Yvette Amice

Conjecture de Schanuel sur la transcendance d'exponentielles

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 382, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__1_0>

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 382 Novembre 1970

CONJECTURE DE SCHANUEL SUR LA TRANSCENDANCE D'EXPONENTIELLES

(d'après James AX)

par Yvette AMICE

1. Résultats sur la conjecture de Schanuel.

Il s'agit de la conjecture suivante, formulée par Schanuel [6] :

(S) Soient $y_1, \ldots, y_n$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors
$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, \ldots, y_n, e^{y_1}, \ldots, e^{y_n}) \geq n .$$

Nous désignons ici par $\dim_K L$ le degré de transcendance du corps L sur son sous-corps K. Tous les corps considérés sont de caractéristique 0.

A ma connaissance, (S) n'est pas devenue un théorème. Elle recouvre les principaux résultats connus et les conjectures usuelles sur la transcendance d'exponentielles, par exemple :

COROLLAIRE S1.- Les nombres e et π sont algébriquement indépendants.

En effet, en choisissant $y_1 = 1$ et $y_2 = 2i\pi$, (S) implique
$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(1\, ,\, 2i\pi\, ,\, e\, ,\, 1) \geq 2 .$$

COROLLAIRE S2 (Baker [4] ou [10]).- Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres algébriques non nuls, alors $(\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ à la condition nécessaire et suffisante qu'ils le soient sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$.

En effet, en choisissant $y_i = \log \alpha_i$, (S) implique que si les y_i sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, $D = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, \ldots, y_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geq n$. Or $D = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, \ldots, y_n)$: les y_i sont alors algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, ce qui est évidemment plus que le résultat de Baker.

COROLLAIRE S3 (Lindemann [7]).- Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ sont algébriquement indépendants.

COROLLAIRE S4 (problème posé par Schneider [11], problème 8, p. 140, résolu par Waldschmidt [12]).- Les nombres e et e^e sont algébriquement indépendants.

On a en effet, d'après (S) , $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(1, e, e^1, e^e) \geq 2$.

Les travaux d'AX, sans transformer (S) en théorème, portent sur des variantes formelles de (S). Ils démontrent un cas particulier d'une version formelle équivalente à (S).

Nous envisagerons les trois versions formelles suivantes de (S) :

(SF) (Schanuel) Soient $y_1,\dots,y_n$ des séries formelles à coefficients complexes, sans terme constant, et linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, alors

$$\dim_{\mathbb{C}(t)} \mathbb{C}(t)(y_1,\dots,y_n, \exp y_1,\dots, \exp y_n) \geq n .$$

(Σ) (Ax) Soient $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{C}[[t_1,\dots,t_m]]$, si les y_i sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1,\dots,y_n, \exp y_1,\dots, \exp y_n) \geq n + \operatorname{rang}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$.

(Σ_o) Le cas particulier de (Σ) où les y_i sont sans terme constant.

Remarques.- 1) En choisissant $m = 0$ (ou les $y_i \in \mathbb{C}$) on retrouve (S) comme cas particulier de (Σ).

2) Pour $m = 1$, (Σ_o) est une conséquence de (SF).

Les résultats essentiels d'Ax [1] sont

THÉORÈME 1.- (Σ) est vraie si les $(y_i - y_i(0))$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

THÉORÈME 2.- Les conjectures (S) et (Σ) sont équivalentes.

J. Ax en donne deux démonstrations différentes, l'une purement algébrique et l'autre à l'aide d'un théorème géométrique [2]. Cette dernière méthode peut s'appliquer à des fonctions autres que l'exponentielle, satisfaisant à des équations différentielles algébriques (Kolchin [8]).

On en déduit les résultats de Cl. Chabauty [5] sur les unités d'un corps de nombres contenues dans un module.

