

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES CHAZARAIN

Le problème mixte hyperbolique

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 432, p. 265-285

http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__265_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

LE PROBLEME MIXTE HYPERBOLIQUE

par Jacques CHAZARAIN

"A ne lire qu'après s'être regardé dans un miroir déformant"

La théorie du problème de Cauchy pour les opérateurs strictement hyperboliques est maintenant assez bien comprise, du moins en ce qui concerne la question de l'existence et l'unicité de la solution (Petrovski, Leray, Gårding) et celle de la structure globale de la paramétrix (Hörmander). Dans cet exposé, on se propose de rendre compte de l'état de ces mêmes questions, dans le cas plus complexe du problème mixte hyperbolique.

En deux mots, disons que le problème mixte concerne le cas où en plus des conditions de Cauchy à l'instant initial, la solution doit vérifier des conditions aux limites sur la frontière du domaine d'espace où elle est définie (penser à une source lumineuse située dans une enceinte réfléchissante).

La première partie de cet exposé est consacrée à la question de l'existence et l'unicité de la solution. Bien que le problème ait été résolu depuis longtemps quand l'équation est d'ordre deux (Krzyszanski et Schauder [23]), ce n'est qu'en 1962 qu'un premier résultat est obtenu pour les opérateurs hyperboliques d'ordre quelconque (Agmon [3]). Après de nombreux résultats partiels, une solution générale a été donnée récemment par H. O. Kreiss [22] (cas des systèmes du 1er ordre) et R. Sakamoto [31], [32] (cas des opérateurs scalaires d'ordre quelconque). Ces deux auteurs utilisent la technique des inégalités a priori et le point crucial de leurs travaux réside dans la démonstration d'une certaine inégalité, dite d'énergie (cf. théorème 2.2 et théorème 2.1).

Une fois résolue la question de l'existence et l'unicité, le problème n'est pas clos, au contraire il commence ! En effet, on peut alors se poser la question plus profonde de la description des opérateurs qui expriment la solution du problème mixte en fonction des données, ou tout au moins une paramétrix de ces opérateurs. Car, dès que l'on connaît ces opérateurs, on peut résoudre toutes sortes de problèmes :

propagation des singularités, allure asymptotique des solutions, étude de l'existence et l'unicité dans d'autres espaces fonctionnels, ...etc. Cela fait l'objet de la deuxième partie de cet exposé, et comme la question est encore très ouverte on se restreint aux opérateurs du 2ème ordre du type des ondes. Sous une hypothèse de "non diffraction" sur le domaine d'espace, on démontre que l'on peut construire une paramétrix du problème mixte à l'aide des opérateurs intégraux de Fourier. De là, on déduit l'extension au cas du problème mixte, d'un résultat bien connu pour le problème de Cauchy, à savoir que les singularités des solutions se propagent et se réfléchissent selon les lois de "l'optique géométrique" du système. Le point essentiel de la méthode réside dans l'interprétation, en termes de transformations canoniques, de l'expérience usuelle des images successives d'un objet situé entre deux miroirs !

ière partie : Méthodes d'énergie

1. Enoncé du problème

On se place, pour commencer, dans le cas où la variable "spatiale" x parcourt un demi-espace $X = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n > 0\}$, on note x' , les points du bord $\Gamma = \partial X$, soit x_0 la variable "temporelle", on pose $\bar{x} = (x_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi)$ la variable duale.

a) Le problème mixte consiste, étant donné (f, g_j, h_k) , à trouver u , solution de

$$(1.1) \quad \begin{cases} Pu = f & \text{dans } \mathbb{R} \times X \\ \gamma_j u = g_j & \text{dans } \{0\} \times X \quad j=0, \dots, m-1 \quad (\text{conditions de Cauchy}) \\ B_k u = h_k & \text{dans } \mathbb{R} \times \Gamma \quad k=1, \dots, r \quad (\text{conditions au bord}), \end{cases}$$

où $P = P(x_0, x, D_0, D)$ est un opérateur différentiel de degré m de partie principale $p(\bar{x}, \bar{\xi})$, $(D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j})$, $\gamma_j u = D_0^j u|_{x_0=0}$; $B_k = B_k(x_0, x, D_0, D)$ sont des opérateurs différentiels de degré $m_k \leq m-1$, tels que $m_j \neq m_k$ pour $j \neq k$ et le coefficient de $D_n^{m_k}$ est non nul, on note $b_k(\bar{x}, \bar{\xi})$ la partie principale.

On fait les hypothèses suivantes :

(H₁) Les opérateurs P, B_k sont à coefficients C^∞ et constants en dehors d'un compact de R^{n+1} .

(H₂) L'opérateur P est strictement hyperbolique en la variable x_0 , c'est-à-dire que le coefficient de D_0^m est identique à 1 et l'équation en ξ_0

$$p(\bar{x}, \xi_0, \xi) = 0$$

admet m racines réelles et distinctes pour $(\bar{x}, \xi) \in R^{n+1} \times (R^n \setminus 0)$.

(H₃) Le bord Γ n'est pas caractéristique pour P , c'est-à-dire que le coefficient de D_n^m ne s'annule pas.

Sous ces hypothèses, l'équation en λ $p(\bar{x}, \xi_0 - i\sigma, \xi', \lambda) = 0$ admet m racines non réelles pour $z = (\bar{x}; \xi_0 - i\sigma, \xi') \in R^{n+1} \times ((C^- \times R^n) \setminus 0) = Z^+$ où $C^- = (\text{imaginaire} < 0)$.

Soit r le nombre de ces racines dans C^+ : $\lambda_1(z), \dots, \lambda_r(z)$, alors r est précisément le nombre de conditions au bord.

