SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LAURENT SCHWARTZ

Produits tensoriels g_p et d_p, applications p-sommantes, applications p-radonifiantes

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 386, p. 63-88

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__63_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 386 Novembre 1970

PRODUITS TENSORIELS g_p ET d_p, APPLICATIONS p-SOMMANTES, APPLICATIONS p-RADONIFIANTES

par Laurent SCHWARTZ

§ 1. Les produits tensoriels $\otimes_{g_p}$ et $\otimes_{d_p}$ de SAPHAR et Simone CHEVET.

Soient E un Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E ; on dira que c'est une suite finie si tous ses termes sont nuls à partir d'un certain rang. Soit $0 < p \leq +\infty$. Alors $(\|e_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle ≥ 0 ; sa quasi-norme dans ℓ^p se notera $\|e\|_p$ (1). Si $\xi \in E'$, $\langle e,\xi\rangle = (\langle e_n , \xi\rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite scalaire ; on dira que e est scalairement ℓ^p si, pour tout $\xi \in E'$, la suite $\langle e,\xi\rangle$ est dans ℓ^p. Dans ce cas, e définit une application linéaire de E' dans ℓ^p, $\xi \mapsto \langle e,\xi\rangle$; par Banach-Steinhaus, cette application est continue (donc, si $p > 1$, elle a une application linéaire continue transposée de $\ell^{p'}$ dans E, de c^o dans E si $p \leq 1$). La quasi-norme de cette application est

$$\|e\|_p^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\langle e,\xi\rangle\|_{\ell^p} .$$

Soient E, F, deux espaces de Banach, x un élément de $E \otimes F$. Il peut s'écrire, en général d'une infinité de manières, comme somme $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} e_n \otimes f_n$, où

---

(1) Une p-norme, $0 < p \leq 1$, dans un espace vectoriel E, est une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant $\|kx\| = |k|\,\|x\|$ pour $k \in \mathbb{K}$, et $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$. Elle est *a fortiori* une q-norme pour $q \leq p$. Une fonction $\|\ \|$ est une quasi-norme s'il existe p tel qu'elle soit une p-norme. L'espace ℓ^p a une $\text{Min}\ (p,1)$-norme.

$e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites finies ; on posera

$$\|x\|_{g_p} = \operatorname{Inf} \|e\|_p \|f\|^*_{p'} \quad , \quad \|x\|_{d_p} = \operatorname{Inf} \|e\|^*_{p'} \|f\|_p \quad ,$$

Inf étant pris sur toutes les représentations possibles de x , et p' étant l'exposant conjugué de p si $p \geq 1$, $+\infty$ si $p \leq 1$; g et d veulent dire gauche et droite.

Pour $p = 1$, on voit (en prenant tous les e_n ou tous les f_n de norme 1) que $\otimes_{g_1} = \otimes_{d_1}$ est la norme $\otimes_\pi$ de GROTHENDIECK.

Dans le cas général, on montre sans trop de peine que $\otimes_{g_p}$ et $\otimes_{d_p}$ sont des quasi-normes, et que $\| e_o \otimes f_o\|_{g_p} = \|e_o \otimes f_o\|_{d_p} = \|e_o\| \|f_o\|$, pour $e_o \in E$, $f_o \in F$. On montre aisément aussi que, si E et F sont hilbertiens et si $p = 2$, $\otimes_{g_2} = \otimes_{d_2}$ est la norme de Hilbert-Schmidt.

On introduit alors évidemment les espaces complétés $E \hat{\otimes}_{g_p} F$, $E \hat{\otimes}_{d_p} F$.

PROPOSITION (1.0).- <u>Sur</u> $E \otimes F$, $\otimes_{g_p}$ <u>et</u> $\otimes_{d_p}$ <u>décroissent quand</u> p <u>croît</u>.

<u>Démonstration</u>.

Soit $q \geq p$, et r défini par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Soit $x \in E \otimes F$, $x = \sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n$, où λ , e , f sont des suites finies de $\mathbb{R}^+$, E , F , $\|e\|_{+\infty} = 1$, $\|f\|^*_{p'} = 1$, $\|\lambda\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{g_p} + \varepsilon$. On peut écrire $\lambda = \alpha\beta$ (soit $\lambda_n = \alpha_n\beta_n$ pour tout n), avec $\|\alpha\|_{\ell^q} = \|\lambda\|_{\ell^p}$, $\|\beta\|_{\ell^r} = 1$ (soit $\alpha_n = \lambda_n^{\frac{p}{q}} (\sum_m \lambda_m^p)^{\frac{1}{r}}$, $\beta_n = \lambda_n^{\frac{p}{r}} / (\sum_m \lambda_m^p)^{\frac{1}{r}}$). Alors $x = \sum_n \alpha_n e_n \otimes \beta_n f_n$, donc

$$\|x\|_{g_q} \leq \|\alpha e\|_q \|\beta f\|^*_{q'} \leq \|\alpha\|_{\ell^q} \|e\|_{+\infty} \|\beta\|_{\ell^r} \|f\|^*_{p'} = \|\lambda\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{g_p} + \varepsilon .$$

PROPOSITION (1.1).- <u>Soit</u> x <u>un élément de</u> $E \hat{\otimes}_{g_p} F$. <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une suite</u> $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>d'éléments de</u> E , <u>tendant vers</u> 0 , <u>et une suite</u>

$f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F, telle que $x = \sum_n e_n \otimes f_n$ (série sommable dans $E \hat{\otimes}_{g_p} F$), avec $\|x\|_{g_p} \leq \|e\|_p \|f\|^*_{p'} \leq \|x\|_{g_p} + \varepsilon$.

Facile.

PROPOSITION (1.2).- L'application canonique de $E' \otimes F$ dans $\mathcal{L}(E;F)$ est continue, de norme ≤ 1, quand on munit $E \otimes F$ de la norme $\otimes_{g_p}$ (resp. $\otimes_{d_p}$), et se prolonge donc en une application linéaire continue de $E' \hat{\otimes}_{g_p} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_p} F$) dans $\mathcal{L}(E;F)$. Un élément u de l'image de cette application est appelé opérateur p-nucléaire à gauche (resp. à droite), et sa norme p-nucléaire est la norme quotient.

Un opérateur p-nucléaire est compact. Un opérateur $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est p-nucléaire à gauche si et seulement s'il peut s'écrire $u = \sum_n e'_n \otimes f_n$, avec $\|e'\|_p < +\infty$, $\|f\|^*_{p'} < +\infty$, $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$, ou encore si et seulement s'il se factorise par des applications linéaires continues

$$E \to \ell^\infty \xrightarrow{\alpha} \ell^p \to F$$

où α est une application diagonale, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\alpha_n t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, c^o si $p = +\infty$, et la norme p-nucléaire à gauche est la borne inférieure des $\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}$ pour toutes les représentations possibles. Pour un opérateur p-nucléaire à droite on a une factorisation

$$E \to \ell^{p'} \xrightarrow{\alpha} \ell^1 \to F .$$

Facile.

Pour $p = 1$, 1-nucléaire à gauche ou à droite signifie nucléaire.

Il résulte de la prop. (1.0) qu'un opérateur p-nuclaire est *a fortiori* q-nucléaire pour $q \geq p$.

§ 2. Les applications p-sommantes.

Soient E, F des Banach. On dit qu'une application linéaire continue u de E dans F est p-sommante, $0 < p \leq +\infty$, si, pour toute suite $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E, scalairement ℓ^p, la suite image $u(e)$ est ℓ^p. Alors l'ensemble $\Pi_p(E;F)$ de ces applications est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E;F)$. Il est évident, par Banach-Steinhaus ou le graphe fermé, que u est p-sommante, si et seulement s'il existe une constante M telle que, pour toute suite finie e d'éléments de E, $\|u(e)\|_p \leq M\|e\|_p^*$; la même inégalité reste alors vraie pour toute suite e d'éléments de E. La valeur minima des M possibles se note $\pi_p(u)$; π_p est une quasi-norme sur $\Pi_p(E;F)$ (une norme si $p \geq 1$) et le rend complet.

Si $u : E \to F$, $v : F \to G$ et $w : G \to H$ sont trois applications linéaires continues, et si v est p-sommante, wvu l'est aussi, et $\pi_p(wvu) \leq \|w\|\pi_p(v)\|u\|$.

Toute application linéaire continue est ∞-sommante, ce n'est donc pas une notion intéressante. D'autre part :

PROPOSITION (2.1) (PIETSCH).- <u>Une application p-sommante est a fortiori q-sommante pour $q \geq p$, et $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$.</u>

<u>Démonstration.</u>

Soit $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite scalairement ℓ^q d'éléments de E. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, $\|\alpha\|_{\ell^r} \leq 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$; alors $\alpha e = (\alpha_n e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est scalairement ℓ^p, donc $\alpha u(e)$ est ℓ^p, et en outre $\|\alpha u(e)\|_p \leq \pi_p(u)\|\alpha e\|_p^* \leq \pi_p(u)\|e\|_q^*$. Mais, ceci étant vrai pour toute $\alpha \in \ell^r$ de norme ≤ 1, on en déduit que $u(e)$ est ℓ^q, et que $\|u(e)\|_q \leq \pi_p(u)\|e\|_q^*$, C.Q.F.D.

Conséquence.

Pour toute u , il existe un p tel que u soit q-sommante pour $q > p$ et ne le soit pas pour $q < p$. On connaît des exemples pour lesquels la coupure a lieu pour un p donné quelconque, pourvu qu'il soit ≥ 1 . Par exemple, l'application diagonale $\ell^\infty \xrightarrow{\alpha} \ell^p$ où $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ℓ^p mais non dans ℓ^q pour $q < p$, est p-sommante, donc q-sommante pour $q \geq p$, mais ne l'est pas pour $q < p$.

Si l'on se permet de considérer aussi des E et F quasi-Banach, on peut trouver des cas analogues où la coupure a lieu pour un p donné, $0 < p < 1$. Mais, pour E et F Banach, on n'en connaît pas et le problème reste ouvert ; dans tous les cas connus, si u est $(1-\varepsilon)$-sommante, $\varepsilon > 0$, elle est q-sommante pour tout $q > 0$.

Les applications p-sommantes ont été systématiquement étudiées par PIETSCH. Voici le théorème fondamental :

THÉORÈME DE PIETSCH (2.2).- Soit u une application linéaire continue d'un Banach E dans un Banach F . Pour qu'elle soit p-sommante, $0 < p < +\infty$, il faut et il suffit qu'il existe une application linéaire continue v de E dans un espace $L^\infty(Z,\nu)$, Z espace topologique, ν probabilité de Radon sur Z , telle que $\|u(x)\| \leq \|v(x)\|_{L^p(Z,\nu)}$ pour tout $x \in E$; dans ce cas, $\pi_p(u) \leq \|v\|$. En outre, on peut supposer que Z est la boule unité de E' , munie de la topologie $\sigma(E',E)$, et que $v(x)$ est l'élément de $L^\infty(Z,\nu)$ défini par la fonction $\xi \mapsto \pi_p(u)\langle x,\xi\rangle$.

Démonstration.

1) Montrons la suffisance. On sait que l'injection $L^\infty(Z,\nu) \to L^p(Z,\nu)$ est isomorphe à l'injection $L^\infty(\hat{Z},\hat{\nu}) \to L^p(\hat{Z},\hat{\nu})$, où $\hat{Z}$ est le spectre (compact) de l'algèbre de Banach $L^\infty(Z,\nu)$, et qu'alors $L^\infty(\hat{Z},\hat{\nu})$ n'est autre que $C(\hat{Z})$. Nous pourrons donc, sans changer les notations, supposer que $L^\infty(Z,\nu)$ est remplacé par $C(Z)$.

Soit alors ${}^t v$ la transposée de v , ${}^t v : C'(Z) \to E'$. Soit $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite finie d'éléments de E .

$\sum_n \|u(e_n)\|^p \le \sum_n \int_Z |v(e_n)(z)|^p \, d\nu(z) = \int_Z \sum_n |\langle v(e_n) , \delta_{(z)}\rangle|^p \, d\nu(z) =$

$\int_Z \sum_n |\langle e_n , {}^t v(\delta_{(z)})\rangle|^p \, d\nu(z) \le \|v\|^p \|e\|_p^{*p}$ compte tenu de ce que $\int_Z d\nu(z) \le 1$;

donc u est p-sommante et $\pi_p(u) \le \|v\|$.

2) Montrons la nécessité (méthode de LINDENSTRAUSS-PELCZYNSKI). Supposons donc u p-sommante. Soit Z la boule unité de E' , munie de la topologie $\sigma(E', E)$. Dans l'espace $C(Z)$, considérons les deux ensembles suivants :

l'ensemble A des fonctions de la forme $\|u(e)\|_p^p - \pi_p^p(u)\, \|\langle e,\xi\rangle\|_{\ell^p}^p$ où e est une suite finie de E ; on voit sans peine que A est un cone convexe, par juxtaposition des suites ;

l'ensemble B des fonctions continues strictement positives, qui est un cone épointé ouvert convexe.

Ces ensembles sont disjoints, car, d'après la définition même de $\pi_p(u)$,
$\operatorname*{Inf}_{\xi\in B'} \left(\|u(e)\|_p^p - \pi_p^p(u)\, \|\langle e,\xi\rangle\|_{\ell^p}^p\right) \le 0$ pour toute suite finie e . D'après Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire continue ν sur $C(Z)$, c.-à-d. une mesure de Radon, vérifiant $\nu(\varphi) > 0$ pour toute $\varphi \in B$, donc $\nu \ge 0$, et $\nu(\varphi) \le 0$ pour toute $\varphi \in A$. On peut toujours supposer $\nu(1) = 1$. Prenons pour e la suite à un seul élément non nul x , alors on aura $\|u(x)\|_p^p - \pi_p^p(u) \int_Z |\langle x,\xi\rangle|^p \, d\nu(\xi) \le 0$, ce qui est le résultat cherché.

COROLLAIRE 1.- <u>L'application canonique</u> $C(Z) \to L^p(Z,\nu)$, Z <u>compact et</u> ν <u>Radon</u> ≥ 0 , <u>ou</u> $L^\infty(Z,\nu) \to L^p(Z,\nu)$, Z <u>topologique,</u> ν <u>mesure</u> ≥ 0 <u>de masse finie, est p-sommante</u> ($p \ge 1$, <u>pour que</u> L^p <u>soit un Banach</u> !).

COROLLAIRE 2 (*théorème de factorisation*).- *Pour que* $u : E \to F$ *soit* p-*sommante*, $0 < p < +\infty$, *il faut et il suffit qu'elle admette une factorisation* $u = u_2 u_1$,

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u_1"'] & L^{\infty}(Z,\nu) \arrow[r, "j"] & L^{p}(Z,\nu) \\
& S \arrow[ur, "j'"] \arrow[r, "u_2"] & F
\end{tikzcd}$$

où u_1, u_2, v *sont continues*, Z *est un espace topologique*, ν *une probabilité de Radon sur* Z, S *est un sous-espace vectoriel fermé de* $L^p(Z,\nu)$ *muni de la quasi-norme induite*, j *et* j' *sont les injections canoniques*, *le diagramme étant commutatif*. *Alors* $\pi_p(u) \leq \|u_2\| \, \|v\|$.

Démonstration.

1) Supposons qu'il existe une telle factorisation. Pour tout $x \in E$,
$\|u(x)\| \leq \|u_2\| \, \|u_1(x)\|_S = \|u_2\| \, \|v(x)\|_{L^p(Z,\nu)}$, d'où le résultat par la partie 1) de Pietsch.

2) Supposons u p-sommante. Utilisons la partie 2) de Pietsch. L'application $v(x) \xmapsto{u_2} u(x)$ est alors bien définie de $v(E)$ dans F, linéaire, et continue de norme ≤ 1 quand on munit $v(E)$ de la norme induite par $L^p(Z,\nu)$; si donc on appelle S l'adhérence de $v(E)$ dans $L^p(Z,\nu)$, munie de la quasi-norme induite, elle se prolonge en une application linéaire continue de norme ≤ 1 de S dans F, et $u = u_2 u_1$, avec $j'u_1 = jv$, ce qui est le résultat cherché.

COROLLAIRE 3.- *Si* u *est* p-*sommante*, $0 < p < +\infty$, *elle est faiblement compacte, et transforme toute partie faiblement relativement compacte de* E *en une partie relativement compacte de* F.

Démonstration.

L'image par jv de la boule unité de E est faiblement relativement compacte dans $L^p(Z,\nu)$, pour $p > 1$, puisque L^p est réflexif ; donc l'image par u_1 de cette boule est faiblement relativement compacte dans S , et par suite son image par u est faiblement relativement compacte dans F . Soit ensuite A faiblement relativement compacte dans E ; $v(A)$ est faiblement relativement compacte dans $L^\infty(Z,\nu)$, donc $jv(A)$ est relativement compacte dans $L^p(Z,\nu)$ ([1]), donc $u_1(A)$ relativement compacte dans S , et $u(A)$ relativement compacte dans F . Ceci règle le cas $p > 1$; les autres s'en déduisent par la prop. (2.1).

COROLLAIRE 4.- 1) L'application identique d'un Banach E ne peut être p-sommante pour $p < +\infty$, que s'il est de dimension finie.

2) Si, dans un Banach, toute suite sommable est absolument sommable, il est de dimension finie (Dvotezky-Rogers).

Démonstration.

1) L'image de la boule unité doit être faiblement relativement compacte, par la première partie du corollaire 3, puis relativement compacte par la 2ème partie. Donc E est de dimension finie.

2) Soit $u : E \to F$ une application qui transforme toute suite sommable en une suite ℓ^1 , c.-à-d. envoie $\ell^1 \hat{\otimes}_\varepsilon E$ dans $\ell^1 \hat{\otimes}_\pi F$. Par Banach-Steinhaus ou le graphe fermé, elle est continue, donc il existe M tel que, pour toute suite finie e , on ait $\|u(e)\|_1 \leq M \|e\|_1^*$, donc elle transforme aussi toute suite scalairement ℓ^1 en une

---

([1]) L'espace L^∞ a la propriété de Dunford-Pettis. Voir A. GROTHENDIECK : Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, Canadian Journal of Mathematics, Vol. 5, théorème 1, p. 139.

suite ℓ^1 , elle est 1-sommante. Alors 1) donne le résultat avec $F = E$, $u = Id$.

PROPOSITION (2.3) (PIETSCH).- Si $u : E \to F$ est p-sommante, et $v : F \to G$ est q-sommante, alors, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, vu est r-sommante ; si $\frac{1}{r} > 1$, vu est s-sommante pour tout $s > 0$ (voir la conséquence de la prop. (2.1)).

Nous l'admettrons.

PROPOSITION (2.4).- Une application p-nucléaire à gauche est p-sommante, si $p \geq 1$, et q-sommante pour tout $q > 0$ si $p < 1$ (voir la conséquence de la prop. (2.1)).

Démonstration.

En effet, u se factorise par $\ell^\infty \xrightarrow{\alpha} \ell^p$, avec $\alpha \in \ell^p$; or cette application, si $p \geq 1$, est p-sommante (immédiat, ou corollaire non moins immédiat du corollaire 1 de Pietsch). Ceci règle le cas $p \geq 1$. Nous admettrons le résultat relatif à $p < 1$, bien plus délicat.

THÉORÈME DE DUALITÉ DE SAPHAR (2.5).- Le dual de $E \hat{\otimes}_{d_p} F$ est $\Pi_{p'}(E;F')$, le dual de $(E \hat{\otimes}_{g_p} F)$ est $\Pi_{p'}(F;E')$.

Démonstration.

$\Pi_{p'}(E;F') \subset \mathcal{L}(E;F')$. D'autre part, si u est une forme linéaire continue sur $E \otimes_{d_p} F$, elle vérifie $|u(x,y)| \leq \|u\|_{(E \otimes_{d_p} F)} \|x\| \|y\|$, donc elle est une forme bilinéaire continue sur $E \times F$, donc identifiable à une application linéaire continue de E dans F' . Donc $(E \otimes_{d_p} F)'$ et $\Pi_{p'}(E;F')$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E;F')$. Il reste à montrer que, pour $u \in \mathcal{L}(E;F')$, les deux quantités (finies ou non) $\pi_{p'}(u) = \sup\limits_{\|e\|^*_{p'} \leq 1} \|u(e)\|_{p'}$ et

$$\|u\|_{(E \otimes_{d_p} F)'} = \sup_{\|e\|^*_{p'} \leq 1 \,,\, \|f\|_p \leq 1} \left| \sum_n \langle u(e_n) , f_n \rangle \right|$$ sont égales ($e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sont des suites finies d'éléments de E , F). Or

$$\sup_{\|e\|^*_{p'}\le 1}\left(\sup_{\|f\|^{\cdot}_{p}\le 1} |\Sigma\langle u(e_n), f_n\rangle|\right) = \sup_{\|e\|^*_{p'}\le 1} \|u(e)\|_{\ell^{p'}(F')}$$ (parce que le dual de $\ell^p(F)$ est $\ell^{p'}(F')$ pour p fini, et que, pour $p = +\infty$, le dual de $c^0(F)$ est $\ell^1(F')$)

$$= \sup_{\|e\|^*_{p'}\le 1} \|u(e)\|_{p'} = \pi_{p'}(u) \text{ , C.Q.F.D.}$$

Remarque.- Pour $p = 1$, on trouve que le dual de $E \hat{\otimes}_\pi F$ est $\mathcal{L}(E;F') = \mathcal{B}(E,F)$, ce qui est à peu près la définition de la norme $\otimes_\pi$.

§ 3. Probabilités cylindriques sur les espaces vectoriels topologiques.

Soit E un espace vectoriel topologique séparé localement convexe (il suffirait même qu'il soit séparé par son dual). On appelle probabilité cylindrique λ sur E la donnée d'un système cohérent de probabilités de Radon sur les quotients séparés de dimension finie de E . Un quotient séparé de dimension finie de E est de la forme E/F , où F est un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie ; si G en est un autre, $G \subset F$, on a une application canonique $\pi_{E/G\,,\,E/F}$ de E/G sur E/F ; si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de codimension finie, une probabilité cylindrique λ est une famille $(\lambda_{E/F})_{F\in\mathcal{F}}$ de probabilités, $\lambda_{E/F}$ probabilité sur E/F , telle que, pour $G \subset F$, $\lambda_{E/F} = \pi_{E/G\,,\,E/F}(\lambda_{E/G})$; tel est le sens du mot cohérent. Si μ est une probabilité de Radon sur E , elle définit une probabilité cylindrique λ_μ par $(\lambda_\mu)_{E/F} = \pi_{E/F\,,\,E}(\mu)$, où $\pi_{E/F\,,\,E}$ est la surjection canonique de E sur E/F ; cette application $\mu \mapsto \lambda_\mu$ est injective, et permet désormais d'identifier une probabilité de Radon à la probabilité cylindrique qu'elle définit, et de remplacer λ_μ par μ .

On peut naturellement remplacer le système des $\lambda_{E/F}$ par le système des λ_u, u application linéaire continue de E dans un espace vectoriel de dimension finie, puisque de telles applications transitent par des quotients séparés de dimension finie ; la condition de cohérence est ici $\lambda_{v \circ u} = v(\lambda_u)$. Les u ne forment pas un ensemble, mais on peut par exemple se borner aux applications linéaires continues de E dans des espaces $\mathbb{K}^n$; une telle application est exactement définie par un système $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de n éléments du dual E' .

THÉORÈME (3.1) DE PROKHOROV.- Soit λ une probabilité cylindrique sur E . Pour qu'elle soit une probabilité de Radon, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de E tel que, pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\lambda_{E/F}(\pi_{E/F\,,\,E}(K)) \geq 1 - \varepsilon$.

Admis.

Si X est un espace topologique séparé, on peut mettre sur l'espace $\mathcal{P}(X)$ des probabilités de Radon sur X une topologie séparée, la topologie étroite (qui, si X est régulier, est la topologie de la convergence simple sur les fonctions continues bornées). Sur l'espace $\check{\mathcal{P}}(E)$ des probabilités cylindriques sur E , on introduira la topologie cylindrique ; c'est la moins fine pour laquelle les applications $\lambda \longmapsto \lambda_{E/F}$ sont continues de $\check{\mathcal{P}}(E)$ dans $\mathcal{P}(E/F)$. Elle est séparée.

On doit introduire maintenant les variables aléatoires et fonctions aléatoires. Une variable aléatoire scalaire, relative à un espace topologique Ω muni d'une probabilité de Radon μ , est une μ-classe d'applications μ-mesurables de Ω dans $\mathbb{K}$.

L'espace de ces variables aléatoires se notera $L^0(\Omega, \mu)$; il contient tous les $L^p(\Omega, \mu)$, $p > 0$. On le munit de la topologie de la convergence en probabilité ; un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie est formé des ensembles

$$\{f \in L^0(\Omega, \mu) \;;\; \mu\{\omega \in \Omega \;;\; |f(\omega)| > \delta\} \leq \varepsilon\}$$

pour $\varepsilon , \delta > 0$. Alors $f \longmapsto f(\mu)$ est une application continue de $L^{o}(\Omega , \mu)$ dans $\check{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$ ("la convergence en probabilité implique la convergence en loi").

Alors une fonction aléatoire scalaire f sur un ensemble T , relative à (Ω , μ) , est une application de T dans $L^{o}(\Omega , \mu)$; pour tout $t \in T$, $f(t)$ est une variable aléatoire, c.-à-d. seulement une μ-classe de fonctions. Une version de la fonction aléatoire est une fonction $\tilde{f}$ sur $T \times \Omega$, telle que, pour tout $t \in T$, $f(t , .)$ appartienne à la classe de $f(t)$. Si $t_1 , t_2 ,\ldots, t_n$ sont n éléments de T , $(f(t_1) , f(t_2) ,\ldots, f(t_n))$ est une μ-classe d'applications μ-mesurables de Ω dans $\mathbb{K}^n$; elle définit donc une probabilité image sur $\mathbb{K}^n$, qu'on appelle loi de $(f(t_1) ,\ldots, f(t_n))$, ou loi marginale de f relative à $t_1 , t_2 ,\ldots, t_n$. On dit que deux fonctions aléatoires f , f' , sur le même ensemble T , mais relativement à (Ω , μ) , (Ω' , μ') quelconques, sont isonomes, si, pour tout système $t_1 , t_2 ,\ldots, t_n$, d'un nombre fini d'éléments de T , leurs lois marginales sont les mêmes. On remplacera souvent l'une par l'autre en théorie des probabilités. On définit alors les classes d'isonomie de fonctions aléatoires (qui sont des classes d'équivalence pour l'isonomie, donc ne sont pas des ensembles).

Si T est un espace topologique, un espace vectoriel, un espace vectoriel topologique, la fonction aléatoire f sera dite continue, linéaire, linéaire continue, si $f : T \to L^{o}(\Omega , \mu)$ a cette propriété. Une version $\tilde{f}$ sera dite p.s. (presque sûrement) continue, linéaire, linéaire continue, si, pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, $\tilde{f}(. ,\omega)$ est continue, linéaire, linéaire continue. En général une fonction aléatoire continue n'a pas de version p.s. continue, et cette recherche de propriétés presque sûres est le problème essentiel des probabilités.

PROPOSITION (3.2).- <u>Il existe une correspondance bijective entre les probabilités cylindriques sur</u> E <u>et les classes d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires</u>

sur E' . Si λ est une probabilité cylindrique, f_λ est l'unique classe d'isonomie de fonctions aléatoires pour laquelle, pour $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in E'$, la probabilité $\lambda_{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}$ sur $\mathbb{K}^n$ définie par $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : E \to \mathbb{K}^n$, soit la loi marginale de f_λ pour $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; si f est une fonction aléatoire linéaire sur E' , λ_f est l'unique probabilité cylindrique sur E ayant la même propriété.

Âne qui trotte. Admis.

Pour que la classe d'isonomie associée à λ contienne une fonction aléatoire, ayant une version presque sûrement linéaire continue sur $\sigma(E',E)$, il faut et il suffit que λ soit de Radon sur $\sigma(E,E')$; dans ce cas, la fonction aléatoire f en question est définie justement par $\Omega = E$, $\mu = \lambda$, avec la version $\tilde{f}$ de f définie par $\tilde{f}(x,\xi) = \langle x,\xi \rangle$.

§ 4. L'ordre, le type, les applications radonifiantes.

