HAROLD ROSENBERG

Un contre-exemple à la conjecture de Seifert

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. nº 434, p. 294-306

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__294_0>

UN CONTRE-EXEMPLE À LA CONJECTURE DE SEIFERT

[d'après P. SCHWEITZER]

par Harold ROSENBERG

En 1950, Georges Seifert a démontré que tout champ de vecteurs X qui est une C^0-perturbation du champ Y sur S^3 défini par

$$Y(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_2,x_1,-x_4,x_3) \quad ,$$

admet au moins une orbite périodique [8]. Ceci est vrai pour X continu avec des solutions uniques. Dans cet article, Seifert dit : " It is unknown if every continuous vector field of the three-dimensional sphere contains a closed integral curve " ; d'où l'origine de la conjecture de Seifert.

En 1972, Paul Schweitzer a trouvé un champ de vecteurs sur S^3 , de classe C^1 , sans orbites compactes [7]. Plus généralement, il a démontré :

THÉORÈME 1.- Soit V une variété fermée de dimension trois et soit Y un champ de vecteurs sur V sans zéros. Alors Y est homotope à un champ de vecteurs X , de classe C^1 , et X n'a pas d'orbites compactes. L'homotopie entre Y et X est dans l'espace des champs sur V sans zéros.

On construit X en deux étapes. D'abord, on rend Y homotope à un champ Y_0 ayant un nombre fini d'orbites compactes ; Y_0 aura la même classe de différentiabilité que Y . Ensuite, on casse chaque orbite périodique de Y en insérant un piège dans un flot-box contenant un segment de l'orbite périodique. Naturellement, pour un contre-exemple à la conjecture de Seifert, on n'a pas besoin de la première étape ; c'est facile de construire un champ sur S^3 sans zéro, ayant exactement une orbite compacte.

1. Construction du champ Y_0 ayant un nombre fini d'orbites compactes

Lemme 1.1.- Il existe un entier k et des plongements $f_i : S^1 \times [1,4] \to V$ pour $i = 1,\dots,k$, tels que :

(i) $\quad f_i(S^1 \times [1,4]) \cap f_j(S^1 \times [1,4]) = \emptyset$ si $i \neq j$;

(ii) Y est transverse à $\bigcup_i f_i(S^1 \times [1,4])$;

(iii) chaque orbite de Y rencontre un $f_i(S^1 \times [2,3])$.

Démonstration. Nous construirons des disques $D_1,\ldots,D_n$, de dimension deux, dans V , tels que $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et tels que Y soit transverse à $\bigcup_i D_i$ et que chaque orbite de Y rencontre au moins un D_j . Puis, on construit des f_i de la façon suivante : il existe des nombres positifs $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ tels que les $2n$ disques $D_1,\ldots,D_n$, $\Phi_{\varepsilon_1}(D_1),\ldots,\Phi_{\varepsilon_n}(D_n)$ sont disjoints deux par deux ; Φ_t est le groupe à un paramètre de difféomorphismes de V associé à Y . Soient A_i et B_i deux disques ouverts dans D_i tels que $\bar{A}_i \cap \bar{B}_i = \emptyset$ et $\bar{A}_i \cup \bar{B}_i \subset$ intérieur de D_i . Alors $D_1 - A_1 ,\ldots, D_n - A_n$, $\Phi_{\varepsilon_1}(D_1 - B_1) ,\ldots, \Phi_{\varepsilon_n}(D_n - B_n)$ sont $2n$ anneaux, disjoints deux par deux, transverses à Y , et chaque orbite de Y passe par l'un d'eux. On obtient des f_i en épaississant ces anneaux. Donc, il suffit de construire $D_1,\ldots,D_n$.

