MICHÈLE VERGNE

Sur les intégrales d'entrelacement de R. A. Kunze et E. M. Stein

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 369, p. 87-106

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__87_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 369 Novembre 1969

SUR LES INTÉGRALES D'ENTRELACEMENT DE R. A. KUNZE ET E. M. STEIN
(d'après G. SCHIFFMANN)

par Michèle VERGNE

1. Définition de la série principale des représentations d'un groupe semi-simple.

Soit G un groupe de Lie réel, semi-simple, connexe et à centre fini. On note $\underline{g}$ son algèbre de Lie. Soient $\underline{g} = \underline{k} + \underline{p}$ une décomposition de Cartan de $\underline{g}$ et $\underline{a}$ une sous-algèbre de Cartan de la paire symétrique $(\underline{g}, \underline{k})$, c'est-à-dire une sous-algèbre abélienne de $\underline{g}$, maximale parmi celles contenues dans $\underline{p}$. Si α est une racine de $\underline{a}$, on notera $\underline{g}^{\alpha}$ le sous-espace radiciel correspondant. Fixons un ordre sur les racines et posons $\underline{u} = \sum_{\alpha>0} \underline{g}^{\alpha}$ et $\underline{v} = \sum_{\alpha>0} \underline{g}^{-\alpha}$. Soient U et V les sous-groupes analytiques de G d'algèbres de Lie $\underline{u}$ et $\underline{v}$, K le sous-groupe compact maximal d'algèbre de Lie $\underline{k}$ et A le groupe $\exp \underline{a}$; alors $G = KAU$ est une décomposition d'Iwasawa de G . Soient M le centralisateur de A dans K et Γ le groupe MAU .

Par définition, les représentations de la série principale du groupe G sont les représentations induites par les représentations unitaires de dimension finie de Γ . Or toute représentation unitaire irréductible de dimension finie de Γ est triviale sur U , scalaire sur A ; elle est donc déterminée par une représentation unitaire irréductible du groupe compact M et par un caractère unitaire de A . D'autre part, il y a bijection entre l'ensemble des caractères de A et l'espace $\underline{a}^*_{\mathbb{C}}$ des formes linéaires sur $\underline{a}$ à valeurs complexes. Si $\lambda \in \underline{a}^*_{\mathbb{C}}$, on désigne par $\langle \lambda , a \rangle$ la valeur au point a du caractère défini par la forme linéaire λ : ($\langle \lambda, a\rangle = e^{\lambda(H)}$ si $a = \exp H$).

Ce caractère est unitaire si et seulement si λ est imaginaire pure. Notons ρ la demi-somme des racines positives de $\underline{a}$. Si λ est une forme imaginaire pure sur $\underline{a}$ et τ une représentation unitaire irréductible du groupe compact M , on notera (λ , τ) la représentation R de Γ définie par $R(mau) = \langle\lambda , a\rangle\tau(m)$. Considérons la représentation unitaire $\pi_{\lambda,\tau}$ de G induite par la représentation (λ , τ) de Γ . Elle s'effectue par translations à gauche dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^{\lambda,\tau}$ des fonctions mesurables sur G , à valeurs dans l'espace V_τ de la représentation τ , vérifiant presque partout :

(1) $\varphi(gmau) = \langle-\lambda-\rho , a\rangle\tau(m)^{-1}\varphi(g)$, pour $g\in G$, $m\in M$, $a\in A$, $u\in U$

et dont la restriction à K est de carré intégrable, la norme étant celle de $L^2(K , V_\tau)$.

Rappelons les résultats de Bruhat [1] sur ces représentations. Soient M' le normalisateur de A dans K et $W = M'/M$ le groupe de Weyl. Alors M' opère sur les caractères de A $(\langle w(\lambda) , a\rangle = \langle\lambda , w^{-1}aw\rangle)$ et sur les représentations de M $(w(\tau)(m) = \tau(w^{-1}mw))$; il en résulte une action de W sur les classes de représentations (λ , τ) de Γ .

On sait que les représentations $\pi_{\lambda,\tau}$ et $\pi_{w(\lambda),w(\tau)}$ de G sont équivalentes. D'autre part, si (λ , τ) est un couple régulier, c'est-à-dire si les transformées par W de la classe de la représentation (λ , τ) de Γ sont toutes distinctes, la représentation $\pi_{\lambda,\tau}$ est irréductible. (On sait d'ailleurs que la condition (λ , τ) régulier est souvent superflue. Parthasarathy, Rao et Varadarajan [6], dans le cas complexe, et récemment Kostant [4], dans le cas réel, ont démontré que si τ est la représentation triviale τ_o de M , alors toutes les représentations π_{λ,τ_o} sont irréductibles, quelle que soit la forme λ imaginaire pure.) Par conséquent, si w

appartient à M' , il existe un opérateur unitaire $A(w\,;\lambda\,,\tau)$ entrelaçant $\pi_{\lambda,\tau}$ et $\pi_{w(\lambda),w(\tau)}$, et si w_1 et w_2 sont deux éléments de M' les opérateurs $A(w_1w_2\,;\lambda\,,\tau)$ et $A(w_1\,;w_2(\lambda)\,,w_2(\tau))\circ A(w_2\,;\lambda\,,\tau)$ entrelaçant tous deux $\pi_{\lambda,\tau}$ et $\pi_{w_1w_2(\lambda)\,,\,w_1w_2(\tau)}$ doivent être proportionnels. G. Schiffmann (cf. [7]) construit explicitement de tels opérateurs vérifiant la formule de composition :

(2) $$A(w_1w_2\,;\lambda\,,\tau) = A(w_1\,;w_2(\lambda)\,,w_2(\tau))\circ A(w_2\,;\lambda\,,\tau)$$

pour tous les couples $(\lambda\,,\tau)$ lorsque G est déployé sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (ce qui avait déjà été fait par Kunze et Stein (cf. [5]), au moins lorsque G est déployé sur $\mathbf{C}$) et seulement pour les couples $(\lambda\,,\tau_o)$ où τ_o est la représentation triviale de M , lorsque G n'est pas déployé. (Résultat qu'obtient aussi S. Helgason [3].) Formellement la construction en est simple : comme nous cherchons un opérateur qui commute aux translations à gauche par G , il est naturel de chercher un tel opérateur sous la forme d'une translation à droite par w ; mais si f vérifie (1) pour $(\lambda\,,\tau)$ la fonction $g \to f(gw)$ ne vérifie pas (1) pour $(w(\lambda)\,,w(\tau))$: si elle se transforme à peu près comme on le désire par A et M à droite, elle n'est pas invariante à droite par U . Toutefois elle est invariante à droite par le groupe U_w où $U_w = \{u\in U$ tels que $w^{-1}uw\in U\}$ et on est donc conduit à poser :

$$(A(w\,;\lambda\,,\tau)f)(g) = \int_{U/U_w} f(guw)\,d\dot{u} \quad ,$$

où $d\dot{u}$ désigne une mesure sur U/U_w invariante à gauche par U . Il est clair que maintenant cette fonction est invariante à droite par U . Calculons formellement comment elle se transforme à droite par A .

Soient $\underline{g}_w = \sum_{\alpha\in\Delta(w)} \underline{g}^{\alpha}$, où $\Delta(w) = \{\alpha > 0$ tels que $w^{-1}(\alpha) > 0\}$, l'algèbre de Lie de U_w , et $\rho_{w^{-1}}$ la demi-somme des racines appartenant à

$R(w^{-1}) = \{\alpha > 0$ tels que $w^{-1}(\alpha) < 0\}$; le groupe A normalise U et U_w et le module de la transformation $\dot{u} \to \widehat{aua^{-1}}$ sur U/U_w est le caractère $a \to \langle -2\rho_{w^{-1}}, a\rangle$. Alors

$$(A(w\,;\lambda\,,\tau)f)(ga) = \int_{U/U_w} f(gauw)\,d\dot{u} = \int_{U/U_w} f(gaua^{-1}ww^{-1}aw)\,d\dot{u}$$

$$= \langle -\lambda-\rho\,, w^{-1}aw\rangle\langle -2\rho_{w^{-1}}\,, a\rangle (A(w\,;\lambda\,,\tau)f)(g)\ .$$

Il reste donc à vérifier que $w(\rho) = \rho - 2\rho_{w^{-1}}$, ce qui est immédiat, car

$$w(\rho) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha>0} w(\alpha)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{\beta>0\\ w^{-1}(\beta)>0}} \beta - \sum_{\substack{\gamma>0\\ w^{-1}(\gamma)<0}} \gamma\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\beta>0} \beta - 2\sum_{\substack{\gamma>0\\ w^{-1}(\gamma)<0}} \gamma\Big)\ .$$

Un calcul analogue montre que $A(w\,;\lambda\,,\tau)f$ se transforme à droite par M suivant la représentation $w(\tau)$.

Nous avons donc "défini" un opérateur d'entrelacement... malheureusement l'intégrale précédente ne converge pas en général.

2. Convergence des intégrales d'entrelacement.

Remarquons que la définition donnée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^{\lambda,\tau}$ garde un sens lorsque λ est une forme linéaire quelconque sur $\underline{a}$. Les translations à gauche par les éléments de G définissent une représentation $\pi_{\lambda,\tau}$ de G dans $\mathcal{H}^{\lambda,\tau}$ par des opérateurs bornés. Nous montrerons que si $\mathrm{Re}\,\lambda$ est assez "grande", et si f est une fonction continue appartenant à $\mathcal{H}^{\lambda,\tau}$, alors l'intégrale précédente converge.

Soient τ_o la représentation triviale de M et χ_λ le vecteur K-invariant de la représentation π_{λ,τ_o} : $\chi_\lambda(kau) = \langle -\lambda-\rho\,, a\rangle$. Pour toute fonction f continue appartenant à $\mathcal{H}^{\lambda,\tau}$ la fonction $g \to \|f(g)\|/\chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(g)$ est invariante à droite par Γ , donc bornée sur G car G/Γ est compact. Pour tout x dans G et pour toute fonction continue f appartenant à $\mathcal{H}^{\lambda,\tau}$, on a donc la majoration

$$\| f(xg)\| \leq \max_{k\in K} \|f(xk)\| \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(g) .$$

De cette majoration résulte immédiatement la première partie de la proposition suivante :

PROPOSITION 1.- <u>Supposons que</u> $\int_{U/U_w} \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(uw)\, d\dot{u} < +\infty$. <u>Alors pour toute fonction continue</u> f <u>appartenant à</u> $\mathcal{H}^{\lambda,\tau}$ <u>et pour tout</u> x <u>dans</u> G <u>l'intégrale</u> $\int_{U/U_w} f(xuw)\, d\dot{u}$ <u>converge absolument et définit une fonction continue</u> f' <u>de</u> x .

<u>De plus, l'application</u> $f \mapsto f'$ <u>se prolonge en une application linéaire continue de</u> $\mathcal{H}^{\lambda,\tau}$ <u>dans</u> $\mathcal{H}^{w(\lambda),\,w(\tau)}$ <u>de norme inférieure ou égale à</u> $\int_{U/U_w} \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(uw)\, d\dot{u}$.

<u>Démonstration</u>. Il reste simplement à évaluer la norme de la transformation $f \mapsto f'$. Si $uw = k_u a_u u'_u$ est la décomposition d'Iwasawa de uw

$$\|(A(w\,;\,\lambda\,,\,\tau)f)(k)\|^2 = \|\int_{U/U_w} f(kuw)\, d\dot{u}\|^2 \leq \left(\int_{U/U_w} \| f(kk_u)\| \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(uw)\, d\dot{u}\right)^2 .$$

La mesure $\chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(uw)\, d\dot{u}$ étant finie, on a d'après l'inégalité de Schwarz :

$$\left(\int_{U/U_w} \|f(kk_u)\| \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(uw) d\dot{u}\right)^2 \leq \int_{U/U_w} \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(uw)\, d\dot{u} \int_{U/U_w} \|f(kk_u)\|^2 \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(uw)\, d\dot{u}$$

et par conséquent $\| A(w\,;\,\lambda\,,\,\tau)f\| \leq \left(\int_{U/U_w} \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(uw)\, d\dot{u}\right) \|f\|$.

On désigne par $D(w)$ l'ensemble des $\lambda \in \underline{a}^*_{\mathbb{C}}$ tels que $\int_{U/U_w} \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(uw)\, d\dot{u} < +\infty$. Nous allons déterminer ce domaine $D(w)$ par récurrence sur la longueur de w (méthode due à Gindikin et Karpalevič [2]). Nous entendrons par longueur de w la longueur de l'image $\bar{w}$ de w dans le groupe de Weyl. Rappelons que W est engendré par les symétries par rapport aux racines simples et qu'une décomposition $s = s_{\alpha_{i_1}}.s_{\alpha_{i_2}}. \ldots . s_{\alpha_{i_r}}$ d'un élément s de W en produit de telles symétries est dite réduite, si elle comporte un nombre minimum de facteurs ; ce nombre minimum $\ell(s)$ est appelé longueur de s : Soit $R(w)$ l'ensemble des racines $\alpha > 0$ telles que $w(\alpha) < 0$ et soit $R_1(w)$ l'ensemble des racines α telles que $\alpha > 0$, $\frac{\alpha}{2}$ n'est pas racine et $w(\alpha) < 0$. Alors $\ell(w) = \text{Card } R_1(w)$. Précisément, si $\bar{w} = s_{\alpha_{i_1}}.s_{\alpha_{i_2}}. \ldots . s_{\alpha_{i_r}}$ est une décomposition réduite de $\bar{w}$, alors

$$R_1(w) = \{(s_{\alpha_{i_2}}. \ldots . s_{\alpha_{i_r}})^{-1}(\alpha_{i_1}),(s_{\alpha_{i_3}}. \ldots . s_{\alpha_{i_r}})^{-1}(\alpha_{i_2}),\ldots,(s_{\alpha_{i_r}})^{-1}(\alpha_{i_{r-1}}),\alpha_{i_r}\} .$$

Par conséquent, si $w = w_1 w_2$ avec $\ell(w) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$; alors

$$\begin{aligned} R_1(w) &= w_2^{-1}\, R_1(w_1) \cup R_1(w_2) \\ R(w) &= w_2^{-1}\, R(w_1) \cup R(w_2) . \end{aligned} \qquad \text{la réunion étant disjointe} \tag{3}$$

PROPOSITION 2.- <u>Supposons</u> $w = w_1 w_2$ <u>avec</u> $\ell(w) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$. <u>Alors</u>

$$A(w_1 w_2 ; \lambda , \tau) = A(w_1 ; w_2(\lambda) , w_2(\tau)) \circ A(w_2 ; \lambda , \tau) .$$

<u>Plus précisément, cette égalité signifie que</u> $\lambda \in D(w_1 w_2)$ <u>si et seulement si</u> $\lambda \in D(w_2)$ <u>et</u> $w_2(\lambda) \in D(w_1)$, <u>et que, dans ce cas, les deux membres de l'égalité étant définis sont égaux.</u>

<u>Démonstration.</u> Utilisons une autre forme de l'intégrale d'entrelacement. Si U'_w est le groupe $U \cap wVw^{-1}$, alors $U = U'_w . U_w$. On a donc

$$\int_{U/U_w} f(xuw)\, d\dot{u} = \int_{U'_w} f(xuw)\, du = \int_{V_w} f(xwv)\, dv$$

où $V_w = w^{-1}U'_w w$ est le groupe d'algèbre de Lie $\sum_{\alpha \in R(w)} \underline{g}^{-\alpha}$; (on normalisera la mesure de Haar sur V_w de telle sorte que $\int_{V_w} \chi_{\rho_w}(v)\, dv = +1$). Alors :

$$(A(w_1 ; w_2(\lambda), w_2(\tau)) \circ A(w_2 ; \lambda, \tau)f)(x) = \int_{V_{w_1} \times V_{w_2}} f(xw_1 w_2 w_2^{-1} v_1 w_2 v_2)\, dv_1\, dv_2 .$$

Or l'application $(v_1, v_2) \mapsto w_2^{-1} v_1 w_2 v_2$ est un isomorphisme de $V_{w_1} \times V_{w_2}$ sur $V_{w_1 w_2}$ comme le prouve (3), et respecte les mesures de Haar choisies.

Il s'agit donc de déterminer maintenant $D(w_\alpha)$ où w_α est un représentant d'une symétrie s_α par rapport à une racine simple α . On a

$$D(w_\alpha) = \{\lambda \in \underline{a}_{\mathbb{C}}^* \; ; \; \int_{V_{w_\alpha}} \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(v)\, dv < +\infty\} .$$

Ce problème se ramène à un calcul sur un groupe de rang réel 1 . En effet, notons $\underline{u}_\alpha = \underline{g}^\alpha + \underline{g}^{2\alpha}$ et $\underline{v}_\alpha = \underline{g}^{-\alpha} + \underline{g}^{-2\alpha}$, B la forme de Killing de $\underline{g}$, H'_α l'unique élément de $\underline{a}$ tel que $B(H, H'_\alpha) = \alpha(H)$, et H_α l'unique élément proportionnel à H'_α tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$. Alors $\underline{g}_\alpha = \underline{v}_\alpha + [\underline{v}_\alpha, \underline{u}_\alpha] + \underline{u}_\alpha$ est une algèbre semi-simple de rang 1 , et si G_α est le sous-groupe analytique correspondant, la décomposition d'Iwasawa de G induit une décomposition d'Iwasawa de $G_\alpha = K_\alpha A_\alpha U_\alpha$ avec $K_\alpha = K \cap G_\alpha$,.... .

Notons ρ_α le caractère $\frac{1}{2}(p\alpha + q2\alpha)$, où p est la multiplicité de la racine α et q la multiplicité de la racine 2α ; alors $\rho(H_\alpha) = \rho_\alpha(H_\alpha)$ et par conséquent si λ_α désigne la restriction de λ à la sous-algèbre $\underline{a}_\alpha = \mathbb{R}H_\alpha$ et $\chi_{\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha}$ désigne la fonction sur G_α définie par $\chi_{\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha}(k_\alpha a_\alpha u_\alpha) = \langle -\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha - \rho_\alpha , a_\alpha \rangle$, alors

$$\int_{V_{w_\alpha}} \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(v)\, dv = \int_{V_\alpha} \chi_{\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha}(v)\, dv .$$

Nous allons calculer explicitement, lorsque G est de rang 1, l'intégrale $c(\lambda) = \int_V \chi_\lambda(v)\,dv$. Le résultat interviendra de manière fondamentale dans la suite.

Supposons donc maintenant G de rang 1. Soient $\theta(X) = X'$ l'involution de Cartan associée à la décomposition $\underline{g} = \underline{k} + \underline{p}$, α l'unique racine positive de $\underline{a}$ telle que $\alpha/2$ ne soit pas racine et H l'unique élément de $\underline{a}$ tel que $\alpha(H) = 2$. La forme quadratique $Q(X) = 4\,\frac{B(X\,,\,\theta(X))}{B(H\,,\,\theta(H))}$ est positive non dégénérée sur $\underline{g}$ et invariante par $\mathrm{Ad}\,K$, on note $\|X\| = Q(X)^{\frac{1}{2}}$.

PROPOSITION 3.- <u>Supposons</u> G <u>de rang</u> 1. <u>Soient</u> $v = \exp(Y + Z)$, <u>avec</u> $Y \in \underline{g}^{-\alpha}$ <u>et</u> $Z \in \underline{g}^{-2\alpha}$, <u>un élément de</u> V <u>et</u> $v = k_v a_v u_v$ <u>la décomposition d'Iwasawa de</u> v. <u>Si</u> t <u>est l'unique nombre réel tel que</u> $a_v = \exp tH$, <u>alors</u> $e^t = \left(\left(1 + \frac{\|Y\|^2}{2}\right)^2 + 2\|Z\|^2\right)^{1/4}$.

<u>Démonstration.</u> La démonstration de ce résultat a été faite cas par cas par G. Schiffmann. Nous en donnerons ici une démonstration générale due à Godement. Supposons que 2α soit racine. Pour tout X appartenant à $\underline{g}^{2\alpha}$, on remarque que $Q(v.X) = \alpha(a_v)^4 Q(X)$ et en particulier pour $X = Z'$. Mettons en évidence les composantes de vZ' sur chaque espace radiciel (tableau ci-dessous)

$$(\underline{g} = \underline{g}^{2\alpha} + \underline{g}^{\alpha} + \underline{g}^{o} + \underline{g}^{-\alpha} + \underline{g}^{-2\alpha})$$

$$\begin{array}{ll}
2\alpha : & Z' \\
\alpha : & [Y,Z'] \\
0 : & \frac{1}{2!}(\mathrm{ad}\,Y)^2(Z') + [Z,Z'] \\
-\alpha : & \frac{1}{3!}(\mathrm{ad}\,Y)^3(Z') + \mathrm{ad}\,Y\,\mathrm{ad}\,Z(Z') \\
-2\alpha : & \frac{1}{2!}(\mathrm{ad}\,Z)^2(Z') + \frac{1}{4!}(\mathrm{ad}\,Y)^4(Z') + \frac{1}{2!}(\mathrm{ad}\,Y)^2([Z,Z']) .
\end{array}$$

Les remarques suivantes permettent le calcul de $Q(vZ')$ qui se fait composante par composante :

a) si $X \in \underline{g}^{\beta}$, alors $[X,X'] \in \underline{g}^{o} \cap \underline{p} = \underline{a}$ et $[X,X'] = t(X).H$ avec $t(X) = -\beta(H)\,\frac{Q(X)}{Q(H)}$;

b) $(\text{ad } Y)^2.Z' \in \underline{g}^{o} \cap \underline{k}$;

c) $\text{ad } Y'.\text{ad } Y.Z' = -4\,t(Y)Z'$;

d) $(\text{ad } Y)^3.Z' = -6\,t(Y)\,[Y',Z]$;

e) $(\text{ad } Y)^4.Z' = 24(t(Y))^2.Z$.

Revenons au calcul de $c(\lambda)$. Si on identifie le caractère λ au nombre complexe $\lambda(H)$, alors

$$c(\lambda) = \int_V \left(\left(1 + \frac{\|Y\|^2}{2}\right)^2 + 2\|Z\|^2\right)^{-\frac{\lambda+\rho}{4}} dv .$$

Cette intégrale ne converge absolument que si $\text{Re }\lambda > 0$. Elle se calcule explicitement par passage en coordonnées polaires

$$(4) \qquad c(\lambda) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(\frac{p+q}{2})}\;\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}).\Gamma(\frac{\lambda+p}{4})}{\Gamma(\frac{\lambda+p}{2}).\Gamma(\frac{\lambda+\rho}{4})} .$$

Donc $D(w_\alpha) = \{\lambda \in \underline{a}^*_{\mathbb{C}} \mid \text{Re }\lambda(H_\alpha) > 0\}$. On établit alors par récurrence que

$$D(w) = \{\lambda \in \underline{a}^*_{\mathbb{C}} \mid \text{Re }\lambda(H_\beta) > 0 \text{ pour tout } \beta \in R(w)\} .$$

En particulier $D(w)$ ne contient pas les formes imaginaires pures. Mais ces formes appartiennent à la frontière de $D(w)$. Nous montrerons qu'il est possible, tout au moins dans les cas cités plus haut, de définir $A(w\,;\lambda\,,\tau)$ pour un tel λ par prolongement analytique.

Désignons par $\check{\lambda}$ la forme linéaire $-\bar{\lambda}$, et si $f \in \mathcal{H}^{\lambda,\tau}$ et $g \in \mathcal{H}^{\check{\lambda},\tau}$, posons $\langle f,g\rangle = \int_K \langle f(k)\,,g(k)\rangle dk$. Ceci définit une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{H}^{\lambda,\tau} \times \mathcal{H}^{\check{\lambda},\tau}$

invariante par les translations à gauche par G .

PROPOSITION 4.- Supposons que $\lambda \in D(w)$, alors $w(\check{\lambda}) \in D(w^{-1})$ et si $f \in \mathcal{H}^{\lambda,\tau}$ et $g \in \mathcal{H}^{w(\check{\lambda}), w(\tau)}$, alors $\langle A(w ; \lambda, \tau)f, g\rangle = \langle f, A(w^{-1} ; w(\check{\lambda}), w(\tau))g\rangle$.

Il suffit naturellement de prouver cette assertion lorsque $w = w_\alpha$ est de longueur 1 :

$$\langle A(w_\alpha ; \lambda, \tau)f, g\rangle = \int_K \langle \int_{V_\alpha} f(kw_\alpha k_v)\langle -\lambda - \rho, a_v\rangle dv, gk\rangle\, dk$$

$$= \int_K \langle f(k), \int_{V_\alpha} g(kw_\alpha^{-1} w_\alpha k_v^{-1} w_\alpha^{-1})\langle -\bar{\lambda} - \rho, a_v\rangle dv\rangle\, dk .$$

On doit donc montrer qu'il existe un isomorphisme ψ de V_α sur V_α conservant la mesure de Haar tel que, si $v = k_v a_v u_v$ est la décomposition d'Iwasawa de v et si $\psi(v) = k'a'u'$ celle de $\psi(v)$, on ait : $k' = w_\alpha k_v^{-1} w_\alpha^{-1}$, $a' = w_\alpha a_v^{-1} w_\alpha^{-1} = a_v$.
L'application $\psi(v) = (w_\alpha . a_v u_v a_v^{-1}) w_\alpha^{-1} = (w_\alpha k_v^{-1} w_\alpha^{-1})(w_\alpha a_v^{-1} w_\alpha^{-1})(w_\alpha a_v v a_v^{-1} w_\alpha^{-1})$ répond à ces conditions.

3. Prolongement analytique des intégrales d'entrelacement.

Si λ appartient à $D(w)$, l'opérateur $A(w ; \lambda, \tau)$ entrelace les représentations $\pi_{\lambda,\tau}$ et $\pi_{w(\lambda), w(\tau)}$ de G . Si $\mathcal{D}$ est une représentation irréductible de K , l'opérateur $A(w ; \lambda, \tau)$ transforme donc un vecteur K-fini de type $\mathcal{D}$ en un vecteur de même type.

Explicitons le sous-espace de type $\mathcal{D}$ de la représentation $\pi_{\lambda,\tau}$. Soit $\mathcal{H}^\tau$ l'espace des fonctions f de carré intégrable sur K qui vérifient $f(km) = \tau(m)^{-1} f(k)$ $(k \in K , m \in M)$. La représentation $\pi_{\lambda,\tau}$ se réalise de manière évidente dans l'espace $\mathcal{H}^\tau$ (indépendant de λ) et la restriction de cette représentation à K est la représentation π_τ induite par la représentation τ de M .

D'après le théorème de Frobenius, une représentation unitaire irréductible $\mathcal{D}$ de K est contenue autant de fois dans $\mathcal{H}^\tau$ que la restriction de $\mathcal{D}$ à M contient τ. Supposons que la restriction de $\mathcal{D}$ à M contienne p fois τ. Soient $V_{\mathcal{D}}$ l'espace de $\mathcal{D}$, E_i $(1 \leq i \leq p)$ un projecteur de $V_{\mathcal{D}}$ sur un sous-espace de type τ et φ_i une isométrie de $E_i(V_{\mathcal{D}})$ sur V_τ. Alors toute fonction f de type $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}^\tau$ est combinaison linéaire de fonctions $f_{i,e}$ où, si e est un vecteur quelconque de $V_{\mathcal{D}}$, $f_{i,e}(k) = \varphi_i E_i(\mathcal{D}(k^{-1})e)$.

Soit $A^o(w\,;\lambda\,,\tau)$ la restriction de $A(w\,;\lambda\,,\tau)$ au sous-espace $\mathcal{H}_o^\tau$ partout dense des vecteurs K-finis de l'espace $\mathcal{H}^\tau$. On étudiera le comportement par rapport à λ de $A^o(w\,;\lambda\,,\tau)$ en étudiant ses restrictions aux sous-espaces de type $\mathcal{D}$. Cette étude se ramène à celle des intégrales $\int_{V_w} \mathcal{D}(k_v^{-1})\langle -\lambda-\rho\,, a_v\rangle dv$, et comme plus haut, il suffit de considérer le cas où G est de rang réel 1. Dans ce cas, si $\mathcal{D}$ est une représentation unitaire de K, il existe un caractère μ de A tel que $\mu(H)$ soit entier, et tel que la fonction $v \to \langle \mathcal{D}(k_v^{-1})e\,, e'\rangle\langle\mu\,, a_v\rangle$ soit polynômiale sur V (polynômiale signifiant que la composée avec l'exponentielle est polynômiale sur $\underline{v}$). Comme $\underline{v} = \underline{g}^{-\alpha} + \underline{g}^{-2\alpha}$, tout élément X de $\underline{v}$ s'écrit $X = Y + Z$ avec $Y \in \underline{g}^{-\alpha}$ et $Z \in \underline{g}^{-2\alpha}$; on doit alors étudier des intégrales de la forme

$$\int_{\underline{v}} P(Y,Z)\left(\left(1 + \frac{\|Y\|^2}{2}\right)^2 + 2\|Z\|^2\right)^{\frac{-\lambda-\rho-\mu}{4}} dY\, dZ\ ,$$

où $P(Y,Z)$ est une fonction polynômiale sur $\underline{v}$.

L'une des fonctions sous le signe somme étant invariante par le groupe $O(\|Y\|) \times O(\|Z\|)$, on peut d'abord rendre l'autre invariante par ce même groupe. Après passage en coordonnées polaires, on obtient donc une combinaison linéaire d'intégrales de la forme :

$$\int_{u>0}\int_{v>0} u^{r+p-1}\, v^{s+q-1} \left(\left(1+\frac{u^2}{2}\right)^2 + 2v^2\right)^{-\frac{\lambda+\mu+\rho}{4}} du\, dv \text{ , avec}$$

$r + 2s \leq \mu$.

Après un changement de variable évident, l'intégrale ci-dessus est proportionnelle à :

$$\int_{u>0} u^{r+p-1}\,(1+u^2)^{q+s-\frac{\lambda+\rho+\mu}{2}} \int_{v>0} v^{s+q-1}\,(1+v^2)^{-\frac{\lambda+\rho+\mu}{4}}\, dv$$

qui, à un facteur constant près, vaut :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu-(r+2s)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+p+\mu-2s}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+p+\mu-2s}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\rho+\mu}{4}\right)} \quad .$$

Cette dernière expression analytique lorsque $\operatorname{Re}\lambda > 0$ admet un prolongement méromorphe ayant pour pôles simples des entiers négatifs ou nuls.

Revenons au cas général. Introduisons $P(w)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tels que $\lambda(H_\alpha)$ soit entier négatif ou nul pour au moins une racine α appartenant à $R(w)$. On obtient alors le :

THÉORÈME 1.- *Soit* $f \in \mathcal{H}_0^\tau$. *L'application* $\lambda \mapsto A^0(w\,;\lambda\,,\tau)f$ *de* $\mathcal{D}(w)$ *dans* $\mathcal{H}^\tau$ *est analytique. Elle se prolonge à* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *en une fonction méromorphe, analytique dans le complémentaire de* $P(w)$. *Lorsque* λ *n'est pas un pôle de ce prolongement, l'opérateur* $A^0(w\,;\lambda\,,\tau)$ *entrelace les représentations* $\pi_{\lambda,\tau}$ *et* $\pi_{w(\lambda)\,,\,w(\tau)}$ *de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$.

Nous désirons maintenant supprimer les pôles de l'application $\lambda \mapsto A^0(w\,;\lambda\,,\tau)$ appartenant à l'ensemble $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Considérons l'opérateur
$M(w\,;\lambda\,,\tau) = A^0(w^{-1}\,;w(\lambda)\,,w(\tau)) \circ A^0(w\,;\lambda\,,\tau)$. Cet opérateur commute avec la repré-

sentation $\pi_{\lambda,\tau}$ de l'algèbre de Lie dans $\mathcal{H}_o^\tau$. Tout au moins lorsque λ est imaginaire pure et (λ , τ) un couple régulier, cette représentation est irréductible, et $M(w ; \lambda , \tau)$ est alors scalaire. D'après le principe de l'unicité du prolongement analytique, il en sera encore ainsi pour un λ quelconque. Nous allons chercher une normalisation, c'est-à-dire une fonction $\lambda \mapsto c(w ; \lambda , \tau)$ méromorphe dans $\underline{a}_{\mathbb{C}}^*$, analytique et ne s'annulant pas sur $D(w)$, et telle que les nouveaux opérateurs