Soit E un Banach. Une probabilité de Radon sur E est dite d'ordre $p > 0$, si la fonction norme est de puissance p-ième intégrable ; on pose

$$\|\lambda\|_p = \left(\int_E \|x\|^p \, d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Si E est seulement un evt, λ sera dite d'ordre p , s'il existe une partie bornée B de E , équilibrée fermée, dont la jauge (qui vaut $+\infty$ en dehors de l'espace vectoriel E_B engendré par B) est de puissance p-ième intégrable (ce qui implique que λ soit portée par E_B). Mais nous aurons besoin d'étendre à $p = 0$; toute probabilité de Radon sur E sera dite d'ordre 0 .

Une probabilité cylindrique λ sur E est dite de type p , $0 \leq p \leq +\infty$, si, pour toute (ou pour une) fonction aléatoire associée $f : E' \to L^0(\Omega, \mu)$, f est continue de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$. Si E est un Banach, et $p > 0$, on posera

$$\|\lambda\|_p^* = \sup_{\xi \in E,\ \|\xi\| \leq 1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p \, d\lambda_\xi(t) \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Et alors λ est de type p, si et seulement si $\|\lambda\|_p^* < +\infty$.

Soient E, F des evt, u une application linéaire faiblement continue de E dans F. Si λ est une probabilité cylindrique sur E, elle a une probabilité cylindrique image $u(\lambda)$ sur F ; si, en effet, v est une application linéaire continue de F dans un espace vectoriel de dimension finie, on pourra poser $(u(\lambda))_v = \lambda_{v \circ u}$. On dira que u est p-radonifiante, $0 \leq p \leq +\infty$, si, pour toute probabilité cylindrique λ sur E, de type p, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p.

Supposons, en particulier, que λ soit de Radon sur E Banach et $p > 0$; bien évidemment $\|\lambda\|_p^* \leq \|\lambda\|_p$. Soit en particulier $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arbitraire de nombres > 0, de somme 1. Considérons la probabilité $\lambda_e = \sum_n c_n \, \delta_{(c_n^{-\frac{1}{p}} e_n)}$. Alors on a exactement $\|\lambda_e\|_p = \|e\|_p$, et $\|\lambda_e\|_p^* = \|e\|_p^*$; on se doute donc que les applications p-radonifiantes dans les Banach sont intimement liées aux applications p-sommantes. En particulier, toute application p-radonifiante est a fortiori p-sommante. En effet, soit e une suite scalairement ℓ^p. Alors $\|\lambda_e\|_p^* < +\infty$, donc λ_e est une probabilité de Radon de type p, donc $u(\lambda_e)$ est de Radon d'ordre p, donc $\|u(\lambda_e)\|_p < +\infty$, donc $u(e)$ est ℓ^p, et u est bien p-sommante.

On ne pourra pas obtenir une relation directe dans le cas général. On doit introduire des conditions d'approximation.

Bornons-nous au cas des Banach et de $p > 0$, bien qu'on puisse étudier le cas général. Une probabilité cylindrique λ sur E est dite de type p très approximable, si elle est limite cylindrique d'un filtre de probabilités de Radon λ_J, combinaisons finies de mesures de Dirac, pour lesquelles $\|\lambda_j\|_p^* \leq \Lambda$ constante. La borne inférieure des Λ possibles se note $\|\lambda\|_p^{*ta}$; bien évidemment $\|\lambda\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^{*ta}$. Alors u, application linéaire continue d'un Banach E dans un Banach F, est dite très approximativement p-radonifiante si, pour toute probabilité cylindrique λ, de type p très approximable, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p. "Très approximativement p-radonifiante" est une propriété moins forte que p-radonifiante, mais qui entraîne évidemment " p-sommante ", car la probabilité λ_e de l'exemple ci-dessus est de type p très approximable, et $\|\lambda_e\|_p^{*ta} = \|\lambda_e\|_p^* = \|e\|_p^*$.

THÉORÈME (4.1).- Soit $p > 0$. Soient E, F des Banach, u une application linéaire continue de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) u est p-sommante.

2) u est très approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(F'',F')$.

3) Il existe un M tel que, pour toute probabilité de Radon λ sur E, combinaison finie de mesures de Dirac, on ait :

$$\|u(\lambda)\|_p \leq M\|\lambda\|_p^* .$$

Le plus petit nombre M vérifiant cette inégalité est $\pi_p(u)$, et pour toute probabilité cylindrique λ de type p très approximable, on a $\|u(\lambda)\|_p \leq M\|\lambda\|_p^{*ta}$.

Sans introduire la notion de 0-sommante, on a des résultats, plus compliqués mais analogues, pour $p = 0$.

Démonstration.

2 implique 1, nous l'avons déjà vu. Ensuite 3 est exactement, par la correspondance ci-dessus entre e et λ_e, l'inégalité des applications p-sommantes, $\|u(e)\|_p \leq M\|e\|_p^*$, donc 1 implique 3. Il reste à montrer que 3 implique 2. Soit donc λ une probabilité cylindrique de type p très approximable sur E. Elle est limite de λ_j de Radon à support fini, avec $\|\lambda_j\|_p^* \leq \Lambda$. On a donc $\|u(\lambda_j)\|_p \leq M\Lambda$. Et

les $u(\lambda_j)$ convergent cylindriquement vers $u(\lambda)$.

L'ensemble $\mathcal{M}$ des probabilités de Radon μ sur $X = \sigma(F',F)$ qui vérifient $\|\mu\|_p \leq \Lambda M$ est trivialement fermé dans l'espace $\mathcal{P}(X)$ des probabilités sur X (muni de la topologie étroite) ; mais il n'est pas <u>a priori</u> fermé dans l'espace $\check{\mathcal{P}}(X)$ des probabilités cylindriques (muni de la topologie cylindrique). Si toutefois nous montrons que $\mathcal{M}$ est compact dans $\mathcal{P}(X)$, il le sera <u>a fortiori</u> dans $\check{\mathcal{P}}(X)$ moins fin, donc fermé, et on saura que $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur $\sigma(F',F)$, ce qui donnera le résultat. Or il existe un théorème connu de PROKHOROV qui donne une condition suffisante pour qu'un ensemble $\mathcal{M}$ de probabilités de Radon sur un espace topologique X soit relativement compact (ici $\mathcal{M}$ est fermé) : c'est que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que, pour toute $\mu \in \mathcal{M}$, $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$. D'après la relation $\|\mu\|_p \leq \Lambda M$, on voit que, pour ε donné, il existe une boule B'' de F'' telle que $\mu(\complement B'') \leq \varepsilon$ ou $\mu(B'') \geq 1 - \varepsilon$; or la boule B'' est compacte dans $\sigma(F'',F')$, C.Q.F.D.

<u>Remarque</u>.- On en déduit un théorème de PIETSCH (2.2) pour les applications p-radonifiantes. Le théorème a été étendu à $p = 0$ par SUNYACH.

<u>Elimination de la condition d'approximation.</u>

PROPOSITION (4.2).- <u>Dans le théorème</u> (4.1), <u>on peut supprimer</u> "<u>très approximativement</u>" <u>dans la condition 2</u>, <u>dans les deux cas suivants</u> :

a) E <u>a la propriété d'approximation métrique suivante</u> : <u>l'application identique de</u> E' <u>est limite d'applications linéaires de rang fini</u>, <u>de norme</u> ≤ 1 , <u>continues de</u> $\sigma(E',E)$ <u>dans</u> E' ;

b) $p \geq 1$.