Soient $W_1,\ldots,W_p$ des flot-boxes pour Y qui recouvrent V et tels que chaque W_i soit difféomorphe à $D^2 \times I$ avec Y correspondant au champ $\frac{d}{dt}$. On prend D_1 = la partie de W_1 correspondant à $D^2 \times (0)$. Maintenant regardons W_2 ; identifions W_2 avec $D^2 \times I$ et soit $A = D_1 \cap W_2$. Pour ε petit, $H_\varepsilon = \{\Phi_t(A) \mid -\varepsilon < t < \varepsilon\} \cap W_2$ est un voisinage tubulaire trivial de A dans W_2 . Soit $W = W_2 - H(\varepsilon/2)$. Pour $x \in W$, il existe un voisinage de x de la forme $B_x \times [a_x , b_x] \subset W_2$, tel que $B_x \subset D^2$, $[a_x , b_x] \subset [0,1]$ et $[(B_x \times (a_x)) \cup (B_x \times (b_x))] \cap A = \emptyset$. Donc, on peut recouvrir W par un nombre fini de tels voisinages, $B_1 \times [a_1 , b_1] ,\ldots, B_m \times [a_m , b_m]$, où chaque B_i est difféomorphe à D^2 . Maintenant, pour ε_i assez petit, et choisi convenablement, on aura

$$B_1 \times [a_1 - \varepsilon_i , b_1] ,\ldots, B_m \times [a_m - \varepsilon_m , b_m] ,$$

un recouvrement de W et les disques $B_1 \times (a_1 - \varepsilon_1) ,\ldots, B_m \times (a_m - \varepsilon_m)$ disjoints deux par deux. On prend $D_2 = B_1 \times (a_1 - \varepsilon_1) ,\ldots, D_{m+1} = B_m \times (a_m - \varepsilon_m)$, et on refait le même raisonnement dans W_3 avec A remplacé par

$(D_1 \cup \ldots \cup D_{m+1}) \cap W_3$.

Lemme 1.2.- Il existe un champ de vecteurs X sur $M = S^1 \times [1,4] \times I$ tel que

(i) $X = \frac{d}{dt}$ dans un voisinage de ∂M , où t est la coordonnée de I ,

(ii) X a quatre orbites périodiques dans M ,

(iii) l'orbite de X d'un point $(x,s,0)$ arrive en $(x,s,1)$ si $1 \leq s < 2$ ou $3 < s \leq 4$,

(iv) l'orbite positive d'un point $(x,s,0)$ tend vers une orbite périodique de X si $2 \leq s \leq 3$, et de même pour l'orbite négative du point $(x,s,1)$ si $2 \leq s \leq 3$,

(v) X est homotope à $\frac{d}{dt}$ rel ∂M .

Démonstration. Soit Z un champ unitaire tangent à $S^1 \times [1,4] \times (1/2)$ tel que les orbites de Z par $(x) \times (s) \times (1/2)$ sont des cercles $S^1 \times (s) \times (1/2)$ si $1 \leq s \leq 2$ ou $3 \leq s \leq 4$, et dans $S^1 \times [2,3] \times (1/2)$, les orbites de Z spiralent de $S^1 \times (2) \times (1/2)$ à $S^1 \times (3) \times (1/2)$. C'est clair qu'on peut choisir un tel Z de classe C^∞ . Soit $\varphi : [1,4] \to [0,1]$ une fonction de classe C^∞ telle que $\varphi(t) = 0$ pour t dans un voisinage de 1 , $\varphi(t) < 1$ pour $1 < t < 2$, $\varphi(t) = 1$ pour $2 \leq t \leq 3$ et $\varphi(3+t) = \varphi(2-t)$ pour $0 \leq t \leq 1$. On définit X sur $S^1 \times [1,4] \times (1/2)$ par

$$X(x,s,\tfrac{1}{2}) = (1 - \varphi(s)) \frac{d}{dt} + \varphi(s) Z(x,s,\tfrac{1}{2}) .$$