$B^o(w ; \lambda , \tau) = \dfrac{1}{c(w ; \lambda , \tau)} A^o(w ; \lambda , \tau)$ vérifient exactement

$B^o(w^{-1} ; w(\lambda) , w(\tau)) \circ B^o(w ; \lambda , \tau) = \mathrm{Id}$. Moyennant des hypothèses évidentes sur la fonction $c(w ; \lambda , \tau)$, la proposition 4 montre que l'adjoint de l'opérateur $B^o(w ; \lambda , \tau)$ sera l'opérateur $B^o(w ; \check{\lambda} , \tau)^{-1}$. Donc si λ est imaginaire pure, l'opérateur $B^o(w ; \lambda , \tau)$, s'il est défini, sera unitaire. Mais réciproquement, il en résulte qu'aucune valeur de λ imaginaire pure ne pourra être un pôle. En effet, on peut se contenter de considérer le cas où $w = w_\alpha$ est de longueur 1 ; l'opérateur $B^o(w_\alpha ; \lambda , \tau)$ sera alors fonction de la seule variable complexe $\lambda_\alpha = \lambda(H_\alpha)$, et la fonction $\lambda_\alpha \mapsto \| B^o(w_\alpha ; \lambda , \tau) \|$ restera constante sur l'axe imaginaire pur en dehors des pôles éventuels, ce qui serait absurde s'il en existait.

Ces considérations heuristiques montrent que l'essentiel est de calculer $A^o(w^{-1} ; w(\lambda) , w(\tau)) \circ A^o(w ; \lambda , \tau)$. Ce calcul se heurte à de sérieuses difficultés lorsque G n'est pas déployé. Il ne sera effectué dans ce cas que lorsque τ est la représentation triviale τ_o de M.

Examinons ce dernier cas. Soit χ_λ l'unique vecteur K-invariant de la représentation π_{λ,τ_o}. Alors $A^o(w ; \lambda , \tau_o)\chi_\lambda = c(w ; \lambda)\chi_{w(\lambda)}$ où, d'après la proposition 2, $c(w ; \lambda) = \prod_{\alpha \in R_1(w)} c(\lambda_\alpha)$. On a posé $\lambda_\alpha = \lambda(H_\alpha)$ et $c(\lambda_\alpha)$ est définie par (3).

La fonction $\lambda \mapsto c(w\,;\lambda)$ est alors une fonction méromorphe de λ, analytique et ne s'annulant pas sur $D(w)$ et

$$A^{o}(w^{-1}\,; w(\lambda)\,,\tau_o) \circ A^{o}(w\,;\lambda\,,\tau_o) = c(w^{-1}\,; w(\lambda)).c(w\,;\lambda).\mathrm{Id}\,.$$

Posons $B^{o}(w\,;\lambda\,,\tau_o) = \dfrac{1}{c(w\,;\lambda)}\, A^{o}(w\,;\lambda\,,\tau_o)$.

THÉORÈME 2.- 1) <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{H}_o^{\tau_o}$, <u>l'application</u> $\lambda \mapsto B^{o}(w\,;\lambda\,,\tau_o)f$ <u>est une fonction méromorphe de</u> λ <u>analytique au voisinage de</u> $\overline{D(w)}$.

2) <u>Si</u> $\lambda \in \overline{D(w)}$, <u>alors</u> $B^{o}(w\,;\lambda\,,\tau_o)$ <u>définit un opérateur borné</u> $B(w\,;\lambda\,,\tau_o)$ <u>de</u> $\mathcal{H}^{\tau_o}$ <u>dans</u> $\mathcal{H}^{\tau_o}$ <u>qui entrelace les représentations</u> π_{λ,τ_o} <u>et</u> $\pi_{w(\lambda)\,,\tau_o}$ <u>de</u> G . <u>Si</u> $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, <u>alors</u> $B(w\,;\lambda\,,\tau_o)$ <u>est unitaire</u>.

3) <u>Si</u> $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, <u>quels que soient les éléments</u> w_1 <u>et</u> w_2 <u>dans</u> M' , <u>alors</u> $B(w_1w_2\,;\lambda\,,\tau_o) = B(w_1\,; w_2(\lambda)\,,\tau_o) \circ B(w_2\,;\lambda\,,\tau_o)$.

Considérons maintenant le cas où G est déployé sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. La méthode générale de réduction au rang 1 nous conduit à effectuer d'abord des calculs préliminaires sur $SL(2\,;\mathbf{R})$ ou $SL(2\,;\mathbf{C})$.

A) $G = SL(2\,;\mathbf{R})$

Les divers sous-groupes considérés sont :

$$K = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbf{R}\right\} \quad ; \quad A = \left\{\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} ; t \in \mathbf{R}\right\} \quad ;$$

$$U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; u \in \mathbf{R}\right\} \quad ; \quad V = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} ; v \in \mathbf{R}\right\} \quad ; \quad M = \pm 1\,.$$

On choisit comme représentant w_o du seul élément non trivial du groupe de Weyl, l'élément $w_o = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Les caractères de A sont définis par un nombre complexe λ : $\langle \lambda , a(t) \rangle = e^{\lambda t}$ et M possède deux caractères τ_+ et τ_- où τ_+ est le caractère trivial de M et τ_- le caractère défini par $\tau_-(-1) = -1$. Toute représentation irréductible de K est équivalente à l'une des représentations $\underline{v}_n(k(\theta)) = e^{in\theta}$. La restriction de $\underline{v}_n$ à M est irréductible, de type τ_+ si n est pair et de type τ_- si n est impair. Si donc on considère la fonction $\Phi_s(k(\theta)) = e^{is\theta}$, l'espace $\mathcal{H}_o^\tau$ est somme directe des $\mathbf{C}\,\Phi_s$ avec s pair si $\tau = \tau_+$ ou s impair si $\tau = \tau_-$. Alors $A^o(w_o ; \lambda , \tau)\Phi_s = c(w_o ; \lambda , s)\Phi_s$ où

$$c(w_o ; \lambda , s) = \frac{i^s\,\Gamma(\lambda)}{2^{\lambda-1}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1+s}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\lambda+1-s}{2}\right)}$$. Bien entendu

$A^o(w_o^{-1} , w_o(\lambda) , w_o(\tau)) \circ A^o(w_o ; \lambda , \tau)$ est scalaire. On a donc, en remarquant que $c(w_o^{-1} ; \lambda , s) = (-1)^s c(w_o ; \lambda , s)$,

$$A^o(w_o^{-1} ; -\lambda , \tau_+) \circ A^o(w_o ; \lambda , \tau_+) = c(w_o ; -\lambda , 0) \,.\, c(w_o ; \lambda , 0)$$

$$A^o(w_o^{-1} ; -\lambda , \tau_-) \circ A^o(w_o ; \lambda , \tau_-) = -c(w_o ; -\lambda , 1) \circ c(w_o ; \lambda , 1) \,.$$