2. La démonstration algébrique.

2.1. Le principal résultat est le

THÉORÈME 3 (Ax [1]).- Soient $L \supset K$ des corps de caractéristique 0, Δ une famille de dérivations de L telle que $\bigcap_{D \in \Delta} \ker D = K$, et $y_1,\dots,y_n, z_1,\dots,z_n \in L^*$ satisfaisant à

(a) pour $D \in \Delta$ et $i = 1,\dots,n$, $Dy_i = Dz_i/z_i$;

(b) les z_i sont multiplicativement indépendants modulo K (i.e. $\prod_{i=1}^{n} z_i^{a_i} \in K$ et $a_i \in \mathbf{Z} \Rightarrow a_i = 0$, $i = 1,\dots,n$).

Alors $\dim_K K(y_1,\dots,y_n, z_1,\dots,z_n) \geq n + \operatorname{rang}(Dy_i)_{i=1,\dots,n,\ D\in\Delta}$.

Remarque.- Dans cet énoncé on peut remplacer (b) par

(b') les y_i sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants modulo K ;

en effet, (a) et (b') $\Rightarrow$ (b) : si $z = \prod_{i=1}^{n} z_i^{a_i} \in K$, pour tout $D \in \Delta$,

$$Dz/z = \sum_{i=1}^{n} a_i\, Dz_i/z_i = 0 \text{ , donc } \sum_{i=1}^{n} a_i Dy_i = 0 = D \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \text{ , } \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \in K \text{ , ce}$$

qui contredit (b') si les a_i ne sont pas nuls.

COROLLAIRE 3.1.- Le théorème 1.

En choisissant $K = \mathbf{C}$, $L = \mathbf{C}[[t_1,\dots,t_n]]$, $\Delta = \{\frac{\partial}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial}{\partial t_n}\}$ et $z_i = \exp y_i$, la $\mathbf{Q}$-indépendance des $y_i - y_i(0)$ assure la condition (b').

COROLLAIRE 3.2.- Le théorème 2.

Il suffit de montrer que (S) $\Rightarrow$ (Σ). Avec les notations de (Σ), posons $y_i' = y_i - y_i(0)$, on peut supposer que $y_1',\dots,y_k'$ soient $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants et que

$$(*) \qquad y_j' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} y_i' \qquad \text{pour } k+1 \leq j \leq n \text{ , } \alpha_{ij} \in \mathbf{Q} \text{ .}$$

Pour $k+1 \leq j \leq n$, posons $y_j'' = y_j - \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} y_i$, alors $y_j'' \in \mathbf{C}$ et $y_{k+1}'',\dots,y_n''$

sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soit alors $F = \mathbb{Q}(y''_{k+1},\dots,y''_n, \exp y''_{k+1},\dots,\exp y''_n)$, on a d'après (S) $\dim_{\mathbb{Q}} F \geq n-k$.

Soit d'autre part $G = F(y_1,\dots,y_k, \exp y_1,\dots,\exp y_k)$, d'après la démonstration du corollaire 3.1 où on remplace $\mathbb{C}$ par F, on a

$$\dim_F G \geq k + \operatorname{rang}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_{i=1,\dots,k\ ;\ j=1,\dots,m} .$$

Mais d'après (*) on a

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,m}} = \operatorname{rang}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$$

d'où

$$\dim_{\mathbb{Q}} G \geq n + \operatorname{rang}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j}\right)_{i=1,\dots,n\ ;\ j=1,\dots,m} .$$

D'après la définition des y''_j, G est contenu dans une extension algébrique de $\mathbb{Q}(y_1,\dots,y_n, \exp y_1,\dots,\exp y_n)$ d'où (Σ).

2.2. Démonstration du théorème 3.

Elle repose sur l'étude de certains sous-espaces du L-espace vectoriel $\Omega_{L/K}$ des K-différentielles de L (lemme 1).

Rappelons que si A est un anneau commutatif et B une A-algèbre commutative, le module $\Omega_{B/A}$ des A-différentielles de B peut être ainsi décrit :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\pi_\delta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \underline{B}/\underline{N} \\ & \underline{B} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Soit $\underline{B}$ le B-module libre sur l'ensemble $\{\delta b \mid b \in B\}$ et $\underline{M}$ l'intersection de tous les sous-modules $\underline{N}$ pour lesquels l'application π_δ déduite de δ est une A-dérivation.

Alors $\Omega_{B/A} = \underline{B}/\underline{M}$ et la A-dérivation $\pi_\delta = d_{B/A} : B \to \Omega_{B/A}$ jouissent de la propriété universelle [9] :

Pour tout B-module M et toute A-dérivation $\lambda : B \to M$, il existe un

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \Omega_{B/A} \arrow[d, dashed, "\xi_\lambda"] \\ & M \end{tikzcd}$$

unique $\xi_\lambda \in \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M)$ tel que $\xi_\lambda d_{B/A} = \lambda$. De plus, à toute A-dérivation D de B dans lui-même est associée une unique A-dérivation D^1 de $\Omega_{B/A}$ dans lui-même telle que

$D^1(b\,db') = Db\,db' + b\,dDb'$.

Le lemme 1 ramène l'estimation de $\dim_K K(y_1,\dots,y_n, z_1,\dots,z_n)$ à celle de la L-dimension d'un sous-espace vectoriel de $\Omega_{L/K}$.

LEMME 1.- <u>Soient</u> $L \supset F \supset K$ <u>des corps de caractéristique</u> 0 , $m = \dim_K F$, E <u>le sous-L-espace vectoriel de</u> $\Omega_{L/K}$ <u>engendré par</u> $d_{L/K}F$, <u>alors</u> E <u>est de dimension</u> m <u>sur</u> L .

<u>Démonstration</u> : on a $\dim_L(E) \leq \dim_K F$, car des éléments y_i de F algébriquement dépendants sur K ont dans $\Omega_{L/K}$ des images dy_i L-linéairement dépendantes, les images $dt_1,\dots,dt_m$ d'une base de transcendance de F sur K engendrent donc E . D'autre part, pour chaque $i = 1,\dots,m$, il existe une K-dérivation D_i de L telle que $D_i(t_j) = \delta_{ij}$, donc si $\Sigma a_j\, dt_j = 0$, $a_j \in L$, est une relation de L-dépendance, on obtient $\xi_{D_i}(\Sigma a_j\, dt_j) = a_i = 0$, où $\xi_{D_i} \in \mathrm{Hom}_L(\Omega_{L/K}, L)$ est associé à D_i .

Nous appliquerons ce lemme avec $F = K(y_1,\dots,y_n, z_1,\dots,z_n)$, posons $m = \dim_K F$ et $r = \mathrm{rang}\,(Dy_i)_{i=1,\dots,n\,;\,D\in\Delta}$: nous voulons montrer que $m \geq n+r$.

Par des combinaisons linéaires convenables on peut se ramener au cas où $\Delta = (D_1,\dots,D_r) \cup \Delta'$, avec $D_i(y_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1,\dots,r$

et $D(y_i) = 0$ pour $D \in \Delta'$.

Supposons que $m < n+r$, posons $\omega_i = d_{L/K}y_i - 1/z_i\, d_{L/K}z_i$, $i = 1,\dots,n$, alors $\omega_1,\dots,\omega_n, dy_1,\dots,dy_r$ sont L-linéairement dépendants :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i\omega_i + \sum_{j=1}^{r} g_j\, dy_j = 0 \qquad \text{où } f_i \in L\ ,\ g_j \in L\ .$$

Un calcul élémentaire permet de constater que $D^1(\omega_i) = D^1(dy_j) = 0$, $\forall\, D \in \Delta$.