Reste à introduire une dernière hypothèse, dite de Lopatinski uniforme, qui est analogue à celle qui intervient dans les problèmes aux limites elliptiques. Pour cela on définit le polynôme en λ

$$p_+(z, \lambda) = \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k(z)) \quad \text{pour } z \in Z^+$$

et on vérifie que ce polynôme garde encore un sens pour $z \in \bar{Z}^+$. La condition de Lopatinski uniforme est définie par

(L) Les polynômes en λ $\{(b_k(z, \lambda))\}_{k=1, \dots, r}$ sont indépendants modulo $p_+(z, \lambda)$ pour tout $z \in \bar{Z}^+$.

On peut alors poser le

Problème.- Sous l'hypothèse $H = (H_1, H_2, H_3, L)$, étudier l'existence et l'unicité

de la solution de (1.1) dans des espaces convenables.

b) Tout d'abord, donnons diverses formulations équivalentes de la condition (L).

On définit pour $z \in Z^+$ le déterminant de Lopatinski du système (P, B_k) par

$$L(z) = \det \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{b_k(z, \lambda) \lambda^{j-1}}{p_+(z, \lambda)} d\lambda \right)_{j, k=1, \dots, r}$$

où γ_+ désigne un lacet entourant $+1$ fois les racines $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

PROPOSITION 1.1.- La condition (L) est équivalente à l'existence d'une constante

$C > 0$ telle que $|L(z)| \geq C$ pour tout $z \in Z^+$ avec $|\eta| = 1$, où

$$\eta = (\xi_0 - i\sigma, \xi') \text{ et } |\eta|^2 = \xi_0^2 + \sigma^2 + |\xi'|^2.$$

La démonstration consiste à remarquer que si les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont distincts, le théorème des résidus donne

$$L(z) = \frac{\det(b_j(z, \lambda_h))_{j, h=1, \dots, r}}{\prod_{1 \leq j < h \leq r} (\lambda_j - \lambda_h)}.$$

L'équivalence est alors immédiate et le cas général s'en déduit par un argument de continuité.

Une autre formulation s'obtient en considérant l'équation différentielle en x_n , obtenue en fixant $z \in Z^+ \cap (x_n = 0)$ dans P :

$$(1.2) \quad \begin{cases} P(z, D_n)U(x_n) = 0 & x_n \geq 0 \\ B_k(z, D_n)U|_{x_n=0} = \xi_k \in \mathbb{C} & k = 1, \dots, r. \end{cases}$$

On vérifie que les fonctions

$$k = 1, \dots, r \quad U_k(x_n) = \int_{\gamma_+} e^{ix_n \lambda} (p_+(z, \lambda))^{-1} \lambda^{k-1} \frac{d\lambda}{2i\pi}$$

forment une base de l'espace des solutions bornées de l'équation homogène, d'où il découle la

PROPOSITION 1.2.- La condition (L) est équivalente à l'existence d'une constante C

telle que pour tout $z \in Z^+ \cap (x_n = 0)$ et tout $g \in \mathbb{C}^r$, l'équation (1.2) admet
une solution bornée unique U qui vérifie la majoration

$$|U(0)| \leq C|g|.$$

On vérifie par exemple que, si on prend $P = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, alors $r = 1$

et la condition (L) est satisfaite si on prend $B_1 = 1$ (Dirichlet), mais ne l'est pas pour $B_1 = D_n$ (Neumann), ou plus généralement si on considère une condition de dérivée oblique sur le bord (cf. Chazarain [10], Ikawa [20], Miyatake [26]).

c) Notons que parallèlement au cas des opérateurs scalaires, il s'est développé une théorie pour les systèmes hyperboliques du premier ordre car ils sont très importants en physique (équations de Maxwell,...).

On cherche une fonction v à valeurs dans \mathbb{C}^m qui vérifie

$$(1.1)' \quad \begin{cases} Pv = (D_0 + \sum_1^n A_j(\bar{x})D_j)v = f & \text{où } f = (f_1, \dots, f_m) \\ \gamma_0 v = g & \text{où } g = (g_1, \dots, g_m) \\ B(\bar{x})v = h & \text{où } h = (h_1, \dots, h_r). \end{cases}$$

Avec les hypothèses analogues au cas scalaire :

(H₁') Les matrices sont à coefficients \mathbb{C}^∞ et constants en dehors d'un compact.

(H₂') Le polynôme $p(\bar{x}, \xi) = \det(I \cdot \xi_0 + \sum_1^n A_j \xi_j)$ est strictement hyperbolique en x_0 .

(H₃') La matrice $A_n(\bar{x})$ est inversible en tout point, et B est une matrice rectangulaire $m \times r$.

On définit la condition de Lopatinski uniforme (L') pour les systèmes, en recopiant la condition du lemme 1.2 pour l'équation différentielle :

$$(1.2)' \quad \begin{cases} P(z, D_n)V(x_n) = (D_n - M(z))V(x_n) = 0 & x_n \geq 0 \\ B(\bar{x})|_{x_n=0} = g \in \mathbb{C}^r \end{cases}$$

où $M(z) = -A_n^{-1}(\xi_0 I + \sum_1^{n-1} A_j \xi_j)$. Enfin, indiquons une dernière formulation de (L') introduite par Hersh [17]. On désigne par $E_+(z)$ le sous-espace de C^m engendré par les vecteurs propres généralisés de la matrice $M(z)$ relativement aux valeurs propres $\lambda \in C^+$.

PROPOSITION 1.3.- La condition (L') peut se formuler de la façon suivante :

la matrice $B(\bar{x})$ est un isomorphisme du sous-espace $E_+(z) \subset C^m$ sur C^r pour tout $z \in Z^+ \cap (x_n = 0)$ et son inverse a une norme majorée par une constante indépendante de $z \in Z^+ \cap (x_n = 0)$ et $|\eta| = 1$.

En effet les solutions bornées de (1.2) sont de la forme

$$V(x_n) = \int_{\gamma_+} e^{ix_n \lambda} (\lambda - M(z))^{-1} v_0 \frac{d\lambda}{2\pi i},$$

par conséquent les valeurs initiales $V(0)$ parcourent l'espace $E_+(z)$ qui est l'image de C^m par le projecteur $\int_{\gamma_+} (\lambda - M(z))^{-1} \frac{d\lambda}{2\pi i}$.

d) Définissons enfin les espaces de Sobolev que l'on utilise.