Posons $c(\lambda,\tau) = \dfrac{2^{1-\lambda}\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1+n_\tau}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\lambda+1-n_\tau}{2}\right)}$ où $n_\tau = 0$ si $\tau = \tau_+$ et $n_\tau = 1$ si $\tau = \tau_-$

$B^o(w_o ; \lambda , \tau) = \dfrac{1}{c(\lambda,\tau)} A^o(w_o ; \lambda , \tau)$. Alors

$$B^o(w_o ; \lambda , \tau_+)\Phi_s = \prod_{j=0}^{\frac{s}{2}-1} \frac{\lambda - (2j+1)}{\lambda + (2j+1)}\,\Phi_s$$

$$B^o(w_o ; \lambda , \tau_-)\Phi_s = \prod_{j=1}^{\frac{s-1}{2}} \frac{\lambda - 2j}{\lambda + 2j}\,\Phi_s$$

et $B^o(w_o ; \lambda , \tau)$ définit un opérateur borné de $\mathcal{H}^\tau$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$, unitaire si $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$.

[Remarque : les pôles et les zéros de l'opérateur $B^o(w_o\,;\lambda\,,\tau)$ correspondent évidemment à des valeurs de λ pour lesquelles la représentation $\pi^{\lambda,\tau}$ est réductible. Par exemple si $\tau = \tau_+$, et si λ est un entier impair positif $\lambda = 2j+1$, alors le noyau de l'opérateur $B^o(w_o\,;\lambda\,,\tau_+)$ est le sous-espace $\sum\limits_{\substack{|s|>2j+1\\ s \text{ pair}}} \Phi^s$. C'est un sous-espace de $\mathcal{H}_o^{\tau_+}$ stable pour la représentation de l'algèbre de Lie, et l'opérateur $B^o(w_o\,;\lambda\,,\tau_+)$ réalise un isomorphisme de l'espace quotient $\mathcal{H}_o^{\tau_+}$ par ce sous-espace sur le sous-espace image $\sum\limits_{\substack{|s|<2j+1\\ s \text{ pair}}} \Phi^s$, espace de la représentation de dimension $2j+1$ du groupe $SL(2\,;\mathbb{R})$.]

B) $G = SL(2\,;\mathbb{C})$

Les divers sous-groupes considérés sont

$$K = SU(2) = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix} \;;\; |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1\right\} \;;\; A = \left\{\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix} \;;\; t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$M = \left\{\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix} \;;\; \varphi\in\mathbb{R}\right\} \;;\; U = \left\{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;;\; u\in\mathbb{C}\right\} \;;$$

$$V = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ v & 1\end{pmatrix} \;;\; v\in\mathbb{C}\right\} .$$

On choisit comme représentant du seul élément non trivial du groupe de Weyl l'élément $w_o = \begin{pmatrix}0 & +1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Les représentations unitaires irréductibles de M sont les caractères τ_n de M définis par $\tau_n\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix} = e^{in\varphi}$.

Les représentations unitaires irréductibles de K sont paramétrées par un entier s positif ou nul. $\mathcal{D}_s$ se réalise dans l'espace des polynômes à deux variables X et Y homogènes de degré s , par : $g = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $\mathcal{D}_s(g)P = P(aX+cY\,,bX+dY)$.

Choisissons $e_j = X^{s-j}Y^j$ comme base de l'espace de $\mathcal{D}_s$: alors e_j est un vecteur propre pour M de poids τ_{s-2j}. La restriction de $\mathcal{D}_s$ à M contient donc τ_n si et seulement si $s = |n| + 2p$. On considère l'espace $\mathcal{H}^n$ de la représentation induite par le caractère τ_n de M, et $\mathcal{H}^{n,s}$ le sous-espace de $\mathcal{H}^n$ des fonctions de type $\mathcal{D}_s$. Ce sous-espace est engendré par la fonction $f_{s,n,e} = \langle \mathcal{D}_s(k^{-1})e , e_{\frac{s-n}{2}} \rangle$ où e est un vecteur quelconque de l'espace de $\mathcal{D}_s$. On a par conséquent

$$A^o(w_o ; \lambda , \tau_n)f_{s,n,e} = c(w_o ; \lambda , n , s)f_{s,-n,e}$$

$$c(w_o ; \lambda , n , s) = (-1)^{\frac{s-n}{2}} \frac{2}{\lambda + |n|} \prod_{q=1}^{\frac{s-|n|}{2}} \frac{\lambda - |n| - 2q}{\lambda + |n| + 2q}$$

et $A^o(w_o ; -\lambda , \tau_{-n}) \circ A^o(w_o ; \lambda ; \tau_n) = \dfrac{4}{|n|^2 - \lambda^2}$.

Posons

(5) $$c(\lambda ; \tau_n) = \frac{2}{\lambda + |n|}$$

et $$B^o(w_o ; \lambda , \tau_n) = \frac{1}{c(\lambda ; \tau_n)} A^o(w_o ; \lambda , \tau_n)$$

$B^o(w_o ; \lambda , \tau_n)$ définit un opérateur borné de $\mathcal{H}^n$ dans $\mathcal{H}^{-n}$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$, unitaire si $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$.

Passons maintenant au cas d'un groupe semi-simple déployé sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; dans ces deux cas, le groupe M est commutatif, une représentation irréductible τ de M est donc simplement un caractère τ de M.

Supposons par exemple que G est un groupe semi-simple complexe. Soit α une racine, alors la sous-algèbre $\underline{g}_\alpha = \underline{g}^\alpha + \underline{g}^{-\alpha} + \mathbf{C}H_\alpha$ est une sous-algèbre de $\underline{g}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2 ; \mathbf{C})$. Considérons alors l'homomorphisme φ_α de $SL(2 ; \mathbf{C})$ dans G, correspondant à l'injection de $\underline{g}_\alpha$ dans $\underline{g}$. Si τ est un caractère de M , la représentation de M_α déduite de τ par φ_α est définie par un entier n_α , de même la représentation de A_α déduite de λ par φ_α est définie par un nombre complexe λ_α . Posons $B^o(w\,;\lambda,\tau) = \prod\limits_{\alpha\in R(w)} \dfrac{1}{c(\lambda_\alpha\,;\tau_{n_\alpha})} A^o(w\,;\lambda,\tau)$ où $c(\lambda_\alpha\,;\tau_{n_\alpha})$ est défini par (5).

