotients H de sous-groupes de G . Or ce dernier problème peut se résoudre dès que l'on connait les caractères des représentations simples de H , au moins quand L est neutralisant. On a en effet le théorème suivant :

Soit b un bloc de G . Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

(i) b est de défaut un ;

(ii) il existe au moins un $L[G]$-module simple M appartenant à b, tel que la dimension de M comme espace vectoriel sur son corps d'endomorphismes soit divisible par la contribution de p à $|G|$ (cette dimension se réduit au degré de M quand L est neutralisant) ;

(iii) tous les $L[G]$-modules simples appartenant à b sont isomorphes ;

(iv) il y a au moins autant de types de $K[G]$-modules simples appartenant à b

que de types de $L[G]$-modules simples appartenant à b ;

(v) il existe un $L[G]$-module simple appartenant à b dont le caractère est combinaison linéaire à coefficients entiers des caractères des modules de la forme $L \otimes_{\mathfrak{o}} P$ où P est un $\mathfrak{o}[G]$-module projectif de type fini ;

(vi) il existe un $K[G]$-module simple appartenant à b qui est projectif.

Un résultat sur les nombres de blocs

Les résultats précédents montrent comment on peut déterminer les blocs de défaut un d'un groupe G. A l'autre extrême, la détermination des blocs dont le défaut est le plus grand possible se fait facilement au moyen du théorème suivant :

si L est neutralisant pour G, le nombre des blocs admettant un p-groupe de Sylow S de G comme groupe de défaut est égal au nombre des classes de conjugaison de G qui contiennent des éléments p-réguliers du centralisateur de S.

Les blocs de codéfaut p

Nous supposerons dans ce qui suit que L est un corps neutralisant pour G. R. Brauer a donné toute une série de résultats très précis sur les blocs de codéfaut p (cf. [2]). Parmi ceux-ci, nous nous contenterons de citer les suivants ; b désigne un bloc de défaut p.

Soit M un $\mathfrak{o}[G]$-module tel que $L \otimes_{\mathfrak{o}} M$ soit un $L[G]$-module simple appartenant à b ; soit $(V_o, \dots, V_n)$ une suite de Jordan-Hölder de $K \otimes_{\mathfrak{o}} M$; alors les V_{i-1}/V_i sont mutuellement non isomorphes.

Pour formuler les autres résultats, il nous faut d'abord définir la notion de caractères p-conjugués de G . Soit g l'ordre de G , et soit L_o le corps des nombres p-adiques ; nous pouvons supposer que L est le corps déduit de L_o par adjonction des racines primitives g-ièmes de l'unité ; soit L_1 la plus grande extension non ramifiée de L_o contenue dans L_1 ; deux $L[G]$-modules simples sont dits p-conjugués quand leurs caractères se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme de L/L_1 ; R. Brauer appelle "familles" les classes d'équivalence de caractères simples pour la relation de p-conjugaison. On dit bien entendu qu'un caractère appartient à un bloc b si c'est le caractère d'un $L[G]$-module simple appartenant à b . Les caractères d'une même famille appartiennent à un même bloc.

Supposant b de défaut p , si w est le nombre des familles de caractères appartenant à b , celui des types de $K[G]$-modules simples appartenant à b est $w - 1$.

A chaque bloc b on peut associer un graphe défini comme suit : ses sommets $P_1, \ldots, P_w$ sont les familles de caractères simples appartenant à b ; P_i et P_j sont joints par une arête s'il y a un $K[G]$-module simple qui intervient à la fois dans les $L[G]$-modules simples dont les caractères appartiennent l'un à la famille P_i et l'autre à la famille P_j . Ceci étant, si b est de défaut p , le graphe associé à b est un arbre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BRAUER - Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, Math. Zeit. 63 (1956), p. 406, et 72 (1959), p. 25.

[2] R. BRAUER - Investigations on group characters, Ann. of Math., 42 (1941), p. 936.

[3] M. BROUÉ - Groupes de défaut d'un bloc pour un corps quelconque, C. R. Acad. Sci., 1972.

[4] CURTIS-REINER - Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, New York.

[5] J. A. GREEN - On the indecomposable representations of a finite group, Math. Zeit. 70 (1959), p. 430.

[6] J. A. GREEN - Blocks of modular representations, Math. Zeit. 79 (1962), p. 100.

[7] J. A. GREEN - Some remarks on defect groups, Math. Zeit. 107 (1968), p. 133.

[8] J. A. GREEN - Axiomatic representation theory for finite groups, Journ. of Alg., 1 (1971), p. 41.

[9] A. ROSENBERG - Blocks and centers of group algebras, Math. Zeit. 76 (1961), p. 209.

[10] J.-P. SERRE - Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris.