R. GODEMENT

Formes automorphes et produits eulériens

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 349, p. 37-53
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__37_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 349 Novembre 1968

FORMES AUTOMORPHES ET PRODUITS EULERIENS

d'après R. P. Langlands,

par R. Godement.

1 - Séries d'Eisenstein à une variable.

Soit G un groupe linéaire algébrique semi-simple connexe défini sur $\underline{Q}$ et provisoirement quelconque; on a alors un groupe adèlique $G_{\underline{A}}$ et un groupe rationnel $G_{\underline{Q}}$, sous-groupe discret à quotient de volume fini du précédent. Nous choisirons un tore déployé maximal H de G, ce qui permettra de parler des "racines" de G (par rapport à H) et du groupe de Weyl $W = N(H)_{\underline{Q}}/Z(H)_{\underline{Q}}$.

Soit P un sous-groupe parabolique <u>maximal</u> de G, dont nous supposerons qu'il contient H (c'est toujours vrai modulo conjugaison par un élément de $G_{\underline{Q}}$), et dont nous noterons U le radical unipotent. P est défini par une partie parabolique Π du système de racines de G par rapport à H, et U, en particulier, par les $\alpha \in \Pi$ telles que $-\alpha \notin \Pi$. On peut ordonner les racines de telle sorte que les $\alpha \in U$ (on espère que cette notation se comprend d'elle-même) soient toutes positives. Comme P est maximal, U est un horicycle [1] minimal de G, et si l'on désigne par α_o, α_1, ..., α_r les racines simples (pour l'ordre considéré) on peut supposer que Π est l'ensemble des $\alpha = \sum n_i \alpha_i$ telles que $n_o \geqslant 0$, les $\alpha \in U$ étant caractérisées par la relation $n_o > 0$. Les α telles que $n_o = 0$ correspondent, dans G, à un sous-groupe réductif Z de P tel que P = ZU (produit semi-direct), et qui est le centralisateur d'un tore $T \subset H$, à savoir la composante connexe de l'intersection des noyaux des racines α_1, ..., α_r de G. Il est clair que T est un tore de dimension 1, déployé sur $\underline{Q}$, et que le quotient $M = Z/T = P/TU$ est un groupe réductif dont le centre est un tore anisotrope sur $\underline{Q}$, et dont le $\underline{Q}$-rang est inférieur d'une unité à celui de G. Toute fonction sur $M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}}$ s'identifie canoniquement à une fonction sur $P_{\underline{A}}/P_{\underline{Q}}T_{\underline{A}}U_{\underline{A}}$.

Nous supposerons d'autre part que l'on a choisi (grâce à la théorie de Bruhat-Tits) un sous-groupe compact maximal K_p dans chaque composante G_p de G_A de telle sorte que les conditions suivantes soient remplies : le produit $K = \prod K_p$ est contenu dans G_A , on a $G_A = K.P_A$, et cette relation subsiste si l'on remplace P par tout autre sous-groupe parabolique de G (il suffit naturellement, pour cela, de la vérifier pour un sous-groupe parabolique minimal). L'image K^M de $K \cap P_A$ dans $M_A = P_A/T_AU_A$ possède alors la même propriété relativement à M_A .

Nous dirons, comme Harish-Chandra, qu'une fonction φ sur M_A/M_Q , à valeurs dans l'espace d'une représentation ϑ de dimension finie du groupe compact K^M , est une forme automorphe de type ϑ si l'on a $\varphi(km) = \vartheta(k)\varphi(m)$ pour tout $k \in K^M$ et tout $m \in M_A$, si en outre φ est annulée par un idéal de codimension finie de l'algèbre $\mathfrak{Z}(M)$ des opérateurs différentiels biinvariants sur le groupe de Lie M_∞ des points réels de M, et si enfin φ satisfait aux conditions de "croissance lente à l'infini" évidentes. Si la fonction φ est une forme parabolique i.e. telle que

$$(1) \qquad \int_{V_{\underline{A}}/V_{\underline{Q}}} \varphi(mv)dv = 0$$

pour tout horicycle V de M, la fonction φ est, comme on le voit facilement, à décroissance rapide à l'infini, et en particulier dans $L^2(M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}})$.

Soit φ une forme parabolique de type ϑ sur $M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}}$ et relevons-la en une fonction sur $P_{\underline{A}}$, qui sera donc invariante à droite par $P_{\underline{Q}}T_{\underline{A}}U_{\underline{A}}$. Il y a une représentation ϑ de dimension finie de K qui, restreinte à $K \cap P_{\underline{A}}$, contient la représentation de $K \cap P_{\underline{A}}$ déduite de ϑ par l'homomorphisme canonique de $K \cap P_{\underline{A}}$ sur K^M . On peut donc prolonger φ en une fonction sur $G_{\underline{A}}$, à valeurs dans l'espace de la représentation ϑ , et telle que l'on ait

$$(2) \qquad \varphi(kg\pi tu) = \vartheta(k)\varphi(g) \quad \text{pour } k \in K,\ g \in G_{\underline{A}} ,\ \pi \in P_{\underline{Q}} ,\ t \in T_{\underline{A}} ,\ u \in U_{\underline{A}} .$$

Comme d'autre part U est invariant dans P, on peut considérer la représentation adjointe de P dans l'algèbre de Lie de U; le déterminant de cette représentation sera noté $\beta_U(p)$, de sorte qu'on a pour la mesure invariante de $U_{\underline{A}}$ la formule

$$(3) \qquad d(pup^{-1}) = |\beta_U(p)|\, du \quad .$$

Nous poserons

(4) $$\varphi(g;s) = |\beta_U(p)|^{-s}\varphi(g) = |\beta_U(p)|^{-s}\mathcal{J}(k)\varphi(p) \qquad \text{si} \quad g = kp ,$$

de sorte qu'on a maintenant, au lieu de (2), la relation

(5) $$\varphi(kg\pi tu;s) = |\beta_U(t)|^{-s}\mathcal{J}(k)\varphi(g;s) \quad .$$

On peut maintenant construire, à l'aide de la fonction $\varphi(g;s)$, une série d'Eisenstein

(6) $$E_\varphi(g;s) = \sum_{G_{\underline{Q}}/P_{\underline{Q}}} \varphi(g\gamma;s) \quad ,$$

laquelle converge comme il est bien connu pour Re(s) assez grand - en fait, ici, pour Re(s) > 1 - et se prolonge analytiquement à tout le plan complexe comme l'ont montré Selberg et Langlands (voir le chapitre IV de [2]). Pour formuler de façon précise le résultat, il faut tout d'abord calculer, comme on l'a fait dans [1] avec des hypothèses un peu plus générales, les "termes constants des séries de Fourier de E_φ suivant les diverses classes d'horicycles" de G. Soit U' un tel horicycle, i.e. le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique P' = N(U') de G. Il s'agit de calculer

(7) $$\begin{aligned} E_\varphi^{U'}(g;s) &= \int_{U'_{\underline{A}}/U'_{\underline{Q}}} E_\varphi(gu';s)du' = \int_{U'_{\underline{A}}/U'_{\underline{Q}}} du' \sum_{G_{\underline{Q}}/P_{\underline{Q}}} \varphi(gu'\gamma;s) \\ &= \sum_{U'_{\underline{Q}}\backslash G_{\underline{Q}}/P_{\underline{Q}}} \int_{U'_{\underline{A}}/U'_{\underline{Q}}\cap\gamma(P_{\underline{Q}})} \varphi(gu'\gamma;s)du' \end{aligned}$$

comme le montre un calcul trivial, et où l'on pose $\gamma(P_{\underline{Q}}) = \gamma P_{\underline{Q}}\gamma^{-1}$. Il est clair que le terme général se ramène encore à une intégration sur

$$\gamma^{-1}(U')_{\underline{A}}/\gamma^{-1}(U')_{\underline{Q}} \cap P_{\underline{Q}} \quad ,$$

qui se factorise à travers une intégration sur l'image dans $M_{\underline{A}} = P_{\underline{A}}/Z_{\underline{A}}$ du sous-groupe $\gamma^{-1}(U')_{\underline{A}} \cap Z_{\underline{A}}$, divisée par un groupe de points rationnels qui importe peu. Or on constate facilement (en supposant par exemple que P' contient, comme P, le tore déployé maximal H et en remplaçant γ, ce qui est permis modulo le théorème de Bruhat, par un élément du groupe de Weyl) que cette image, si elle ne se réduit pas à l'unité, est un horicycle de M - auquel cas le terme correspondant de la somme (7) est nul puisque l'on est parti, sur $M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}}$, d'une forme automorphe φ <u>parabolique</u>. Restent donc les termes γ tels que Z ne rencontre pas $\gamma^{-1}(U')$. Supposant $H \subset P'$ et écrivant $P' = Z'U'$ avec $H \subset Z'$ on peut supposer $\gamma = \xi w$ avec $w \in N(H)_{\underline{Q}}$ et $\xi \in Z'_{\underline{Q}}$, d'où $\gamma^{-1}(U') = w^{-1}(U')$. Comme P est <u>maximal</u>, il est alors clair qu'on ne peut avoir $Z \cap w^{-1}(U') = \{e\}$ que si P' est lui aussi maximal, et qu'alors $w^{-1}(U')$ ne peut être que U ou le groupe "opposé" , obtenu en multipliant par -1 les racines qui appartiennent à U. On a Z' = Z dans les deux cas, mais il faut distinguer deux situations, suivant que U et le groupe opposé sont conjugués, ou non.

<u>Cas</u> 1 : U <u>et son opposé sont conjugués</u> (exemple : $G = SL(n)$ et on prend pour P le groupe triangulaire dans la partition $n = n/2 + n/2$, ce qui suppose n pair). Le seul et unique groupe parabolique pour lequel l'expression (7) puisse ne pas être nulle est, à conjugaison près, P lui-même. On peut donc se borner à supposer U' = U dans ce cas. Dans la somme (7), on peut se borner aux $\gamma = \xi w$ tels que $w^{-1}(U)$ soit égal à U ou à son opposé. Un tel w normalise Z et par suite on a, pour ces γ , la relation $U'_{\underline{Q}}\gamma P_{\underline{Q}} = P_{\underline{Q}}wP_{\underline{Q}}$, ce qui permet de supposer $\xi = e$ et $\gamma = w$. Comme w est déterminé modulo un élément de $Z_{\underline{Q}}$ par son effet sur U, il reste donc, dans la somme (7), <u>deux</u> termes non nuls au plus, celui qui correspond à la classe unité, et celui qui correspond à un w transformant U en le sous-groupe opposé (ces w sont évidemment caractérisés par le fait qu'ils induisent sur T l'automorphisme $t \longmapsto t^{-1}$). Choisissant une fois pour toutes un tel w il reste donc, puisque $U \cap w(P) = \{e\}$, la relation

(8) $$E^U_\varphi(g;s) = \varphi(g;s) + \int_{U_{\underline{A}}} \varphi(guw;s)du \quad .$$

Pour des raisons d'invariance triviales, il existe sur $M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}} = P_{\underline{A}}/P_{\underline{Q}}T_{\underline{A}}U_{\underline{A}}$ une fonction $c(s)\varphi$, qui dépend linéairement de φ et holomorphiquement de s, et telle que l'on ait

(9) $$\int_{U_{\underline{A}}} \varphi(guw;s)du = |\rho_U(p)|^{s-1}\mathcal{J}(k)c(s)\varphi(p) \quad \text{si } g = kp \quad , \quad Re(s) > 1.$$

Il est facile de voir que $c(s)\varphi$ est comme φ une forme automorphe parabolique de M, dont l'espèce dépend uniquement de celle de φ (rappelons en passant que les formes d'espèce donnée forment un espace vectoriel de dimension finie), et le second membre de (9) est donc le terme $\gamma = e$ de la série d'Eisenstein $E_{c(s)\varphi}(g;1-s)$ associée à la forme parabolique $c(s)\varphi$ et pour la valeur 1-s du paramètre. Ceci dit, on a les résultats suivants: la fonction c(s) (définie à priori pour Re(s) > 1, et dont les valeurs appartiennent à un certain espace vectoriel de dimension finie) est méromorphe dans tout le plan complexe;

elle est holomorphe dans le demi-plan fermé $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}$, à ceci près qu'elle peut admettre un nombre fini de pôles simples situés sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ de l'axe réel; on a l'équation fonctionnelle

$$(10) \qquad c(1-s)c(s) = 1$$

(on peut toujours se ramener au cas où $c(s)$ transforme des formes d'espèce donnée en formes de même espèce); la série d'Eisenstein $E_\varphi(g;s)$ est méromorphe dans le plan complexe; ses pôles sont des pôles de $c(s)$, ses pôles dans $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}$ sont simples; enfin on a l'équation fonctionnelle

$$(11) \qquad E_{c(s)\varphi}(g;1-s) = E_\varphi(g;s) \quad ,$$

i.e.

$$(12) \qquad \sum_{G_{\underline{Q}}/P_{\underline{Q}}} \int_{U_{\underline{A}}} \varphi(g\gamma uw;s)du = \sum_{G_{\underline{Q}}/P_{\underline{Q}}} \varphi(g\gamma;s) \quad ,$$

à ceci près bien sûr que le premier membre n'a pas de sens lorsque le second en a un...

<u>Cas</u> 2 : U <u>et son opposé sont non conjugués</u> (exemple : $G = SL(n)$ et on prend pour P le sous-groupe triangulaire dans une partition $n = p+q$ avec $p \neq q$). Il y a alors deux classes de sous-groupes paraboliques maximaux pouvant conduire à un résultat non nul. La première est celle de P, pour laquelle on trouve visiblement

$$(13) \qquad E_\varphi^U(g;s) = \varphi(g;s) \quad ,$$

et la seconde celle du groupe parabolique $P' = ZU'$, où U' est l'horicycle opposé à U, et pour laquelle on trouve

$$(14) \qquad E_\varphi^{U'}(g;s) = \int_{U'_{\underline{A}}} \varphi(gu';s)du' \quad .$$

Ici encore, il existe sur $M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}} = P'_{\underline{A}}/P'_{\underline{Q}}T_{\underline{A}}U'_{\underline{A}}$ une forme automorphe parabolique $c(s)\varphi$ dont l'espèce dépend seulement de celle de φ, et pour laquelle on a

$$(15) \qquad \int_{U'_{\underline{A}}} \varphi(gu';s)du' = |\beta'_U(p')|^{s-1}\mathcal{H}(k)c(s)\varphi(p') \quad \text{si } g = kp' \quad ,$$

en notant β'_U ce qui, pour P', joue le même rôle que β_U pour P (évidemment β_U et β'_U sont inverses l'un de l'autre sur $P \cap P' = Z$). La fonction $c(s)$ admet encore comme plus haut un prolongement analytique, avec un nombre fini de pôles simples dans $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}$, tous situés sur $\left]\frac{1}{2}\, , 1\right]$. Pour obtenir une équation fonctionnelle, il faut faire intervenir symétriquement P et P' . Si ψ est une forme automorphe parabolique de même espèce que $c(s)\varphi$, on peut lui attacher sur $G_{\underline{A}}$ la fonction

(16) $$\psi'(g;s) = |\beta_U'(p')|^{-s} \vartheta(k)\psi(p') \qquad \text{si } g = kp'$$

avec cette fois $p' \in P_{\underline{A}}'$, puis la série d'Eisenstein

(17) $$E_\psi'(g;s) = \sum_{G_{\underline{Q}}/P_{\underline{Q}}'} \psi'(g\gamma;s) \qquad ;$$

cela dit, on est conduit, en échangeant les rôles de P et P' dans ce qu'on a fait tout d'abord, à définir un opérateur $c'(s)$ qui fera passer de la fonction ψ sur $P_{\underline{A}}'/P_{\underline{Q}}'T_{\underline{A}}U_{\underline{A}}'$ à une fonction $c'(s)\psi$ sur $P_{\underline{A}}/P_{\underline{Q}}T_{\underline{A}}U_{\underline{A}}$, donnée par