Pour $s \in R$, $\sigma \in R$, on pose $H_{s; \sigma}(R^{n+1}) = e^{\sigma x_0} H_s(R^{n+1})$ normé par

$$\|u\|_{s; \sigma}^2 = \int |\zeta|^2 \widehat{(e^{-\sigma x_0} u)}^2 d\bar{x} \quad \text{où } |\zeta|^2 = \xi_0^2 + \sigma^2 + |\xi|^2 \text{ et}$$

$\widehat{v}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} v(x) dx$, sur le bord $x_n = 0$ on désigne cette norme par $\langle u \rangle_{s; \sigma}$.

Enfin, $H_{s; \sigma}(R_+^{n+1})$ est l'espace des restrictions à $R_+^{n+1} = \{\bar{x} \mid x_n > 0\}$ des distributions de $H_{s; \sigma}(R^{n+1})$ muni de la norme quotient $|u|_{s; \sigma}$.

2. Inégalités d'énergie

a) Le résultat crucial dans l'étude du problème mixte est l'existence d'une majoration, dite inégalité d'énergie, par référence au cas particulier de l'opérateur des ondes.

THÉOREME 2.1 (Sakamoto [31]).- Sous l'hypothèse (H), il existe des constantes C et σ_0 telles que

$$(2.1) \quad \sigma |u|_{m-1; \sigma}^2 + \sum_0^{m-1} \langle D_n^j u \rangle_{m-1-j; \sigma}^2 \leq C [\sigma |Pu|_0^2; \sigma + \sum_1^r \langle B_k u \rangle_{m-m_k-1; \sigma}^2],$$

pour tout $u \in H_m; \sigma \in (R_+^{n+1})$ et $\sigma \geq \sigma_0$.

Pour démontrer cette inégalité, on se ramène, en s'inspirant d'un travail de Agranovic [5], à la situation d'un système du premier ordre, ce qui permet alors d'utiliser la technique de démonstration introduite par Kreiss [22]. Pour cela, on a besoin de définir une classe d'opérateurs pseudo-différentiels qui dépendent du paramètre σ . Ce seront des opérateurs sur le bord $x_n = 0$, aussi pour alléger les notations, on pose

$$(x_0, x') = y, \quad (\xi_0 - i\sigma, \xi') = \eta.$$

On définit les symboles \mathcal{L}_a comme l'ensemble des matrices $A(y, \eta)$ à coefficients C^∞ en (y, η) pour σ assez grand et constants en dehors d'un compact de R^n , de plus on demande que pour tout α, β , il existe C

$$|D_y^\alpha D_\eta^\beta A(y, \eta)| \leq C |\eta|^{d-|\beta|} \quad \text{pour } \sigma \text{ assez grand.}$$

Au symbole $A \in \mathcal{L}_a$ on associe l'opérateur \mathcal{A} par

$$u \in C_0^\infty \rightarrow (\mathcal{A}u)(y, \sigma) = \int e^{ix_0(\xi_0 - i\sigma) + ix' \xi'} A(y, \eta) \hat{u}(\xi_0 - i\sigma, \xi') \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

par exemple, $\Lambda^d(y, \eta) = |\eta|^d \in \mathcal{L}_d$. On a les théorèmes que l'on espère et que l'on se contente de citer (voir Agranovic [5] pour plus de détails).

. $A \in \mathcal{L}_d \Rightarrow \langle \mathcal{A}u \rangle_{s; \sigma} \leq C \langle u \rangle_{s+d; \sigma}$ avec une constante C indépendante de σ pour σ assez grand, on dit que \mathcal{A} est d'ordre d.

. $A \in \mathcal{L}_d, B \in \mathcal{L}_{d'}$ $\Rightarrow AB \in \mathcal{L}_{d+d'}$ et $\mathcal{C} - \mathcal{A}\mathcal{B}$ est d'ordre $d + d' - 1$.

. Si $A^* = B \in \mathcal{L}_d$ alors $\mathcal{A}^* - \mathcal{B}$ est d'ordre $d - 1$.

. Si $A \in \mathcal{L}_0$ vérifie $\text{Re } A \geq cI$ (avec $c > 0$) alors on a l'inégalité de

bolique de degré m .

(H₃'') La matrice $B(y, x_n, \eta)$ est rectangulaire $m \times r$ où r est déterminé comme
dans (H).

(L'') La matrice $B(y, 0, \eta)$ est un isomorphisme de $E_+(y, 0, \eta)$ sur C^r avec
une norme bornée par une constante indépendante de (y, η) pour $|\eta| = 1$ et
 $\sigma > 0$.

Soit (H'') la conjonction de ces hypothèses.

On a alors le résultat suivant qui s'applique donc à la fois au cas scalaire (1.1) et à celui des systèmes (1.1)'.

THÉORÈME 2.2 (Kreiss [22]).- Sous l'hypothèse (H''), il existe des constantes C
et σ_0 telles que

$$(2.1)' \quad \sigma |v|_0^2; \sigma + \langle v \rangle_0^2; \sigma \leq C \left[\frac{1}{\sigma} |Pv|_0^2; \sigma + \langle Bv \rangle_0^2; \sigma \right] ,$$

pour tout $v \in H_1; \sigma (R_+^{n+1})$ et $\sigma \geq \sigma_0$, avec $Pv = D_n v - (\mathcal{M} + \mathcal{M}')v$.

Remarque.- Sur la nécessité de la condition de Lopatinski. Sous les hypothèses (H₁' , H₂' , H₃'), Kreiss montre que la condition (L'') est nécessaire pour avoir (2.1)'. Dans le cas de (2.1), on peut montrer qu'il en est de même, en se ramenant à un problème à coefficients gelés (cf. Agemi et Shirota [2]), puis en utilisant la caractérisation donnée dans [11]. Mais si l'on permet un peu moins de régularité au bord dans (2.1) ou (2.1)', il faut considérer une condition de Lopatinski non uniforme ; mais il n'y a pas encore de résultats englobant tous les cas connus (cf. par exemple : Mizohata [27], Friedrichs et Lax [16], Agranovic [4], Agemi et Shirota [2], Beals [9], Chazarain et Piriou [11], Sakamoto [33]).

Revenons à la démonstration du théorème 2.2, elle est basée sur la construction d'un certain symbole R , donné par le

THÉORÈME 2.3 (Kreiss [22] et complété par Ralston [28']). - Sous l'hypothèse (H''), on peut construire un symbole $R(y, x_n, \eta) \in \mathcal{L}_0$ à valeurs matrices $m \times m$ qui vérifie

$$(2.2) \quad R = R^* ,$$

$$(2.3) \quad \text{Im } R.M \geq c \sigma I \quad \text{avec } c > 0 \text{ et pour tout } \sigma > 0 ,$$

$$(2.4) \quad -\langle R w, w \rangle \geq c' |w|^2 - C |B w|^2 \quad \text{avec } c' > 0 \text{ et } C \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } w \in \mathbb{C}^m .$$

Montrons comment le théorème 2.3 entraîne l'inégalité d'énergie (2.1)'. Soit \mathcal{R} l'opérateur de symbole R , on va estimer l'expression $\text{Im}(v, \mathcal{R}f)_{0; \sigma}$ modulo des termes du type $C|v|_{0; \sigma}^2$ que l'on peut toujours absorber quitte à augmenter σ . On a $\text{Im}(v, \mathcal{R}f)_{0; \sigma} = E + F + G$ où $E = -\text{Im}(v, \mathcal{R}\mathcal{N}v) = \text{Im}(\mathcal{R}\mathcal{N}v, v) \geq c' \sigma |v|_{0; \sigma}^2$, on a utilisé l'inégalité de Gårding grâce à (2.3). Comme \mathcal{N} est de degré 0, on a $|F| = |-\text{Im}(v, \mathcal{R}\mathcal{N}v)| \leq C|v|_{0; \sigma}^2$. Enfin, une intégration par parties en x_n donne

$$G = \text{Im}(v, \mathcal{R}D_n v) \equiv -\frac{1}{2} \langle v, \mathcal{R}v \rangle_{0; \sigma} + \frac{1}{2} \langle (\mathcal{R}^* - \mathcal{R})D_n v, v \rangle_{0; \sigma} .$$

D'autre part, on remarque que (2.4) implique

$$\langle -\mathcal{R}v, v \rangle_{0; \sigma} \geq -C' \langle Bv \rangle_{0; \sigma}^2 + c' \langle v \rangle_{0; \sigma}^2 \quad \text{avec } c' > 0 ;$$

il vient, pour σ assez grand et avec $c'' > 0$

$$\text{Im}(v, \mathcal{R}f) \geq -C' \langle Bv \rangle_{0; \sigma}^2 + c'' \sigma |v|_{0; \sigma}^2 - C |f|_{0; \sigma}^2 ,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité d'énergie.

Tout le problème est donc ramené à la démonstration du théorème 2.3, c'est-à-dire à un résultat purement algébrique. La démonstration de Kreiss est basée sur une étude fine de la réduction à la forme de Jordan du symbole $M(y, x_n, \eta)$ dépendant du paramètre σ , mais elle est trop technique pour pouvoir être résumée ici. On trouvera aussi des généralisations dans Agranovic [6].

3. Existence et unicité de la solution

On développe maintenant les conséquences des inégalités d'énergie, en se contentant essentiellement d'énoncer les résultats.

A partir de l'inégalité d'énergie (2.1), on en déduit, par un argument de dualité, l'existence des solutions pour le problème (1.1) à données de Cauchy nulles.

COROLLAIRE 3.1 (Sakamoto [32]).- Sous l'hypothèse (H), il existe un nombre σ_0 tel que, pour $f \in H_s; \sigma (R_+^{n+1})$, $h_k \in H_{m-1-m_k+s}; \sigma (R^n)$, $k = 1, \dots, r$ nuls pour $x_0 < 0$, il existe $u \in H_{m-1+s}; \sigma (R_+^{n+1})$ unique, nul pour $x_0 < 0$ et vérifiant $Pu = f$, $B_k u = g_k$; ceci pour tout $\sigma \geq \sigma_0$ et tout entier $s \geq 0$.

(Ce résultat avait été démontré antérieurement par T. Balaban [7], mais avec une hypothèse restrictive sur les racines de P.)

Dans le cas des données de Cauchy non nulles, il est nécessaire d'étendre l'inégalité d'énergie à cette situation, ce qui demande encore un peu de travail :

THÉORÈME 3.1 (Sakamoto [32]).- Sous l'hypothèse (H), il existe un nombre σ_0 et une constante C tels que

$$(3.1) \quad \sigma \|u\|_{m-1; \sigma}^2 + \sum_0^{m-1} \langle D_n^j u \rangle_{m-1-j; \sigma}^2 \leq C \left[\frac{1}{\sigma} |Pu|_0^2; \sigma + \sum_1^r \langle B_k u \rangle_{m-1-m_k; \sigma}^2 + \sum_0^{m-1} [\gamma_j u]_{m-1-j; \sigma}^2 \right]$$

pour tout $u \in H_m; \sigma (R_{++}^{n+1})$ et $\sigma \geq \sigma_0$, où $R_{++}^{n+1} = \{\bar{x} \mid x_0 > 0, x_n > 0\}$ et $[]_s; \sigma$ désigne la norme relativement à l'ouvert $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n > 0\}$.

Pour énoncer le résultat dans le cas général, on introduit quelques notations supplémentaires. Soit $t \geq 0$, on suppose dorénavant que $x_0 \in [0, t]$ et on définit le cylindre $\Omega = [0, t] \times X$, sa base $T = \{0\} \times X$ et la surface latérale $\Sigma = [0, t] \times \Gamma$. On note \mathcal{H}_{m-1+s} le complété de l'espace $H_{m+s}(\Omega)$ pour la norme

$$\|u\|_{m-1+s}^2 = |Pu|_s^2 + \sum_1^r \langle B_k u \rangle_{m-1-m_k+s}^2 + \sum_0^{m-1} [\gamma_j u]_{m-1-j+s}^2. \text{ Alors en combinant le}$$

corollaire 3.1 et l'inégalité (3.1), J. Kato [21] démontre le

THÉORÈME 3.2.- On fait l'hypothèse (H) et soit un entier $s \geq 0$. Alors pour

$f \in H_s(\Omega)$, $g_j \in H_{s+m-1-j}(T)$, $h_k \in H_{s+m-1-m_k}(\Sigma)$ vérifiant les conditions de com-

patibilité à l'ordre $m + s$ sur Γ , il existe une solution unique u de (1.1) dans \mathcal{H}_{m-1+s} . En particulier, la solution est C^∞ , pour des données C^∞ compatibles.

On introduit les conditions de compatibilité naturelles sous la forme suivante : si u vérifie $Pu = f$, $\forall_j u = g_j$, $j = 0, \dots, m-1$, on en déduit, en dérivant formellement en x_0 , une expression pour

$$(D_0^{m+j}u)|_{x_0=0} = C^j(g_0, \dots, g_{m-1}, f, \text{coefficients de } P) \quad j \in \mathbb{N},$$

et en reportant dans $B_k u$, on obtient une expression pour

$$(D_0^j B_k u)|_{x_0=0} = C_k^j(g_0, \dots, g_{m-1}, f, \text{coeff. de } P, \text{coeff. de } B_k).$$

Ce qui permet de poser la

DÉFINITION 3.1.- On dit que les données (f, g_j, h_k) vérifient les conditions de compatibilité à l'ordre $m + s$ sur Γ si on a

$$C_k^j|_{x_n=0} = (D_0^j h_k)|_{x_n=0} \quad \begin{array}{l} j = 0, \dots, m + s - m_k - r \\ k = 1, \dots, r. \end{array}$$

Pour terminer, indiquons que dans le cas général où X est un ouvert de \mathbb{R}^n , dont le bord Γ est une variété C^∞ , J. Kato [21] a démontré que le théorème 3.2 reste valable mot pour mot, si on généralise de façon évidente l'hypothèse (H) et les conditions de compatibilité à cette situation.

Enfin, signalons que dans le cas des systèmes du premier ordre, on a des résultats analogues (Agranovic [5], [6], Rauch [29], Rauch et Massey [30]).

Deuxième Partie : Paramétrie et propagation des singularités

pour le problème mixte

1. De quoi s'agit-il ?

Après l'existence et l'unicité de la solution du problème mixte, se pose le

Problème.- Décrire la structure des opérateurs (ou paramétrie) qui expriment la solution en fonction des données.

Pour résoudre ce problème, on propose une méthode (résumée dans [13]) qui consiste à interpréter en termes de transformations canoniques les relations entre un objet, situé dans une enceinte réfléchissante, et ses "images" successives.

On se restreint ici au cas des opérateurs d'ordre deux du type des ondes :

$$P = D_0^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij}^2 + (\text{ordre inférieur})$$

et on suppose les hypothèses (H_1, H_2, H_3) satisfaites relativement à un ouvert X (espace objet) de \mathbb{R}^n dont le bord ("miroir") est une variété C^∞ , de plus, on suppose les coefficients indépendants du temps x_0 . On considère sur le bord la condition de Dirichlet, c'est-à-dire $B = 1$, l'hypothèse (L) est donc aussi vérifiée (ceci peut être généralisé [13]).

On considère le problème mixte avec une seule donnée non nulle notée g

$$(1.1) \quad \begin{cases} Pu = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times X \\ \gamma_0 u = 0, \quad \gamma_1 u = g & \text{sur } \{0\} \times X \\ \text{tr } u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \Gamma \text{ où tr désigne l'opérateur de trace sur } \mathbb{R} \times \Gamma, \end{cases}$$

et on se propose de décrire l'application $g \rightarrow u$.

Dans le cas particulier où P est à coefficients constants et à 2 variables d'espace, un premier résultat a été obtenu par Povzner et Suharevskii [28] concernant les singularités du noyau distribution de l'application $g \rightarrow u$.

2. Relations canoniques et optique géométrique du système

a) Tout d'abord, rappelons que pour le problème de Cauchy dans \mathbb{R}^{n+1} , on a une paramétrix (cf. Hörmander [18], Duistermaat [14] et aussi Maslov [25]) qui est un opérateur intégral de Fourier $E_0 \in I^{-1-1/4}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n; C_0)$ vérifiant

$$PE_0 \equiv 0, \quad \gamma_0 E_0 \equiv 0, \quad \gamma_1 E_0 \equiv \text{Identité},$$

où \equiv signifie modulo un opérateur régularisant (on utilise les notations de Duistermaat [14] pour les opérateurs intégraux de Fourier). Enfin, C_0 est une relation canonique dans $(T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0) \times (T^*\mathbb{R}^n \setminus 0)$ définie par

$$C_0 = \left\{ (\bar{x}, \bar{\xi}; y, \eta) \left| \begin{array}{l} \text{Si } (\bar{x}, \bar{\xi}) \text{ appartient à la bicaractéristique de } p \\ \text{passant par } \bar{y} = (0, y), \quad \bar{\eta} = (\eta_0, \eta) \text{ où } \eta_0 \text{ est} \\ \text{l'une des racines de } p(y, \eta_0, \eta) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Notons que lorsqu'on sait construire E_0 , alors on sait aussi construire la paramétrix du problème non homogène et même l'inverse exact dans des cas généraux (cf. Chazarain [12]).