La proposition 4, ci-dessous, montre que dans (1) on peut choisir les coefficients f_i et g_j dans K. Si l'un des f_i est non nul, la relation K-linéaire non triviale $\sum_{i=1}^{n} f_i\, dz_i/z_i \in dF$ entraîne, par la proposition 5 ci-dessous, qu'une combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire non-triviale des dz_i/z_i est dans dF, ce qui contredit l'hypothèse (b). Donc $f_i = 0$ pour $i = 1,\dots,n$ et la relation (1) s'écrit

$$(1') \qquad \sum_{j=1}^{r} g_j\, dy_j = 0 \qquad \text{où } g_j \in K\,.$$

En appliquant à (1') l'homomorphisme ξ_{D_j} de ${}^{*}\Omega_{L/K}$ dans L associé à D_j on obtient $g_j = 0$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4.- <u>Soient</u> $L \supset F \supset K$ <u>des corps de caractéristique</u> 0, Δ <u>une famille de dérivations de</u> L <u>telle que</u> $\bigcap_{D\in\Delta} \ker D = K$. <u>L'application canonique</u>

$$L \otimes_K \left(\bigcap_{D\in\Delta} \ker D^1\right) \xrightarrow{\ \beta\ } \Omega_{L/K} \qquad \underline{\text{où}}\ \beta(f\otimes\omega) = f\omega$$

<u>est injective</u>.

PROPOSITION 5.- <u>Soient</u> $F \supset K$ <u>des corps de caractéristique</u> 0, dF <u>l'image de</u> F <u>par</u> $d_{F/K}$ <u>dans</u> $\Omega_{F/K}$, dF/F <u>le</u> $\mathbf{Z}$<u>-sous-module de</u> $\Omega_{F/K}$ <u>constitué des éléments</u> df/f, $f \in F$, <u>alors l'application canonique</u>

$$K \otimes_{\mathbf{Z}} dF/F \rightarrow \Omega_{F/K} / dF \qquad \underline{\text{est injective}}.$$

La démonstration de la proposition 4 se fait aisément en considérant une relation $\sum_{i=1}^{m} f_i\, \omega_i = 0$ telle que m soit minimal, en appliquant D^1 pour tout $D \in \Delta$, ce qui permet de construire une relation de longueur moindre. Pour la proposition 5, on la démontre d'abord dans le cas où K est algébriquement clos dans F et $\dim_K F = 1$, puis on montre que l'on peut se ramener à ce cas (car la clôture algébrique de K dans F est l'intersection des sous-corps F' de F algébriquement clos dans F et tels que $\dim_{F'} F = 1$, $F' \supset K$).

3. La démonstration géométrique.

On peut reformuler la conjecture (S) en termes géométriques :

(S') Soient $\mathfrak{g}$ le groupe algébrique $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{*n}$, A le graphe de $\mathbf{C}^n \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}^{*n}$, A est un sous-groupe analytique de $\mathfrak{g}$. Soit V une sous-variété algébrique de $\mathfrak{g}$, de dimension $v < n$, définie sur $\mathbf{Q}$, et soit $p \in V \cap A$, alors il existe un sous-groupe propre L de $\mathbf{C}^n$ tel que $L \times \exp L$ soit un sous-groupe algébrique de $\mathfrak{g}$ contenant p .

Les résultats de J. Ax [2] sont essentiellement les théorèmes 6 et 7 ci-dessous dont on verra les applications à la conjecture (Σ_0), aux résultats de Chabauty, et à un problème posé par Lang [6].

Dans tous ces énoncés, les corps de définition sont de caractéristique 0 , algébriquement clos, et complets pour une valeur absolue (archimédienne ou non). L'aspect arithmétique disparaît du fait qu'on ne demande plus aux objets d'être définis sur $\mathbf{Q}$.