(18) $$\int_{U_{\underline{A}}} \psi'(gu;s)du = |\beta_U(p)|^{s-1} \vartheta(k)c'(s)\psi(p) \qquad \text{si } g = kp \quad .$$

On a un prolongement analytique pour $c'(s)$, avec les mêmes propriétés que plus haut concernant les pôles, et l'équation fonctionnelle s'écrit maintenant

(19) $$c'(s)c(1-s) = 1 \ .$$

Les séries d'Eisenstein relatives à P et à P' se prolongent, avec tout au plus les mêmes pôles que c et c', et l'équation fonctionnelle s'écrit

(20) $$E_{c(s)\varphi}'(g;1-s) = E_\varphi(g;s) \quad ,$$

i.e., de façon imagée, sous la forme

(21) $$\sum_{G_{\underline{Q}}/P_{\underline{Q}}'} \int_{U_{\underline{A}}'} \varphi(g\gamma u';s) = \sum_{G_{\underline{Q}}/P_{\underline{Q}}} \varphi(g\gamma;s) \qquad .$$

On remarquera que, dans le cas 1 comme dans le cas 2, on a un prolongement analytique pour les "termes constants" des séries d'Eisenstein, donc pour les intégrales (9) et (14). L'intégrale (9) se ramène du reste, formellement, à l'intégrale (14) en remplaçant g par gw et en observant que, dans le cas 1, la transformation w du groupe de Weyl applique U sur le sous-groupe unipotent opposé U' (qui est conjugué de U dans ce cas). On voit donc en définitive que, dans tous les cas, l'intégrale

$$(22) \qquad \int_{U'_{\underline{A}}} \varphi(gu' \,;\, s)du' \quad ,$$

définie à priori pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, est une fonction méromorphe dans tout le plan complexe, dont les seules singularités possibles dans $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}$ sont des pôles simples situés sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,,\,1\right]$. Ils ne dépendent pas de g.

2 - Développement eulérien de l'intégrale (22).

Dans ce qui précède, la représentation ϑ du groupe compact $K = \prod K_p$ est triviale sur K_p pour presque tout p; soit S l'ensemble des places p où ϑ n'est pas triviale. Pour $p \notin S$, la forme parabolique φ sur $M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}} = Z_{\underline{A}}/Z_{\underline{Q}}T_{\underline{A}}$ dont nous sommes partis est invariante à gauche par l'image dans le groupe M_p du groupe compact $K_p \cap Z_p$; soit K_p^M cette image; la théorie de Bruhat-Tits montre certainement (i.e. très probablement) que K_p^M est un "bon" sous-groupe compact maximal de M_p et que la théorie des fonctions sphériques à la Satake s'applique pour M_p et K_p^M (pour les groupes déployés, auxquels se borne Langlands, ces assertions "très probables" sont vraiment certaines). Soit $\mathcal{H}_p(M)$ l'algèbre de Hecke de M_p , i.e. l'algèbre (pour le produit de convolution) des fonctions continues à support compact sur M_p qui sont invariantes à droite et à gauche par K_p^M . On sait que cette algèbre est commutative, et comme chaque $f \in \mathcal{H}_p(M)$ s'identifie à une mesure à support compact sur $M_{\underline{A}}$ on peut définir $f * \varphi$ pour toute forme automorphe φ sur $M_{\underline{A}}$. Si la forme φ appartient - comme il est naturel de le supposer - à une composante irréductible de la représentation "régulière" de $M_{\underline{A}}$ dans l'espace $L_0^2(M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}})$ des éléments paraboliques de $L^2(M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}})$ - rappelons que la représentation de $M_{\underline{A}}$ dans cet espace se décompose de façon discrète - alors on aura nécessairement des relations de la forme

$$(23) \qquad f * \varphi = \lambda_p(f)\varphi \qquad \text{pour tout } p \notin S \text{ et toute } f \in \mathcal{H}_p(M) ,$$

où λ_p est un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{H}_p(M)$ dans le corps complexe; la relation (23) exprime que φ est une fonction propre, pour $p \notin S$, des "opérateurs de Hecke" relatifs à p. En outre, si l'on rend la fonction $\varphi(m)$ - qui est déjà invariante à gauche par K_p^M - invariante à droite par ce sous-groupe, on trouve un résultat qui, en tant que fonction de la composante m_p de $m \in M_{\underline{A}}$, est proportionnel à la fonction sphérique $\theta_p(m_p)$ de M_p relative à l'homomorphisme λ_p figurant dans (23); rappelons que celle-ci est caractérisée par les propriétés suivantes : elle est bi-invariante par K_p^M , elle est égale à 1 à l'origine, et enfin on a $f * \theta_p = \lambda_p(f)\theta_p$ pour toute $f \in \mathcal{H}_p(M)$.