b) On va définir une relation M dans $(T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0) \times (T^*\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)$ que l'on appelle "relation de réflexion". Pour cela, on rappelle que le fibré conormal $T^*\Sigma$ à $\Sigma = \mathbb{R} \times \Gamma$ dans \mathbb{R}^{n+1} est défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow T^*\Sigma \xrightarrow{\rho} T^*\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\bar{x}} (T^*\mathbb{R}^{n+1})_{\bar{x}} \rightarrow 0 \quad \text{pour } \bar{x} \in \Sigma.$$

On définit la relation réflexion M par

$$M = \left\{ (\bar{y}, \bar{\eta}; \bar{x}, \bar{\xi}) \left| \begin{array}{l} \text{si } \bar{x} = \bar{y} \in \Sigma, \text{ et } (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \text{ constitue une paire} \\ \text{de covecteurs qui vérifient} \\ p(\bar{x}, \bar{\xi}) = p(\bar{x}, \bar{\eta}) = 0 \text{ et } \rho(\bar{\xi} - \bar{\eta}) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Il est immédiat de vérifier que la 2-forme symplectique

$$\sum_{j=0}^n (dy_j \wedge d\eta_j - dx_j \wedge d\xi_j)$$

s'annule sur M , donc M est une variété involutive mais ce n'est pas une variété lagrangienne au sens de Hörmander [19] car sa dimension n'est que $2n+1$.

Remarque. - Le terme de réflexion est justifié par la propriété suivante. Soit un couple $((\bar{x}, \bar{\xi}); (\bar{x}, \bar{\eta})) \in M$, alors les variables conjuguées $q = \partial_{\xi} p(\bar{x}, \bar{\xi})$, $r = \partial_{\eta} p(\bar{x}, \bar{\eta})$ vérifient $\langle d\psi(x), q \rangle \cdot \langle d\psi(x), r \rangle \leq 0$ où $\psi(x) = 0$ désigne une équation de la variété Γ .

c) Relations canoniques " m-ième image " S_m ($m \geq 1$).

Introduisons quelques notations commodes pour décrire la situation relative à la réflexion des bicaractéristiques dans le miroir Γ . On désigne par N^{\pm} les deux composantes connexes de la variété $N = p^{-1}(0) \setminus 0 \subset T^*X \setminus 0$. Pour $a \in N$, on note $D(a)$ la bicaractéristique de p passant par ce point et on précise $D^{\pm}(a)$, selon que $a \in N^{\pm}$. Dans le cas d'un point $(x, \xi) \in T^*X \setminus 0$, on note $D^{\pm}_0(x, \xi)$ la bicaractéristique $D^{\pm}(\bar{x}, \bar{\xi})$ où $\bar{x} = (0, x)$, $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi)$ avec ξ_0 tel que $\bar{\xi} \in N^{\pm}$. On rappelle que la bicaractéristique passant par a est définie par l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{ds} = \partial_{\xi_j} p(x, \bar{\xi}) & , \quad \frac{d\xi_j}{ds} = - \partial_{x_j} p(x, \bar{\xi}) \quad j = 0, \dots, n \\ \text{et } (\bar{x}(s), \bar{\xi}(s)) \Big|_{s=0} = a . \end{cases}$$

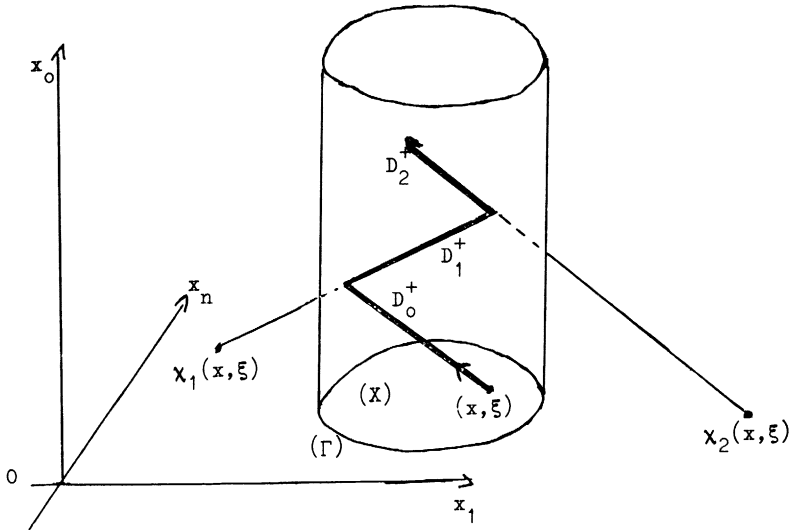
On a donc $\xi_0 = \text{constante}$, $x_0 = 2\xi_0 \cdot s + \text{constante}$ et, par conséquent, pour $\xi_0 \neq 0$, la bicaractéristique coupe $\{x_0 = 0\}$ en un point unique. D'autre part, on remarque que la projection sur T^*R^n des bicaractéristiques de P sont les bicaractéristiques relatives au symbole $p(x, 1, \xi)$ ($\xi_0 = 1$).

Pour exclure le "phénomène de diffraction", on fait dorénavant l'hypothèse suivante sur l'ouvert X .

(D) Toute demi-bicaractéristique de $P(x, 1, D_x)$, issue d'un point $(x, \xi) \in T^*X \setminus 0$, coupe Γ transversalement en un point unique.

On peut montrer que cette condition entraîne que l'ouvert X est pseudo-convexe (au sens de [15]) pour l'opérateur $P(x, 1, D_x)$.

Dans ces conditions la demi-bicaractéristique $D_0^\pm(x, \xi)$ issue du point $(x, \xi) \in T^*X \setminus 0$, coupe $R \times \Gamma$ en un point $a \in T^*(R^{n+1}) \setminus 0$ avec $\partial_{\xi_n} p(a) \neq 0$, soit b le point réflécté $((a, b) \in M)$, on définit la bicaractéristique réfléchie $D_1^\pm(x, \xi) = D^\pm(b)$. On définit ainsi de suite les bicaractéristiques $D_m^\pm(x, \xi)$ issues de (x, ξ) après m réflexions.