THÉORÈME 6.- Soient $\mathfrak{g}$ un groupe algébrique, $\hat{\mathfrak{g}}$ son formalisé, A un sous-groupe analytique de $\mathfrak{g}$ (resp. formel de $\hat{\mathfrak{g}}$), K une sous-variété connexe analytique (resp. formelle) passant par l'identité et V la clôture de Zariski de K . Alors, il existe un sous-groupe analytique (resp. formel) B de $\mathfrak{g}$ (resp. $\hat{\mathfrak{g}}$) tel que

$$B \supset V \quad \text{et} \quad B \supset A$$

et que $$\dim B \leq \dim A + \dim V - \dim K .$$

THÉORÈME 7.- Soient $\mathfrak{g}$ un groupe algébrique, V une sous-variété algébrique de $\mathfrak{g}$, A un sous-groupe analytique et soit K une composante de $V \cap A$ passant par l'identité, alors, le plus petit sous-groupe algébrique $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ contenant K est tel que $$\dim \mathfrak{g}' \leq \dim A + \dim V - \dim K .$$

Les papiers fournis par J. Ax ne comportent pas de démonstration du théorème 6 (12 novembre 1970).

Démonstration du théorème 7. On sait que le plus petit sous-groupe analytique contenant la clôture de Zariski $\bar{K}$ de K est un sous-groupe algébrique. D'après le théorème 6 il existe un sous-groupe analytique $B \supset V$ dont la dimension est majorée par $\quad \dim A + \dim \bar{K} - \dim K \leq \dim A + \dim V - \dim K$,

d'où $\quad \dim \mathfrak{g}' \leq \dim A + \dim V - \dim K$.

Dans les corollaires suivants des théorèmes 6 et 7 l'aspect arithmétique réapparaît du fait que les sous-groupes algébriques de $\mathfrak{g} = C^n \times C^{*n}$ (où $C = \mathbf{C}$ ou C_p) sont définis sur $\mathbb{Q}$.

COROLLAIRE 7.1.- (Σ_o) est vrai.

On applique le théorème 6 à $\mathfrak{g} = \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{*n}$, A le graphe de $\mathbf{C}^n \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}^{*n}$, K le germe de sous-variété analytique (resp. formel) passant par l'identité défini par

$$(y_1, \ldots, y_n, \exp y_1, \ldots, \exp y_n) .$$

On a

$$\dim K = \operatorname{rang} \left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j} \right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$$

et si V est la clôture de Zariski de K ,

$$\dim V = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(y_1, \ldots, y_n, \exp y_1, \ldots, \exp y_n) .$$

La $\mathbb{Q}$-indépendance linéaire des y_i implique que la projection de K sur $\mathbf{C}^{*n}$ n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique de $\mathbf{C}^{*n}$. Donc la projection sur $\mathbf{C}^{*n}$ du sous-groupe algébrique engendré par V est $\mathbf{C}^{*n}$. Il en résulte que le sous-groupe analytique $\mathfrak{g}_V$ engendré par V contient $\mathbf{C}^{*n}$ (car il est algébrique). Alors le sous-groupe analytique B (notations du théorème 6) qui contient $\mathfrak{g}_V$, contient aussi $\mathbf{C}^{*n}$. Donc B est égal à $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{*n}$, car $B \supset A$ et $B \supset \mathbf{C}^{*n}$. On en déduit

$$\dim B = 2n \leq \dim A + \dim V - \dim K = n + \dim V - r ,$$

où $r = \operatorname{rang} \left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j} \right)_{i=1,\ldots,n\,;\; j=1,\ldots,m}$, d'où

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(y_1, \ldots, y_n, \exp y_1, \ldots, \exp y_n) \geq n + r .$$

COROLLAIRE 7.2 (Chabauty [5], chap. II, lemmes 2.1, 2.2, 2.3).- Soient C_p le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{g} = C_p^{*n}$, A le sous-groupe analytique de $\mathfrak{g}$ défini par