Démonstration.

Dans le cas a, on montre que toute probabilité cylindrique de type p est de type p très approximable, avec $\|\lambda\|_p^{*ta} = \|\lambda\|_p^*$. La propriété d'approximation indiquée pour E est un peu plus forte que celle de Banach ; elle est vérifiée dans tous les cas usuels.

Dans le cas b, on utilisera la factorisation de PIETSCH (corollaire 1 du théorème (2.2)) : $L^\infty(Z,\nu)$ a la propriété d'approximation métrique que nous venons de signaler, $L^\infty \to L^p$ est p-sommante, d'où l'on déduira aussitôt que u_1 est p-radonifiante de E dans $\sigma(S",S')$, donc u de E dans $\sigma(F",F')$.

Remplacement de $\sigma(F",F')$ par F .

PROPOSITION (4.3).- Dans l'énoncé du théorème (4.1), on peut remplacer $\sigma(F",F')$ par F , dans les cas suivants :

a) F est réflexif ;

b) $1 < p < +\infty$ (KWAPIEN).

Démonstration.

Soit λ une probabilité cylindrique de type p très approximable sur E ; alors, si F est réflexif, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur $\sigma(F,F')$. Mais un théorème de PHILLIPS dit que les probabilités de Radon sur F ou $\sigma(F,F')$ sont les mêmes [1].

Soit maintenant $1 < p < +\infty$. On utilise PIETSCH comme dans la proposition précédente : comme $L^p(Z,\nu)$ est réflexif, $j : L^\infty \to L^p$ est p-radonifiante, donc u_1 est p-radonifiante de E dans S , donc u de E dans F .

---

(1) Voir Séminaire Schwartz, Ecole Polytechnique, 1969/70, page XI,4.

PROPOSITION (4.4).- Une application p-radonifiante de E dans F est a fortiori q-radonifiante pour $q \geq p$.

S'il y avait "très approximativement radonifiante", $\sigma(F'',F')$, et $p > 0$, ce serait la proposition (2.1) ; le cas $p = 0$ a été démontré par KWAPIEN ; le passage à "radonifiante" et F est plus compliqué, nous l'admettrons.

PROPOSITION (4.5).- Une application p-nucléaire à gauche est p-radonifiante, si $p \geq 1$, et 0-radonifiante si $p < 1$.

Cela résulte de la prop. (2.4) pour $1 < p < +\infty$, d'après (4.2) et (4.3) ; les autres cas sont plus compliqués, notamment $p < 1$.

Remarque.- Comme nous l'avons dit à la conséquence de la proposition (2.1), dans tous les cas connus, dès qu'une application est p-radonifiante pour un $p < 1$, elle est 0-radonifiante. C'est sans doute un théorème !

§ 5. Les injections radonifiantes dans les espaces $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, dx)$.

On définit sur $\mathbb{R}^n$ un opérateur de dérivation d'ordre "fractionnaire" (i.e. réel) D^α , comme suit. Si K^α est la distribution dont l'image de Fourier est $(1 + |\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, et si φ est une fonction C^∞ à support compact, égale à 1 au voisinage de l'origine, on posera $D^\alpha T = (\varphi K^\alpha) * T$. On vérifie alors aisément que $D^{\alpha+\beta}T$ et $D^\alpha D^\beta T$ diffèrent d'une fonction C^∞ . Soit alors W un espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E} \subset W \subset \mathcal{D}'$, avec des injections continues, et tel que la convolution avec une mesure à support compact opère continuement de W dans lui-même. Par exemple, $W = L^p_{loc}$, $1 \leq p \leq +\infty$, ou l'espace C des fonctions continues, ou l'espace $\mathcal{M}$ des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^n$. On appellera alors W^α l'espace des distributions dont la dérivée d'ordre α est dans W . On dira que T converge vers 0 dans W^{α} , si T converge vers 0 dans $\mathcal{D}'$ et si $D^{\alpha}T$ converge vers 0 dans W . Toutes les bonnes propriétés qu'on souhaite sont vérifiées entre ces espaces. Les espaces de Sobolev H^{α}_{loc} ne sont autres que les $(L^2_{loc})^{\alpha}$.

L'espace $\mathbb{R}^n$ n'est malheureusement pas compact, mais il s'en faut de peu ; une adaptation facile du corollaire 1 de PIETSCH (2.2), compte tenu des théorèmes (4.1), (4.2), (4.3), dit alors que l'injection canonique de C ou L^{∞}_{loc} dans L^p_{loc} est p-radonifiante, pour $p \geq 1$. Alors :

THÉORÈME (5.1).- <u>Soient</u> $1 \leq a, b \leq +\infty$. <u>Soit</u> $1 \leq p \leq +\infty$. <u>Alors</u> $(L^a_{loc})^{\alpha} \subset (L^b_{loc})^{\beta}$ <u>si</u> $\frac{\alpha - \beta}{n} > (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^+$, <u>et l'injection correspondante est sûrement</u> p-<u>radonifiante</u> <u>si</u> $\frac{\alpha - \beta}{n} > \frac{1}{a} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{b})^+$.

<u>Démonstration.</u>

L'injection résulte des inégalités de Sobolev. Ensuite, supposons qu'il existe un γ réel tel que D^{γ} opère de $(L^a_{loc})^{\alpha}$ dans L^{∞}_{loc} , et $D^{-\gamma}$ de L^p_{loc} dans $(L^b_{loc})^{\beta}$; alors, par $(L^a_{loc})^{\alpha} \xrightarrow{D^{\gamma}} L^{\infty}_{loc} \to L^p_{loc} \xrightarrow{D^{-\gamma}} (L^b_{loc})^{\beta}$, on en déduira que l'injection $(L^a_{loc})^{\alpha} \to (L^b_{loc})^{\beta}$ est bien p-radonifiante, puisque $L^{\infty}_{loc} \to L^p_{loc}$ l'est. Or ceci se produit sûrement si $\frac{\alpha - \gamma}{n} > \frac{1}{a}$, $\frac{\gamma - \beta}{n} > (\frac{1}{p} - \frac{1}{b})^+$, c.-à-d. si $\frac{\alpha - \beta}{n} > \frac{1}{a} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{b})^+$.