Ensuite, soit $\lambda : I \to I$ une fonction C^∞ telle que $\lambda(t) = 0$ pour t dans un voisinage de $\partial[0,1]$, $\lambda(t) = 1$ si et seulement si $t = \frac{1}{2}$, et $\lambda(t) = \lambda(1-t)$. On définit X sur $S^1 \times [1,4] \times I$ par

$$X(x,s,t) = (1 - \lambda(t)) \frac{d}{dt} + \lambda(t) X(x,s,\tfrac{1}{2}) .$$

Alors ce champ X a deux orbites périodiques et satisfait aux conditions (i), (iv) et (v), mais X ne satisfait pas (iii). Pour obtenir un champ qui satisfait (i),...,(v), nous prenons le "mirror image" du champ X sur $S^1 \times [1,4] \times [1,2]$ et puis X plus son "mirror image" définissent un champ sur $S^1 \times [1,4] \times [0,2]$

qui satisfait toutes les conditions.

THÉORÈME 1.1 ([9]).- <u>Soient</u> V <u>une variété fermée de dimension trois et</u> Y <u>un champ sur</u> V <u>sans zéros. Alors</u> Y <u>est homotope à un champ</u> Y_o <u>ayant un nombre fini d'orbites compactes. L'homotopie est dans l'espace des champs sans zéros.</u>

<u>Démonstration</u>. Soient $f_1,\dots,f_k$ des plongements de $S^1 \times [1,4]$ dans V donné par le lemme 1.1. Par les conditions (i) et (ii) de 1.1, on peut étendre $f_1,\dots,f_k$ aux plongements $g_1,\dots,g_k$ de $S^1 \times [1,4] \times I \to V$ tels que

a) $g_i / S^1 \times [1,4] \times (0) = f_i$ pour $i = 1,\dots,k$,

b) $g_i\left(\frac{d}{dt}\right) = Y$ pour tout i ,

c) $g_i(S^1 \times [1,4] \times I) \cap g_j(S^1 \times [1,4] \times I) = \emptyset$ si $i \neq j$.

Soit Y_o le champ sur V défini par

1) $Y_o = Y$ sur $V - \bigcup_{i=1}^{k} g_i(S^1 \times [1,4] \times I)$,

2) $Y_o = g_i(X)$ dans $g_i(S^1 \times [1,4] \times I)$, où X est le champ donné par le lemme 1.2.

Par la condition (i) de 1.2, Y_o est de classe C^∞ si Y l'est, et par les conditions (ii), (iii) et (iv), les orbites périodiques de Y_o sont les images par g_i des quatre orbites périodiques de X pour $i = 1,\dots,k$.

2. <u>Construction d'un champ sur</u> V <u>sans orbites compactes</u>

Pour construire ce champ, Schweitzer utilise un exemple de Denjoy que nous expliciterons dans le numéro 4.

THÉORÈME 2.1 ([1]).- <u>Il existe un champ de vecteurs</u> Z <u>sur le tore</u> T^2 , <u>de classe</u> C^1 , <u>sans orbite compacte et ayant un ensemble minimal non trivial</u> K .

<u>Remarque</u>.- L'existence d'un tel champ de classe C^0 n'est pas difficile et c'était déjà connu de Poincaré. Par contre, Denjoy (et Van Kampen) a démontré

que de tels champs de classe C^2 n'existent pas, [1].

Maintenant, soit D un 2-disque dans $T^2 - K$ et posons $M = T^2 - \mathrm{int}(D)$, $Z = Z/M$.

<u>Lemme</u> 2.2.- Il existe un champ X, de classe C^1, sur $M \times [-2, +2]$ satisfaisant :

(i) $X = \frac{d}{dt}$ sur $A \times [-2,+2]$, où $A = M - U$, U voisinage ouvert de K, $U \neq M$,

(ii) si $x \in M - K$, l'orbite positive de X commençant en $(x,-2)$ arrive au point $(x,+2)$.