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \log x_j = 0 , \qquad x_j \in C_p^* , \ a_{ij} \in C_p , \ 1 \le j \le n$$

et soit V une sous-variété algébrique de $\mathfrak{g}$, de dimension v, passant par l'identité e de $\mathfrak{g}$. Alors le rang r sur $\mathbf{Z}$ du module S des suites $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{Z}^n$ vérifiant

$$x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} = 1 , \qquad \forall\, x \in K \text{ où } K \text{ est la composante}$$

de e dans $V \cap A$ satisfait à

$$r \ge \operatorname{rang}(a_{ij}) - v + \dim K .$$

On applique en effet le théorème 7, le sous-groupe $\mathfrak{g}'$ est

$$\mathfrak{g}' = \{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathfrak{g} \mid x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} = 1 , \ (a_1,\ldots,a_n) \in S \} ,$$

la dimension de $\mathfrak{g}'$ est $n - \operatorname{rang}(a_{ij})$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 7.3 ([6] question posée p. 32).- Soient $\mathfrak{g} = \mathbf{C}^g/L$ une variété abélienne simple, de dimension g, V une sous-variété algébrique de dimension v, qui est une intersection complète, et soit $\sigma : \mathbf{C}^d \to \mathfrak{g}$ un sous-groupe à d paramètres de $\mathfrak{g}$. Alors

$$\dim(V \cap \sigma(\mathbf{C}^d)) = v + d - g .$$

Ebauche de démonstration. On sait par le théorème 7 que $\dim(V \cap \sigma(\mathbf{C}^d)) \le v + d - g$. Pour démontrer l'inégalité opposée, il suffit de montrer que $V \cap \sigma(\mathbf{C}^d) \ne \emptyset$. On peut supposer que $v + d = g$, alors il n'y a pas de courbe intégrale de la distribution associée à $\sigma(\mathbf{C}^d)$ dans V, car $\mathfrak{g}$ est simple. Cela permet de montrer [3] que $\overline{V \cap \sigma(\mathbf{C}^d)} = V \cap \overline{\sigma(\mathbf{C}^d)}$ où $\bar{X}$ désigne la fermeture topologique de X. Donc il suffit de montrer $V \cap \overline{\sigma(\mathbf{C}^d)} \ne \emptyset$. On peut montrer que [3] $V \cap \overline{\sigma(\mathbf{C}^d)} = \emptyset$ contredit le fait que la valeur de la $2d$-forme harmonique correspondant à V par la dualité de Poincaré sur $2d$ vecteurs tangents indépendants est positive.

Signalons enfin que dans le cas où $d = 1$, J. AX propose une démonstration de 7.3 indépendante des théorèmes 6 et 7, fondée sur une propriété géométrique des courants sur une variété complexe, appliquée au courant défini par σ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AX - On Schanuel's conjecture, Annals of Math., à paraître.

[2] J. AX - Transcendence and differential algebraic geometry, ICM NICE, 1970.

[3] J. AX - Manuscrit,...

[4] A. BAKER - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, II, Mathematika 14 (1967), 102-107.

[5] Cl. CHABAUTY - Sur les équations diophantiennes liées aux unités d'un corps de nombres algébriques fini, Ann. Mat. Pura Appl. 17, 127-168.

[6] S. LANG - Introduction to transcendantal numbers, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1966.

[7] F. LINDEMANN - Ueber die Zahl π, Math. Annalen, 20 (1882), 213-225.

[8] E. KOLCHIN - Algebraic groups and algebraic dependence, Amer. Jour. 90 (1968), 1151-1164.

[9] D. MUMFORD - Introduction to algebraic geometry, Lecture Notes, Harvard Univ. 1967.

[10] J.-P. SERRE - Séminaire Bourbaki, exposé 368, novembre 1969.

[11] Th. SCHNEIDER - Introduction aux nombres transcendants, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[12] M. WALDSCHMIDT - Solution d'un problème de Schneider sur les nombres transcendants, C.R.A.S. 271, p. 697-700, 12 octobre 1970