Le premier pas, pour calculer (22), est d'évaluer une intégrale de la forme

$$(24) \qquad \int_{U'_p} \varphi(zu';s)du' \qquad \text{pour } z \in Z_{\underline{A}} \quad ,$$

ce qui est, en principe, un problème sur G_p uniquement. Nous allons voir que <u>pour</u> $p \notin S$ <u>l'intégrale</u> (24) <u>est proportionnelle à</u> $|\beta_U(z_p)|\ \varphi(z;s)$, avec un coefficient fonction de s et que l'on peut calculer entièrement, tout au moins si G est déployé.

Pour cela, associons à toute fonction ξ définie sur M_p et invariante à gauche par K_p^M la fonction $\xi(g;s)$ définie sur G_p par la relation $\xi(g;s) = |\beta_U(z)|^{-s}\xi(\bar{z})$ si $g = kzu$ avec $k \in K_p$, etc... , où s est un nombre complexe donné tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Pour ξ bornée l'intégrale

$$(25) \qquad \mu_p^s(\xi) = \int_{U'_p} \xi(u';s)du'$$

est alors convergente, et il est clair que la forme linéaire $\xi \longmapsto \mu_p^s(\xi)$ définit sur M_p une mesure bornée invariante à gauche par K_p^M . Si $k \in K_p^M$ et si l'on remplace la fonction $\xi(m)$ par la fonction $\xi(mk)$, on remplace évidemment $\xi(g;s)$ par $\xi(g\bar{k};s)$, en notant $\bar{k}$ un élément de $K_p \cap Z_p$ qui se projette sur k, et par suite $\mu_p^s(\xi)$ est remplacé par

$$(26) \qquad \int_{U'_p} \xi(u'\bar{k};s)du' = \int_{U'_p} \xi(\bar{k}u';s)du' = \int_{U'_p} \xi(u';s) = \mu_p^s(\xi)$$

puisque $K_p \cap Z_p$ normalise U'_p . Autrement dit la mesure μ_p^s définie par (25) est invariante à droite et à gauche par le sous-groupe compact maximal considéré de M_p . Si d'autre part on remplace la fonction $\xi(z)$ par la fonction $\xi(zz_o)$ pour un $z_o \in Z_p$, i.e. si l'on soumet ξ à une translation à droite dans M_p , on remplace $\xi(g;s)$ par $|\beta_U(z_o)|^s\xi(gz_o\ ;\ s)$, d'où l'on déduit par un calcul trivial que

$$(27) \qquad |\beta_U(z)|^{s-1}\int_{U'_p}\xi(zu';s)du' = \int_{M_p} \xi(m\bar{z})d\mu_p^s(m) = \check{\mu}_p^s * \xi(\bar{z})$$

en notant $\bar{z}$ l'image dans M_p d'un $z \in Z_p$. Si la fonction ξ considérée ici sur M_p vérifie la relation (23) on en déduit, en remplaçant f par $\check{\mu}_p^s$ dans (23), une relation

$$(28) \qquad \int_{U'_p} \xi(zu';s)du' = c_p(s)|\beta_U(z)|^{1-s}\xi(\bar{z}) \quad ,$$

où $c_p(s)$ dépend de s et de l'homomorphisme λ_p , mais non de la fonction ξ.