(iii) si $x \in K$, l'orbite positive de X par $(x,-2)$ tend vers $K \times (-1)$ et l'orbite négative de X par $(x,+2)$ tend vers $K \times (1)$,

(iv) X n'a pas d'orbites compactes, et

(v) X est homotope à $\frac{d}{dt}$ rel $A \times [-2,2]$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\varphi : M \to [0,1]$ une fonction de classe C^∞ telle que $K = \varphi^{-1}(1)$ et φ à support compact ; disons $\varphi = 0$ sur $A = M - U$, U voisinage ouvert de K, $U \neq M$.

Soit $\lambda : [-2,0] \to I$ une fonction de classe C^∞ telle que $\lambda = 0$ dans un voisinage de $\partial[-2,0]$ et $\lambda(t) = 1$ si et seulement si $t = -1$. On étend λ à $[-2,2]$ par $\lambda(t) = -\lambda(-t)$. On définit X sur $M \times [-2,2]$ par :

$$X(x,t) = (1 - \varphi(x)|\lambda(t)|) \frac{d}{dt} + \varphi(x)\lambda(t)Z(x) .$$

Il est clair que X est de classe C^1 et satisfait à la condition (i) de 2.2. Par définition, X sur $M \times [0,2]$ est le négatif de la réflection de $X/(M \times [-2,0])$ par $M \times (0)$; c.à.d. X sur $M \times [0,2]$ est le "mirror image" de $X/M \times [-2,0]$. Donc une orbite de X dans $M \times [0,2]$ est la réflection d'une orbite dans $M \times [-2,0]$. Il en résulte que si une orbite de X commençant en un point $(x,-2)$ arrive au point $(y,0)$, alors cette même orbite arrive au point $(x,2)$. Or, pour $x \notin K$, la composante suivant $\frac{d}{dt}$ de $X(x,t)$ est strictement positive, d'où la condition (ii). Si $x \in K$, $X(x,t) = (1 - |\lambda(t)|) \frac{d}{dt} + \lambda(t)Z(x)$. Donc,

$K \times (-1)$ et $K \times (1)$ sont des ensembles minimaux pour X et la condition (iii) est satisfaite. Sur le complément de $K \times (-1)$ et $K \times (1)$, la composante de X suivant $\frac{d}{dt}$ est positive, donc X n'a pas d'orbite compacte. La condition (v) est claire.

3. L'exemple de P. Schweitzer

Soit Y_o un champ de vecteurs sur V ayant un nombre fini d'orbites périodiques, $C_1,\dots,C_n$. Soit x_i un point de C_i et U_i un flot-box de Y_o contenant x_i . Choisissons les U_i de sorte qu'ils soient difféomorphes à $D^2 \times I$ et que Y_o corresponde au champ $\frac{d}{dt}$. Aussi $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Nous allons modifier Y_o dans chaque U_i .

Soit $f : M \to \mathrm{int}(D^2 \times I)$ un plongement transverse au champ $\frac{d}{dt}$, où $M = T^2 - \mathrm{int}(D)$ est la variété définie dans le numéro 2. Pour obtenir un tel **f** , on peut immerger M dans $\mathrm{int}(D^2 \times (1/2))$ de sorte que les self-intersections soient un petit carré, voir figure 1 :

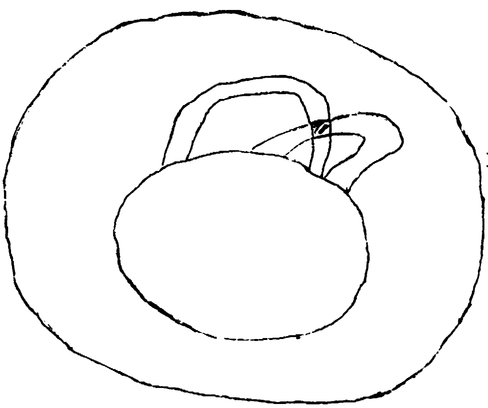

Figure 1

Puis on relève légèrement une des anses dans $D^2 \times I$ pour obtenir f .