THÉORÈME 3.- <u>On suppose</u> G <u>déployé sur</u> $\mathbf{R}$ <u>ou</u> $\mathbf{C}$.

1) <u>Pour tout élément</u> $f \in \mathcal{H}_o^\tau$, <u>l'application</u> $\lambda \mapsto B^o(w\,;\lambda,\tau)f$ <u>est holomorphe au voisinage de</u> $\overline{D(w)}$.

2) <u>Si</u> $\lambda \in \overline{D(w)}$, <u>alors</u> $B^o(w\,;\lambda,\tau)$ <u>définit un opérateur</u> $B(w\,;\lambda,\tau)$ <u>borné de</u> $\mathcal{H}^\tau$ <u>dans</u> $\mathcal{H}^{w(\tau)}$ <u>qui entrelace les représentations</u> $\pi_{\lambda,\tau}$ <u>et</u> $\pi_{w(\lambda),\,w(\tau)}$.

<u>Si</u> $\operatorname{Re}\lambda = 0$, <u>alors</u> $B(w\,;\lambda,\tau)$ <u>est unitaire</u>.

3) <u>Soient</u> w_1 <u>et</u> w_2 <u>deux éléments de</u> M' , <u>alors, si</u> $\operatorname{Re}\lambda = 0$:

$$B(w_1w_2\,;\lambda,\tau) = B(w_1\,;w_2(\lambda),w_2(\tau)) \circ B(w_2\,;\lambda,\tau) .$$

Enfin, si G est un groupe semi-simple déployé, la représentation $(w(\lambda)\,,w(\tau))$ de Γ ne dépend que de la classe s de w dans le groupe de Weyl. Montrons qu'on peut définir si s appartient à W , un opérateur $B(s\,;\lambda,\tau)$ entrelaçant les représentations $\pi_{\lambda,\tau}$ et $\pi_{s(\lambda)\,,\,s(\tau)}$, et tel que si s_1 et s_2 appartiennent à W , alors $B(s_1s_2\,;\lambda,\tau) = B(s_1\,;s_2(\lambda),s_2(\tau)) \circ B(s_2\,;\lambda,\tau)$. Le groupe de Weyl étant engendré par les symétries s_{α_i} par rapport aux racines simples α_i , et les relations entre les générateurs étant engendrées par les relations $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha\,;\,\beta)} = 1$, où $m(\alpha\,;\beta) = 2\,,3\,,4$ ou 6 est l'ordre de l'élément $s_\alpha s_\beta$, il suffit de choisir des éléments $B(s_\alpha\,;\lambda,\tau)$ vérifiant

(6) $$B((s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha\,;\,\beta)}\,;\,\lambda\,,\,\tau) = 1\;.$$

(Si $m = s_{\alpha_{i_1}} . s_{\alpha_{i_2}} . \dots . s_{\alpha_{i_p}}$ est un élément du groupe des mots en s_{α_i}, on posera par définition

$$B(m;\lambda,\tau) = B(s_{\alpha_{i_1}}, s_{\alpha_{i_2}} \dots s_{\alpha_{i_p}}(\lambda,\tau)) \circ B(s_{\alpha_{i_2}}, s_{\alpha_{i_3}} \dots s_{\alpha_{i_p}}(\lambda,\tau)) \circ \dots \circ B(s_{\alpha_{i_p}};\lambda,\tau)\;.)$$

Or si $w_\alpha = \varphi_\alpha\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est un représentant de la symétrie s_α, d'après le théorème 3 : $B(w_\alpha\,,\,w_\alpha(\lambda)\,,\,w_\alpha(\tau)) \circ B(w_\alpha\,;\,\lambda\,,\,\tau) = (-1)^{n_\alpha}$. Posons $B(s_\alpha\,;\,\lambda\,,\,\tau) = i^{|n_\alpha|}\,B(w_\alpha\,;\,\lambda\,,\,\tau)$. Les relations (6) sont alors vérifiées pour $s_\alpha = s_\beta$. Les relations restantes $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha\,;\,\beta)} = 1$ pour $s_\alpha \neq s_\beta$ sont équivalentes aux relations $\underbrace{s_\alpha\, s_\beta\, s_\alpha\, \dots}_{m(\alpha\,;\,\beta)\text{ facteurs}} = \underbrace{s_\beta\, s_\alpha\, s_\beta\, \dots}_{m(\alpha\,;\,\beta)\text{ facteurs}}$. D'après [8], alors :

$$\underbrace{w_\alpha\, w_\beta\, w_\alpha\, \dots}_{m(\alpha\,;\,\beta)\text{ facteurs}} = \underbrace{w_\beta\, w_\alpha\, w_\beta\, \dots}_{m(\alpha\,;\,\beta)\text{ facteurs}}\;.$$

Grâce au théorème 3, et à des calculs élémentaires sur l'action du groupe de Weyl sur les racines, on vérifie successivement pour $m(\alpha\,;\,\beta) = 2\,,\,3\,,\,4$ et 6, les relations :

$$B(\underbrace{s_\alpha\, s_\beta\, s_\alpha\, .\, \dots}_{m(\alpha\,;\,\beta)\text{ facteurs}}\,;\,\lambda\,,\,\tau) = B(\underbrace{s_\beta\, s_\alpha\, s_\beta\, .\, \dots}_{m(\alpha\,;\,\beta)\text{ facteurs}}\,;\,\lambda\,,\,\tau)\;.$$

Naturellement, la Thèse de G. Schiffmann contient beaucoup d'autres résultats ; notamment une équation fonctionnelle pour les intégrales de Whittaker, introduites par Jacquet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BRUHAT - Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France, 84, 1956, p. 97-205.

[2] S. G. GINDIKIN and F. I. KARPELEVIČ - Plancherel measure for Riemannian symmetric spaces of non positive curvature, Soviet. Math., 3, 1962, p. 962-965.

[3] S. HELGASON - Applications of the Radon transform to representations of semi-simple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, à paraître.

[4] B. KOSTANT - On the existence and irreducibility of certain series of representations, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 1969, p. 627-642.

[5] R. A. KUNZE and E. M. STEIN - Uniformly bounded representations (III), Amer. J. Math., 89, 1967, p. 385-442.

[6] K. R. PARTHASARATHY, R. RANGA RAO and V. S. VARADARAJAN - Representations of complex semi-simple Lie groups and Lie algebras, Ann. of Math., 85, 1967, p. 383-429.

[7] G. SCHIFFMANN - Sur les intégrales d'entrelacement de R. A. Kunze et E. M. Stein, Thèse, Paris (1969).

[8] R. STEINBERG - Lectures on Chevalley groups, Yale University, 1967.