<u>Application au mouvement brownien.</u>

Soit E un espace hilbertien. Les quotients E/F de dimension finie peuvent être remplacés par les sous-espaces F^o de dimension finie, et alors, si $G \subset F$, la surjection canonique $E/G \to E/F$ peut se remplacer par la projection orthogonale $G^o \to F^o$. On peut donc définir une probabilité cylindrique sur E comme un système de probabilités de Radon sur les sous-espaces vectoriels de dimension finie, cohérent pour les projections orthogonales. La probabilité de Gauss sur un espace euclidien H de dimension finie n est par définition $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right) dx$; si $G^o \supset F^o$, la projection orthogonale de la probabilité de Gauss de G^o sur F^o est la probabilité de Gauss sur F^o . On appelle donc probabilité cylindrique de Gauss γ sur un espace hilbertien réel E le système cohérent des probabilités de Gauss sur tous les sous-espaces de dimension finie. Ce n'est jamais une probabilité de Radon si la dimension de E est infinie. Si $\xi \in E'$, la probabilité associée γ_ξ sur $\mathbf{R}$ n'est autre que la probabilité de Gauss sur $\mathbf{R}$ de paramètre $\|\xi\|$, c.-à-d. l'image de la probabilité de Gauss normale par l'homothétie de rapport $\|\xi\|$. Donc γ est de type p pour tout p fini ≥ 0 , et $\|\gamma\|_p^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

Considérons en particulier la probabilité cylindrique de Gauss sur $L^2(\mathbf{R}, dx)$. Soit J l'opération primitive, qui à $f \in L^2$ associe la fonction Jf , définie par $Jf(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. On voit que J est continue de L^2 dans $(L^2_{loc})^1$. Alors l'image $J(\gamma)$ est une probabilité cylindrique sur $(L^2_{loc})^1$, donc *a fortiori* sur l'espace C des fonctions continues. On peut lui associer une fonction aléatoire linéaire sur le dual $(L^2_{comp})^{-1}$, soit f , donc une fonction aléatoire $\bar{f}$ sur $\mathbf{R}$ elle-même, en posant $\bar{f}(x) = f(\delta_{(x)})$, car $\delta_{(x)} \in (L^2_{comp})^{-1} = ((L^2_{loc})^1)'$. On démontre alors sans peine que $\bar{f}(0) = 0$, et que, si $0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_n$ sont des points de $\mathbf{R}^+$, les variables aléatoires $\bar{f}(t_1)$, $\bar{f}(t_2) - \bar{f}(t_1)$, ..., $\bar{f}(t_n) - \bar{f}(t_{n-1})$, sont gaussiennes indépendantes, de paramètres $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2 - t_1}$, ..., $\sqrt{t_n - t_{n-1}}$: $\bar{f}$ est la fonction aléatoire du mouvement brownien.

THÉORÈME (5.2).- *La fonction aléatoire du mouvement brownien admet une version p.s. continue et même höldérienne de tout ordre* $< 1/2$.

Démonstration.

Cela revient à montrer que l'image de $J(\gamma)$, probabilité cylindrique sur $(L^2_{loc})^1$, de type p pour tout p fini, par l'injection de $(L^2_{loc})^1$ dans C^β ou $(L^\infty_{loc})^\beta$, $\beta < 1/2$, est de Radon. Or il suffit d'appliquer la proposition (5.1) : on doit avoir $1 - \beta > \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ ou $\beta < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, et p est fini arbitraire, C.Q.F.D.

On peut étendre ces résultats aux fonctions aléatoires à accroissements indépendants, obéissant à des lois stables de P. Lévy.

§ 6. Le théorème de dualité.

Soit λ une probabilité cylindrique sur un evt E . On dira qu'elle est de cotype p , $0 \leq p \leq +\infty$, si, pour une fonction aléatoire associée $f : E' \to L^0(\Omega,\mu)$, la convergence vers 0 de $f(\xi)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$ entraîne la convergence vers 0 de ξ dans E' .

Par exemple la probabilité cylindrique de Gauss γ sur un Hilbert réel E , qui est de type p pour tout p fini ≥ 0 , est de cotype p pour tout p , puisque la loi de probabilité γ_ξ est la loi de Gauss de paramètre $\|\xi\|$. Si E est un Banach, et λ une probabilité cylindrique, on peut poser, pour $p > 0$:

$$^*\|\lambda\|_p = \Big(\operatorname*{Inf}_{\|\xi\| \geq 1} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p \, d\lambda_\xi(t)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)^{-1} ,$$

et λ est de cotype p si et seulement si $^*\|\lambda\|_p < +\infty$. Pour la loi de Gauss,

$$^*\|\gamma\|_p = (\|\gamma\|_p^*)^{-1} = \Big(\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p \, e^{-\frac{t^2}{2}} dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)^{-1} .$$

THÉORÈME DE DUALITÉ (6.1).- <u>Soient</u> E , F <u>des Banach</u>, u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F . <u>S'il existe une probabilité cylindrique</u> γ <u>sur</u> $\sigma(F',F)$, <u>de cotype</u> p , <u>dont l'image par</u> ${}^t u$ <u>est de Radon d'ordre</u> p <u>sur</u> $\sigma(E',E)$, u <u>est</u>

<u>très approximativement</u> <u>p-radonifiante de</u> E <u>dans</u> $\sigma(F'', F')$, <u>et</u>

$$\pi_p(u) \leq {}^*\|\gamma\|_p \|{}^t u(\gamma)\|_p \ .$$

C'est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général, où E , F sont des evt quelconques, et où les indices p sont remplacés par des fonctions de majoration presque quelconques.

Pour E , F Banach et $0 < p < +\infty$, il existe une démonstration facile donnée par KWAPIEN. Il suffit, en effet, d'après le théorème (4.1), de montrer que u est p-sommante, donc qu'elle vérifie une inégalité de PIETSCH (2.2). Or, pour $x \in E$:

$$\|u(x)\| \leq {}^*\|\gamma\|_p \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p \, d\gamma_{u(x)}(t)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(puisque } \gamma \text{ est de cotype } p\text{)}$$

$$= {}^*\|\gamma\|_p \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p \, d({}^t u(\gamma))_x(t)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(sur } F' \text{, les formes linéaires}$$

$u(x)$ et $x \circ {}^t u$ coïncident)

$$= {}^*\|\gamma\|_p \left(\int_{E'} |\langle x,\xi\rangle|^p \, d({}^t u\gamma)(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad ({}^t u(\gamma) \text{ est une mesure de Radon}$$

sur $\sigma(E',E)$!)

$$= {}^*\|\gamma\|_p \left(\int_{E'} \left|\frac{\langle x,\xi\rangle}{\|\xi\|}\right|^p \|\xi\|^p \, d({}^t u\gamma)(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= {}^*\|\gamma\|_p \, \|{}^t u(\gamma)\|_p \left(\int_Z \left|\frac{\langle x,\xi\rangle}{\|\xi\|}\right|^p d\nu(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

où ν est la probabilité $\dfrac{\|\xi\|^p \, {}^t u(\gamma)}{\|{}^t u\gamma\|_p^p}$ sur $Z = \sigma(E',E)$.

Si donc on pose

$$(v(x))(\xi) = {}^*\|\gamma\|_p \, \|{}^t u(\gamma)\|_p \frac{\langle x,\xi\rangle}{\|\xi\|} ,$$

v est une application linéaire continue de E dans $L^\infty(Z,\nu)$, et

$\|u(x)\| \leq \|v(x)\|_{L^p(Z,\nu)}$, C.Q.F.D.

§ 7. Cas des espaces hilbertiens.

THÉORÈME (7.1).- *Soient* E , F *des espaces hilbertiens réels,* u *une application linéaire continue de* E *dans* F . *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1) u *est de Hilbert-Schmidt* ;

2) u *est* p-*radonifiante, pour un* p *fini* ;

3) u *est* p-*radonifiante pour tout* p ;

4) *L'image* $u(\gamma)$ *de la probabilité cylindrique de Gauss de* E *est de Radon sur* F .