On peut alors définir les transformations χ_m , $m \geq 1$.

DÉFINITION 2.1.- A tout point $(x, \xi) \in T^*X \setminus 0$, on associe le point $\chi_m(x, \xi) \in T^*R^n$ qui est l'intersection de $D_m^+(x, \xi)$ avec $\{x_0 = 0\}$.

PROPOSITION 2.1.- Sous la condition (D), les applications χ_m sont des transformations canoniques homogènes de $T^*X \setminus 0$ dans $T^*R^n \setminus 0$, en fait à valeurs dans $T^*Y \setminus 0$ où $Y = \int \bar{X}$. On note S_m le graphe correspondant, alors la relation S_m est une relation canonique homogène.

La méthode, pour démontrer que la 2-forme symplectique

$\sum_1^n (dy_j \wedge d\eta_j - dx_j \wedge d\xi_j)$ s'annule sur S_m , consiste à écrire S_m comme composée de relations où ceci est vrai.

Remarque (où l'on se regarde dans un miroir !).- A la transformation canonique χ_m on fait correspondre, au moyen de la transformation de Legendre relative à l'hamiltonien $p(x, 1, \xi)$, une transformation θ_m de $TX \setminus 0$ dans $TY \setminus 0$. Alors l'application θ_1 correspond en optique (cf. Luneburg [24]) à la relation entre l'objet et son image dans le "miroir déformant" Γ . L'aberration est la mesure dont θ_1 s'écarte d'une application tangente.

3. Paramétrix du problème mixte

On utilise la notation suivante : soient deux ouverts U et V et un opérateur linéaire $A : \mathcal{E}'(U) \rightarrow \mathcal{D}'(V)$, alors on écrit $A \approx 0$ sur U pour indiquer que $A \mathcal{E}'(U) \subset C^\infty(V)$.

L'étape essentielle est donnée par le

THÉORÈME 3.1.- Sous l'hypothèse (D), on peut associer aux relations canoniques S_m

($m \geq 1$) des opérateurs intégraux de Fourier $\mathcal{J}_m \in I^0(\mathbb{R}^n, X; S_m)$ qui vérifient

$$(3.1) \quad \text{tr.} E_0 \cdot \mathcal{J}_{m-1} + \text{tr.} E_0 \cdot \mathcal{J}_m \approx 0 \quad \text{sur } X \text{ pour } m \geq 1,$$

où par définition $\mathcal{J}_0 = \text{identité}$, et tr est l'opérateur de trace sur la partie de $\mathbb{R} \times \Gamma$ qui est atteinte par les bicaractéristiques $D_{m-1}^+(x, \xi)$ et $D_m^+(x, \xi)$ avec $(x, \xi) \in T^*X \setminus 0$.

Principe de la démonstration. On commence par construire \mathcal{J}_1 , aussi on pose provisoirement $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$ et $S = S_1$.

Tout d'abord on vérifie facilement l'égalité au niveau des relations canoniques. Ensuite, on détermine \mathcal{J} sous la forme d'un développement asymptotique

$$\mathcal{J} \equiv \sum_{j \geq 0} \mathcal{J}^{(-j)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}^{(-j)} \in I^{-j}(\mathbb{R}^n, X; S)$$

et les conditions

$$\begin{cases} \text{tr.} E_0 \cdot \mathcal{J}^{(0)} + \text{tr.} E_0 = R_{-1} \\ \text{tr.} E_0 \cdot \mathcal{J}^{(-j)} + R_{-j} = R_{-j-1} \end{cases} \quad (j \geq 1)$$

où R_{-j} est un opérateur intégral de Fourier de degré $\leq -j - 1$.

Cela se traduit par un système d'équations linéaires sur les symboles principaux, ce qui permet de les déterminer par récurrence.

Enfin, on construit \mathcal{J}_m à partir de \mathcal{J}_{m-1} , comme on a construit \mathcal{J}_1 à partir de $\mathcal{J}_0 = I$.

Revenons maintenant au problème mixte (1.1). On définit, pour $m \geq 1$, les opérateurs

$$E_m = E_0 \circ \mathcal{J}_m \in I^{-1-1/4}(\mathbb{R}^{n+1}, X; C_0 \circ S_m)$$

car on vérifie que l'on peut composer les relations C_0 et S_m grâce à (D). D'ailleurs, on a une description très simple de

$$C_0 \circ S_m = \left\{ (\bar{y}, \bar{\eta}; x, \xi) \mid \begin{array}{l} \text{si } (\bar{y}, \bar{\eta}) \text{ appartient à l'une des} \\ \text{bicaractéristiques } D_m^\pm(x, \xi) \end{array} \right\} .$$

D'autre part, on vérifie d'après la construction des \mathcal{J}_m , que pour $u \in \mathcal{Z}'(X)$ les distributions

$$E_m u|_{\mathbb{R} \times X} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times X) / C^\infty(\mathbb{R} \times X)$$

forment une famille localement finie, ce qui permet de définir l'opérateur

$$E = \sum_{m \geq 0} E_m \text{ en tant qu'opérateur de } \mathcal{Z}'(X) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times X) / C^\infty(\mathbb{R} \times X) .$$

Alors, il découle facilement du théorème 3.1 que E est une paramétrix du problème (1.1), en ce sens que l'on a le

THÉORÈME 3.2.- Sous l'hypothèse (D), l'opérateur $E = \sum_{m \geq 0} E_m$ vérifie sur X les conditions suivantes :

$$PE \approx 0 \quad , \quad \text{tr } E \approx 0 \quad , \quad \gamma_0 E \approx 0 \quad , \quad \gamma_1 E \approx \text{Identité} .$$

Remarque.- On peut étendre ce théorème au cas où toutes les données sont non nulles, ceci pourvu que leurs supports ne rencontrent pas la frontière Γ , car sinon il faut définir des conditions de compatibilité, ce que l'on ne détaillera pas ici.