Pour appliquer ce raisonnement ingénieux à l'intégrale (24), en supposant $g = z \in Z_{\underline{A}}$ on regarde la fonction $\varphi(m)$, définie à priori sur $M_{\underline{A}}$, comme une fonction sur M_p en donnant à toutes les composantes de m autres que m_p des valeurs fixes. On trouve alors visiblement la relation

(29) $$\int_{U'_p} \varphi(zu';s)du' = c_p(s)\,|\beta_U(z_p)|\,\varphi(z;s) \quad .$$

Pour passer de là à un produit eulérien, on remarque d'abord que la convergence de l'intégrale (22) pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ provient uniquement du fait que φ est bornée sur $M_{\underline{A}}$ et que ceci impose aux paramètres complexes dont dépend l'homomorphisme λ_p de l'algèbre de Hecke de M_p des restrictions qui rendent convergent le produit infini

(30) $$\prod_{p \notin S} c_p(s)$$

pour Re(s) assez grand; il faut, pour s'en convaincre, soit utiliser des résultats sur le comportement à l'infini des fonctions sphériques p-adiques comme le fait Langlands, soit, ce qui est beaucoup plus rapide, utiliser les formules explicites qui viennent d'être publiées par I.G. Macdonald [5]. Si l'on pose

(31) $$U'_S = \prod_{p \in S} U'_p$$

il est alors clair d'après (29) que

(32) $$\int_{U'_{\underline{A}}} \varphi(zu';s)du' = \left(\prod_{p \notin S} |\beta_U(z_p)|\,.\, c_p(s)\right) \int_{U'_S} \varphi(zu';s)du' \quad ,$$

l'intégrale sur U'_S disparaissant si $S = \emptyset$, cas étudié par Langlands. Comme on peut <u>conjecturer</u> que cette intégrale sur U'_S se prolonge analytiquement - il s'agit d'un problème local, analogue aux "intégrales d'entrelacement" étudiées par Kunze et Stein, Schiffmann, Gindikin et Karpelevich, etc... - on en conclut que le produit infini

(33) $$\prod_{p \notin S} c_p(s)$$

se prolonge analytiquement lui aussi, le résultat étant assuré au moins si $S = \emptyset$.

3 - <u>Calcul du produit infini</u>.

Il faut maintenant calculer chaque terme $c_p(s)$ du produit (33). C'est un problème local, et comme on a d'après (28) la relation

(34) $$\int_{U'_p} \xi(u';s)du' = c_p(s)\,\xi(e)$$

pour <u>toute</u> fonction ξ bornée sur M_p et vérifiant la relation (23), de sorte qu'il s'impose de choisir la fonction ξ la plus simple possible. Nous supposerons maintenant - faute de pouvoir mieux faire - que le groupe G est <u>déployé</u>. Le tore déployé maximal H choisi au début et tel que $T \subset H \subset Z$ est alors un tore maximal déployé, et son image $\bar{H}$ dans M est un tore maximal déployé de M. Choisissons un sous-groupe unipotent maximal V contenant U et normalisé par H, i.e. un ordre sur les racines de G par rapport à H. L'image $\bar{V}$ de $V \cap Z$ dans M est un sous-groupe unipotent maximal de M normalisé par $\bar{H}$, et l'on a $M_p = K_p^M \bar{H}_p \bar{V}_p$ pour tout p. Si $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines simples dans V, et si U est l'horicycle minimal correspondant à α_0 comme on l'a supposé au début, les racines de M sont celles de G qui ne contiennent pas α_0, de sorte que $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ est une base du système de racines de M par rapport à $\bar{H}$. Considérons, sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H, la forme linéaire $\bar{\rho}$, demie-somme des racines qui appartiennent à V mais non à U; elle est trivialement nulle sur l'algèbre de Lie de T, donc se définit sur l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{h}}$ de $\bar{H}$. D'autre part, la théorie de Satake [6] montre qu'à l'homomorphisme λ_p de l'algèbre de Hecke de M_p correspond sur l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{h}}$ une forme linéaire λ_p prenant sur les éléments H_α bien connus des valeurs <u>complexes</u>, et telle que, si l'on désigne par χ_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ une base du groupe des caractères rationnels du tore $\bar{H}$, et par $\bar{H}_i^*$ la base duale de l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{h}}$, on trouve parmi les solutions de (23) la fonction ξ_p donnée par

$$(35) \qquad \xi_p(khv) = \prod |\chi_i(h)|^{-\langle \bar{H}_i^*,\, \lambda_p + \bar{\rho} \rangle} \qquad (k \in K_p^M,\ h \in \bar{H}_p,\ v \in \bar{V}_p) .$$