Ensuite on étend f à un plongement $f : M \times [-2,+2] \to \mathrm{int}(D^2 \times I)$ tel que

$f(x \times [-2,+2])$ soit contenu dans le segment vertical par $f(x)$ pour chaque $x \in M$. Soit X le champ sur $M \times [-2,+2]$ construit dans 2.2. Soit X_o le champ dans $D^2 \times I$ qui est égal à $f_*(X)$ dans $f(M \times [-2,+2])$ et $X_o = \frac{d}{dt}$ dans $D^2 \times I - f(M \times [-2,+2])$. Il est clair que X_o est un champ de classe C^1 sur $D^2 \times I$.

Maintenant, dans V , nous modifions Y_o dans chaque U_i en mettant l'image de X_o dans U_i par le difféomorphisme qui identifie U_i avec $D^2 \times I$. Il faut prendre une précaution : le plongement de M dans U_i se fait de sorte que x_i appartienne à K , l'ensemble minimal de X . Alors le champ X ainsi obtenu est de classe C^1 est sans orbite compacte. Ceci démontre le théorème 1. Il nous reste à décrire l'exemple de Denjoy.

4. <u>Un difféomorphisme de</u> S^1

Associé à un difféomorphisme $f : V \to V$ de classe C^k , nous avons un champ de vecteurs $X(f)$, de classe C^k , sur la suspension de V par f : $V(f)$ = le quotient de $V \times R$ par la relation $(x,t+1) = (fx,t)$ pour $t \in R$. Le champ $X(f)$ sur $V(f)$ est l'image du champ $\frac{d}{dt}$ sur $V \times R$ par la projection canonique. Il y a une correspondance bijective entre les points périodiques de f et les orbites périodiques de $X(f)$. De même, pour les ensembles minimaux. Lorsque $V = S^1$ et f conserve l'orientation, $V(f) = T^2$. Donc pour construire un champ Z sur T^2 sans orbite compacte, de classe C^1 et non ergodique, il suffit de démontrer :

THÉORÈME 4.1 (Denjoy [1], expliqué dans une lettre de J. Milnor).- <u>Il existe un</u> C^1 <u>difféomorphisme</u> $f : S^1 \to S^1$, <u>sans point périodique et avec un ensemble minimal</u> K <u>non trivial</u>.

<u>Démonstration</u>. L'idée est de construire d'abord la dérivée de f et puis f par intégration. Soient $\ell_n > 0$ pour $n \in Z$, tels que $\sum_{n \in Z} \ell_n = 1$ et

$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$. Soit α un nombre irrationnel entre 0 et 1 , et $\alpha_n = n\alpha \pmod 1$. Les α_n sont distincts et denses dans $[0,1]$.

Soient $I_n = (b_n, c_n)$ où $b_n = \sum_{\{m/\alpha_m < \alpha_n\}} \ell_m$ et $c_n = \sum_{\{m/\alpha_m \leq \alpha_n\}} \ell_m = b_n + \ell_n$. Les I_n sont ordonnés sur $[0,1]$ de la même façon que les α_n , c.à.d., $\alpha_n < \alpha_p$ alors $c_n < b_p$. Donc les I_n sont disjoints deux par deux et leur réunion est dense dans $[0,1]$.

Pour chaque entier n , soit $f' : I_n \to (0,\infty)$ une fonction continue telle que :

(i) $f'(t) \to 1$ quand $t \to b_n$ et $t \to c_n$,

(ii) $f'(t) \to 1$ uniformément quand $n \to \pm\infty$,

(iii) $\int_{I_n} f' = \ell_{n+1}$.

C'est pour la condition (ii) qu'on a choisi les ℓ_n tels que $\lim_{n \to \pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$.