Démonstration.

"u est de Hilbert-Schmidt" entraîne "u est 2-nucléaire à gauche", donc "u est 2-radonifiante" (prop. (4.5)), donc 1 implique 2. Ensuite 2 implique 4, puisque γ est de type p pour tout p fini. Supposons maintenant 4, et appliquons le théorème de dualité (6.1) : γ est de cotype p pour tout p , en particulier pour $p = 0$, et $u(\gamma)$ est de Radon ; donc ${}^t u$ est 0-radonifiante de F' dans E' (F' a la propriété d'approximation et E' est réflexif).

Mais alors, si γ' est la probabilité cylindrique de Gauss sur F' , elle est de type 0 , donc ${}^t u(\gamma')$ est de Radon sur E' . Une nouvelle application du théorème de dualité montre que u est 0-radonifiante, donc p-radonifiante pour tout p , on a donc 3. Enfin 3 entraîne que u soit 2-sommante, donc de Hilbert-Schmidt, c.-à-d. 1, C.Q.F.D.

Remarque.- Quand on a la chance que ce soit possible, deux applications consécutives du théorème de dualité sont très fructueuses ; elles donnent un résultat du type 4 $\Rightarrow$ 3 : il suffit que l'image par u d'une certaine probabilité cylindrique bien choisie soit de Radon, pour que u soit radonifiante.

COROLLAIRE.- Les propriétés précédentes sont encore équivalentes aux suivantes :

5) u est p-nucléaire à gauche ou à droite, pour un $p > 1$;

6) u est p-nucléaire à gauche ou à droite pour tout $p > 1$.

En outre, sur $E \otimes F$, les normes $\otimes_{g_p}$ et $\otimes_{d_p}$ sont équivalentes à la norme de Hilbert-Schmidt, pour tout $p > 1$.

Démonstration.

D'après le théorème de dualité de SAPHAR (2.5), le dual de $E \hat{\otimes}_{d_p} F$ est $\Pi_{p'}(E;F')$, pour $p' \neq +\infty$, c.-à-d. $p > 1$, ce dernier est le produit tensoriel de Hilbert-Schmidt $E' \hat{\otimes}_2 F'$ (avec une norme équivalente) d'après l'équivalence $1 \Leftrightarrow 2$ du théorème ; donc $E \hat{\otimes}_{d_p} F$ est $E \hat{\otimes}_2 F$, avec une norme équivalente. De même $E \hat{\otimes}_{g_p} F$. Alors l'application canonique de $E' \hat{\otimes}_{g_p} F$ dans $\mathcal{L}(E;F)$, est $E' \hat{\otimes}_2 F \to \mathcal{L}(E;F)$, et les opérateurs p-nucléaires à gauche sont exactement les Hilbert-Schmidt ; et de même les p-nucléaires à droite.

Remarque.- Cela cesse d'être vrai pour $p \leq 1$: pour $p = 1$, les p-nucléaires sont les nucléaires, et non les Hilbert-Schmidt. Un être jeune et encore plein d'illusions aurait pu croire que, si E est un Hilbert, et si u est un opérateur normal compact de valeurs propres λ_n (chacune comptée avec son ordre de multiplicité), u est p-nucléaire si et seulement si $\sum_n |\lambda_n|^p < +\infty$; c'est vrai pour $p = 1$ ou 2 , mais pas en général, puisque, pour $p > 1$, u est p-nucléaire si et seulement s'il est de Hilbert-Schmidt.

§ 8. Exemples d'applications du théorème de dualité.

Exemple 1.- Sur $\mathbb{R}^n$, l'injection canonique de $(L^2_{loc})^\alpha$ dans $(L^b_{loc})^\beta$ est p-radonifiante, d'après (5.1), dès que $\frac{\alpha - \beta}{n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$. Oublions, pour simplifier, que $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact, et supprimons tous les loc et comp . Alors la probabilité cylindrique de Gauss sur $(L^2)^\alpha$ est de type p pour tout p fini ; donc son image dans $(L^b)^\beta$ est de Radon. Mais la probabilité cylindrique de Gauss est aussi de cotype p pour tout p , donc de cotype 0 , et nous voyons que son image est de Radon ; le théorème de dualité dira, par transposition, que l'injection de $(L^b)^\beta$ dans $(L^2)^\alpha$ est 0-radonifiante. En remplaçant la probabilité cylindrique de Gauss par celles qui sont associées aux processus stables de Paul LEVY, on en déduit, par un calcul raisonnable :

THÉORÈME (8.1).- Soient $1 \leq a , b \leq +\infty$. L'injection canonique de $(L^a_{loc})^\alpha$ dans $(L^b_{loc})^\beta$ est 0-radonifiante, donc p-radonifiante pour tout p fini, dès que $\frac{\alpha - \beta}{n} > \mathrm{Max}(1 - \frac{1}{b}, \mathrm{Min}(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}))$.

Le problème reste ouvert de caractériser les applications p-radonifiantes de $(L^a_{loc})^\alpha$ dans $(L^b_{loc})^\beta$; comme il y a 5 paramètres, cela promet des réjouissances. Dans certains cas, le théorème (5.1) donne un meilleur résultat que (8.1) ; dans d'autres cas, c'est le contraire. Pour les 0-radonifiantes, je ne serais pas étonné que (8.1) soit proche du meilleur résultat.

Exemple 2.- Par le théorème de dualité, j'ai pu caractériser les applications diagonales $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\alpha_n t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace de suites $\ell^{a'}$ dans l'espace de suites ℓ^b (a' conjugué de a , c'est plus simple pour le résultat) :

THÉORÈME (8.2).- $\ell^{a'} \xrightarrow{\alpha} \ell^b$ est 0-radonifiante, si et seulement si $\alpha \in \ell^r$, avec : $r = \mathrm{Min}(a,b)$, sauf dans les cas suivants :

1) $a = b < 2$, où c'est $\sum_n |\alpha_n|^b \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) < +\infty$;

2) $a > b \geq 2$, où c'est $r = a = \mathrm{Max}(a,b)$;

3) $a > 2 > b$, où r est donné par $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{2}$.

PIETSCH m'a indiqué qu'il avait caractérisé les applications diagonales p-radonifiantes de ℓ^a dans ℓ^b, pour tout $p \geq 1$. Le cas $p < 1$ est sans doute le même que $p = 0$.

COROLLAIRE.- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur (Ω,μ), dont l'enveloppe convexe est bornée dans $L^0(\Omega,\mu)$. Si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes, telle que $\sum_n |\alpha_n| \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) < +\infty$, la série $\sum_n |\alpha_n X_n|$ est μ-presque partout convergente.

Il existe une suite X_n (à savoir : les X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de probabilité d'Augustin Cauchy $\frac{1}{\pi} \frac{dt}{1 + t^2}$), bornée dans $L^0(\Omega,\mu)$ telle que, pour toute suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_n |\alpha_n| \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) = +\infty$, la série $\sum_n |\alpha_n X_n|$ diverge μ-presque partout.

FIN, OUF !

Tous les théorèmes énoncés ici sont complètement démontrés dans mon Séminaire de l'Ecole Polytechnique 1969/70, Applications radonifiantes ; on y trouvera aussi une Bibliographie. [1]

---

[1] Publicité non payée.