Du théorème, il découle, compte tenu des propriétés des opérateurs intégraux de Fourier (cf. Hörmander [19]), le résultat suivant sur la propagation des singularités.

COROLLAIRE 3.1.- Pour $g \in \mathcal{C}'(X)$ la distribution $u = Eg$ a son spectre singulier (noté $S.S.(u)$ ou $WF(u)$) contenu dans la réunion des bicaractéristiques réfléchies $D_m^\pm(x, \xi)$, $m \geq 0$, issues des points $(x, \xi) \in S.S.(g)$.

Terminons en indiquant une possibilité d'application de cette paramétrix E à l'étude du comportement asymptotique du spectre du Laplacien sur une variété à bord dans l'esprit de Balian et Bloch [8].

ADDITIF.- Après que ce texte ait été tapé, T. Kawai m'a signalé une note de D. S. Mogilevskii [34] concernant une question analogue à celle de la deuxième partie de cet exposé, mais dans une formulation beaucoup moins précise.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. AGEMI et T. SHIROTA - J. Fac. Sc. Hokkaido Univ., Vol. 21, n° 2 (1970), p. 133-151.
- [2] R. AGEMI et T. SHIROTA - J. Fac. Sc. Hokkaido Univ., Vol. 22, n° 3 (1972), p. 137-149.
- [3] S. AGMON - Problème mixte pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur, Colloque CNRS, Paris (1962), p. 13-18.
- [4] M. S. AGRANOVIC - Trad. Russian Math. Surveys, vol. 24 (1969), n° 1, p. 59-126.
- [5] M. S. AGRANOVIC - Trad. Maths. USSR Sbornik, vol. 13 (1971), n° 1, p. 25-64.
- [6] M. S. AGRANOVIC - Trad. Functional Analysis and Appl., vol. 6 (1972), p. 85-93.
- [7] T. BALABAN - Mem. Amer. Math. Soc., n° 112 (1971), p. 1-115.
- [8] T. BALIAN et C. BLOCH - Annals of physics, vol. 69 (1972), n° 1, p. 76-160.
- [9] R. BEALS - Arch. Rat. Rech. Analysis, vol. 48 (1972), n° 2, p. 123-152.
- [10] J. CHAZARAIN - J. Funct. Analysis, vol. 7 (1971), p. 386-446.
- [11] J. CHAZARAIN et A. PIRIOU - Ann. Inst. Fourier, t. 22 (1972), fasc. 4, p. 193-237.
- [12] J. CHAZARAIN - Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier, t. 24 (1974), fasc. 1, à paraître.
- [13] J. CHAZARAIN - Construction de la paramétrix du problème mixte hyperbolique pour l'équation des ondes, note C.R.A.S., Avril 1973, à paraître.
- [14] J. J. DUISTERMAAT - Application of Fourier Integral operators, Séminaire Goulaouic-Schwartz, exposé n° 27 (1972), Ecole Polytechnique.
- [15] J. J. DUISTERMAAT et L. HÖRMANDER - Acta Math., 128 (1972), p. 183-269.
- [16] K. O. FRIEDRICHS et P. D. LAX - On symmetrisable differential operators, Proc. Symp. Singular Integrals, Amer. Math. Soc., vol. 10 (1967).
- [17] R. HERSH - J. Math. Mech., 12 (1963), p. 317-334.
- [18] L. HÖRMANDER - The calculus of Fourier Integral operators, Ann. of Math. Studies, n° 70 (1971), Princeton.
- [19] L. HÖRMANDER - Acta Math., vol. 127 (1971), p. 79-183.
- [20] M. IKAWA - Osaka J. Math., vol. 7 (1970), p. 495-525.
- [21] J. KATO - Proc. Japan Acad., vol. 47 (1971), n° 1, p. 67-70.
- [22] H. O. KREISS - Com. Pure Appl. Math., vol. 23 (1970), p. 277-298.
- [23] M. KRZYSANSKI et J. SCHAUDER - Studia Math., 6 (1936), p. 162-189.

- [24] R. K. LUNEBURG - Mathematical theory of optics, Univ. of California Press, Berkeley (1964).
- [25] V. P. MASLOV - Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Moscou (1965), trad. Dunod, Paris (1972).
- [26] S. MIYATAKE - Mixed problem for hyperbolic equation of second order (preprint).
- [27] S. MIZOHATA - Quelques problèmes au bord du type mixte, Séminaire Leray, Collège de France (1966-67).
- [28] A. Ja. POVZNER et I. V. SUHAREVSKII - Mat. Sb., 51 (93), 1960, p. 3-26.
[Trad. Amer. Math. Soc. Transl., (2) 47, 1965, p. 131-156.]
- [28'] J. RALSTON - Com. Pure Appl. Math., vol. 24 (1971), p. 759-762.
- [29] J. RAUCH - Com. Pure Appl. Math., vol. 25 (1972), p. 265-285.
- [30] J. RAUCH et F. J. MASSEY - Differentiability of solutions to hyperbolic initial boundary value problems, (preprint).
- [31] R. SAKAMOTO - J. Math. Kyoto Univ., vol. 10 (1970), n° 2, p. 349-373.
- [32] R. SAKAMOTO - J. Math. Kyoto Univ., vol. 10 (1970), n° 3, p. 403-417.
- [33] R. SAKAMOTO - Publ. RIMS, Kyoto Univ., vol. 8 (1972), n° 2, p. 265-293.
- [34] D. S. MOGILEVSKII - Dokl. Akad. Nauk USSR, 199 (1971), n° 3, p. 540-543.
[Trad. Soviet. Math. Dokl., vol. 12 (1971), n° 4, p. 1118-1122.]