On étend f' à une fonction continue $f' : R \to (0,\infty)$ par $f'(t) = 1$ pour $t \in I - \bigcup_{n \in Z} I_n$ et $f'(t+1) = f'(t)$. Soit $f(t) = b_1 + \int_0^t f'(s)ds$. Alors f est de classe C^1 et f est un difféomorphisme. Il est clair que $f(t+1) = f(t) + 1$, car

$$f(t+1) = b_1 + \int_0^{t+1} f' = b_1 + \int_0^1 f' + \int_1^{1+t} f' = b_1 + 1 + \int_0^t f' .$$

Donc f induit un difféomorphisme $\bar{f} : R/Z \to R/Z$, de classe C^1 . Pour démontrer que $\bar{f}$ satisfait aux conditions désirées, nous avons besoin de deux lemmes.

<u>Lemme</u> 4.2.- Si $\alpha_n < 1 - \alpha$ alors $f(I_n) = I_{n+1}$. Si $\alpha_n \geq 1 - \alpha$ alors $f(I_n) = (b_{n+1} + 1, c_{n+1} + 1)$. Donc, en tous cas, $f(I_n) = I_{n+1} \pmod 1$.

Démonstration. Nous avons

$$f(b_n) = b_1 + \int_0^{b_n} f' = b_1 + \sum_{\{m/\alpha_m < \alpha_n\}} \ell_{m+1} .$$

Cas 1 : $\alpha_n < 1 - \alpha$

$$f(b_n) = b_1 + \sum_{\{m/\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\}} \ell_{m+1} - \sum_{\{m/\alpha_{m+1} < \alpha_1\}} \ell_{m+1}$$

$$= b_1 + b_{n+1} - b_1 = b_{n+1} .$$

Car si $\alpha_m < \alpha_n$, $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \alpha < \alpha_n + \alpha = \alpha_{n+1}$. Et si $\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}$ et $\alpha_m \geq \alpha_n$, alors $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \alpha - 1 < \alpha$. Donc

$$\{m/\alpha_m < \alpha_n\} = \{m/\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\} - \{m/\alpha_{m+1} < \alpha_1\} .$$

Cas 2 : $\alpha_n \geq 1 - \alpha$, donc $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha - 1$, alors

$$\{m/\alpha_m < \alpha_n\} = \{m/\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1} \text{ où } \alpha_{m+1} \geq \alpha_1\} .$$

Donc $$f(b_n) = b_1 + \sum_{\{m/\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\}} \ell_{m+1} + \sum_{\{m/\alpha_{m+1} \geq \alpha_1\}} \ell_{m+1}$$

$$= b_1 + b_{n+1} + \sum_{m \in Z} \ell_{m+1} - \sum_{\{m/\alpha_{m+1} < \alpha\}} \ell_{m+1}$$

$$= b_1 + b_{n+1} + 1 - b_1 = b_{n+1} + 1 .$$

Alors $$f(c_n) = f(b_n) + \int_{b_n}^{c_n} f' = c_{n+1} + 1 .$$

Lemme 4.3.- $$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{f^n(0)}{n} = \alpha .$$

Démonstration. Notons par $[n\alpha]$, le plus grand entier dans $n\alpha$; $\alpha_n = n\alpha - [n\alpha]$. On voit, par récurrence, que $f^n(0) = [n\alpha] + b_n$:

$$f^{n+1}(0) = [n\alpha] + b_{n+1} \quad \text{si } \alpha_n < 1 - \alpha ,$$

et $$f^{n+1}(0) = [n\alpha] + b_{n+1} + 1 = [(n+1)\alpha] + b_{n+1} \quad \text{si } \alpha_n \geq 1 - \alpha .$$

Donc $$|f^n(0) - n\alpha| < 1 .$$

Maintenant, nous pouvons terminer la démonstration de 4.1. Par le lemme 4.3,

$\bar{f}$ a un nombre de rotations égal à α , donc $\bar{f}$ est sans point périodique. Par le lemme 4.2, $\bar{f}$ laisse invariant l'ensemble fermé, de mesure zéro, égal à

$$R/Z - \sum_{n \in Z} I_n \pmod 1) .$$

Mais tout ensemble, fermé, invariant par $\bar{f}$ et non vide, contient un ensemble minimal. Si K est un tel ensemble minimal, il est clair que $K \neq S^1$.

5. Le théorème de Seifert

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, G. Seifert a démontré que toute perturbation de la fibration de Hopf de S^3 admet au moins une orbite compacte. A la fin de son article, il affirme que ce théorème se généralise aux variétés de dimension trois fibrées en cercles au-dessus d'une variété de dimension deux de caractéristique d'Euler différente de zéro. F. Fuller a développé une théorie de l'indice des orbites compactes des champs de vecteurs qui permet de généraliser le théorème de Seifert aux variétés de dimension n .

6. La théorie de Fuller [2]

Soient X un champ de vecteurs sur variété V et C une orbite périodique de X de période T . Soit $\pi = \{(\varphi_t(x) , mT \mid 0 \leq t \leq mT\}$. Alors on dit que π est une orbite périodique de X de période mT et de multiplicité m . On dit que π est isolé s'il existe un voisinage U de π dans $V \times R^+$ tel qu'il n'y a pas de solution de $\varphi_t(x) = x$ dans $U - \pi$. Notons par $i(\pi)$ l'indice de l'holonomie de C^m . Voici le théorème fondamental :

THÉORÈME 6.1.- Supposons que S soit un ensemble compact isolé d'orbites compactes de X dans $V \times R^+$. On peut associer à (X,S) un nombre rationnel $i(X,S)$ satisfaisant :

1) Si $S = \pi$ est une orbite compacte isolée, alors $i(X,S) = i(\pi)/m$.

2) Si S_1 et S_2 sont deux ensembles d'orbites compactes isolées de X et $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, alors $i(X , S_1 \cup S_2) = i(X,S_1) + i(X,S_2)$.

3) Soit X_t une homotopie de X telle que $\cup\{(S_t , t) \mid t \in [0,1]\}$ soit un

ensemble compact isolé d'orbites compactes dans $V \times R^+ \times [0,1]$. Alors $i(X_t, S_t) = i(X_o, S_o)$ pour $t \in [0,1]$. Donc cet indice est invariant par des homotopies qui gardent les périodes uniformément majorées.

COROLLAIRE 6.2.- Soit V une variété fermée, fibrée en cercles au-dessus d'une variété B . Supposons que la caractéristique d'Euler de B soit différente de zéro et X soit un champ de vecteurs sur V tangent aux fibres et sans zéro. Alors toute perturbation de X admet une orbite compacte.

Démonstration. Soit $C \subset V \times R^+$, l'ensemble des orbites périodiques de X . On voit que C est compact car les périodes des orbites de X sont majorées. Donc $i(X,C)$ est défini et il suffit de démontrer que $i(X,C) \neq 0$.

Soit H un champ de plans sur V transverse aux fibres de $p : V \to B$. Soit Z le champ gradient à une fonction de Morse sur B . Pour chaque $x \in V$, soit $Y(x)$ le vecteur dans $H(x)$ tel que $p(Y(x)) = Z(p(x))$. Y est de classe C^∞ et $Y = 0$ sur la fibre au-dessus d'un zéro de Z .

Soit $\varepsilon > 0$ et $X(\varepsilon) = X + \varepsilon Y$. Alors, pour ε petit, $X(\varepsilon)$ est proche de X , et $p(X(\varepsilon)) = \varepsilon Y$. Les orbites périodiques de $X(\varepsilon)$ sont les orbites de X au-dessus des zéros de Z (qui sont en nombre fini), car les orbites de $X(\varepsilon)$ se projettent sur les orbites de εY . Donc $i(X(\varepsilon)) = i(X) = \sum_{i=1}^{m} n_i$, où n_i = l'indice de la i-ème orbite périodique de $X(\varepsilon)$. Or n_i est le degré de l'holonomie de l'orbite périodique π_i de $X(\varepsilon)$ car les multiplicités sont égales à un. Nous calculons l'holonomie de π_i avec un disque transverse à π_i , contenu dans le plan H . L'application de premier retour de l'orbite de $X(\varepsilon)$ de ce disque est conjuguée par p à l'application dans B qui est un déplacement suivant les orbites de εY . Le degré de cette dernière application est l'indice du zéro $p(\pi_i)$ de Z . Donc $i(X,C) = \sum_{i=1}^{m} n_i = \chi(B) \neq 0$.

Remarque.- Pour des feuilletages de S^3 de codimension un, nous savons d'après Novikov qu'il existe toujours une feuille compacte [3]. Par contre, pour les variétés de dimension ≥ 5 , P. Schweitzer a annoncé le résultat suivant :

THEORÈME.- Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un d'une variété V^n , $n \geq 5$. Alors, il existe un feuilletage $\mathcal{F}_o$ de V^n , de classe C^o , sans feuille compacte et le champ de plans de $\mathcal{F}_0$ est homotope à celui de $\mathcal{F}$.

Pour le champ de vecteurs, ceci était déjà connu :

THÉORÈME (Wilson [9]).- Soit X un champ de vecteurs sur une variété V^n , $n \geq 4$. Alors, il existe un champ de vecteurs Y sur V^n , homotope à X , et les seuls ensembles minimaux de Y sont des tores de dimension $n - 1$. En particulier, Y est sans orbite compacte. Aussi Y est de la même classe que X .

Pour beaucoup de gens, la conjecture de Seifert est vraie depuis que C. Pugh a démontré que c'est vrai génériquement :

THÉORÈME DE FERMETURE (Pugh [4]).- Soit X un champ de vecteurs sur une variété fermée V . Alors, on peut C^1-approcher X par un champ Y avec des orbites compactes.

En conclusion, nous mentionnons un problème.

Problème 1.- Soit V une variété fermée, fibrée au-dessus d'une variété B de caractéristique d'Euler différente de zéro. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de V proche de la fibration. Est-ce que $\mathcal{F}$ admet une feuille compacte ?

Je crois que ce problème admet une réponse affirmative quand la fibre est un tore de dimension k . Dans ce cas, ce problème est équivalent à

Problème.- Soit B une variété fermée, $\chi(B) \neq 0$. Soient $f_1,\ldots,f_k$ des difféomorphismes de B , qui commutent deux par deux et qui sont proches de 1_B . Alors ils ont un point fixe en commun.

Quand la fibration de V provient d'une action du groupe R^k , la réponse au problème 1 me semble positive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DENJOY - Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, Journal de Math., 11 (1932).

[2] F. FULLER - An index of fixed point type for periodic orbits, Amer. Journ. Math., 1967, p. 133-148.

[3] A. NOVIKOV - Topology of foliations, Trudy Mosk. Maths., 14, 513-583.

[4] C. PUGH - On closing lemma, Amer. Journal Math., 1967.

[5] G. REEB - Sur un théorème de Seifert sur les trajectoires fermées de certains champs de vecteurs, International Symposium on Nonlinear Differential Equations, New York, 1963.

[6] G. REEB - Sur certaines propriétés topologiques des systèmes dynamiques, Mém. Acad. Roy. Belgique, 27 (1952), n° 9.

[7] P. SCHWEITZER - A counter-example to the Seifert conjecture, à paraître.

[8] G. SEIFERT - Closed integral curves in 3-space and isotopie two-dimensional deformations, Proc. A.M.S., 1 (1950), 287-302.

[9] W. WILSON - On the minimal sets of non-singular vector fields, Annals of Math., Vol. 84, 1966, 529-536.