En considérant λ_p comme une forme linéaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H, nulle sur la sous-algèbre $\mathfrak{t}$ de T, il vient aussitôt, pour la fonction $\xi_p(g;s)$ correspondante sur G_p, la formule

$$(36) \qquad \xi_p(khv\ ;\ \tfrac{s+1}{2}) = \prod |\chi_i(h)|^{-\langle H_i^*,\, \lambda_p + s\rho_U + \rho \rangle} \qquad (k \in K_p,\ h \in H_p,\ v \in V_p) ,$$

où les χ_i $(0 \leqslant i \leqslant r)$ forment une base du groupe des caractères rationnels de H, où les H_i^* forment la base duale de $\mathfrak{h}$, et où l'on pose

$$(37) \qquad \rho = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in V} \alpha \quad , \quad \rho_U = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in U} \alpha \ .$$

Le calcul de l'intégrale (34) pour la fonction (36) s'effectue par une méthode maintenant bien connue, et qui est exposée par exemple dans les pages 257 à 270 de la thèse de Jacquet [3], méthode qui permet en fait de calculer l'intégrale (34) non seulement sur U'_p mais plus généralement sur tout "hémicyle" , i.e. sur l'intersection de l'horicycle opposé à V avec n'importe quel horicycle normalisé par H, et de ramener le calcul au cas du groupe SL(2), où il reste à sommer des progressions géométriques. On trouve alors que

$$(37)\qquad c_p\left(\frac{s+1}{2}\right) = \prod_{\alpha \in U} \frac{G_p(\langle H_\alpha, \lambda_p + s\rho_U\rangle)}{G_p(\langle H_\alpha, \lambda_p + s\rho_U\rangle + 1)} \quad \text{où} \quad G_p(z) = (1 - p^{-z})^{-1} \quad \text{si } z \in \underline{C}.$$

Cette formule, valable pour p fini, suppose que G est déployé, et que la composante p-adique de $\mathcal{J}$ est triviale. Pour p infini, et dans les mêmes hypothèses, on trouve

$$(38)\qquad c_\infty\left(\frac{s+1}{2}\right) = \prod_{\alpha \in U} \frac{G_\infty(\langle H_\alpha, \lambda_\infty + s\rho_U\rangle)}{G_\infty(\langle H_\alpha, \lambda_\infty + s\rho_U\rangle + 1)} \quad \text{où} \quad G_\infty(z) = \pi^{-z/2}\,\Gamma(z/2)$$

est la fonction que Weil désigne par $G_1(z)$. La forme linéaire $\lambda_\infty \in \mathfrak{f}^*_{\underline{C}}$ qui figure ici s'obtient, modulo les résultats bien connus de Harish-Chandra, en remplaçant les relations (23) par des équations différentielles (invariantes à droite et à gauche) sur G . Noter que la donnée de la forme parabolique φ ne détermine pas univoquement les λ_p ; il y a toujours une ambiguïté due au groupe de Weyl, et en outre, pour p fini, possibilité d'ajouter à λ_p un élément de $\frac{2\pi i}{\log p}\mathcal{V}$, en notant $\mathcal{V}$ le réseau qui, dans le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{f}$, représente les caractères rationnels du tore maximal $\bar{H}$ de M.

4 - Les fonctions $L(s;\pi,\varphi)$.

Les constructions précédentes supposent que l'on a obtenu M comme la partie semi-simple d'un groupe G tel que rg(G) = 1 + rg(M). Mais comme le montre Langlands il est possible d'attacher à chaque forme parabolique φ sur $M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}}$ des produits infinis qui ne font intervenir que le groupe M lui-même, et qui généralisent directement ceux qu'on obtient, lorsque M = SL(2), par la théorie classique de Hecke-Maas.

Pour cela, et supposant toujours M déployé, considérons, au lieu du système R des racines de M par rapport à son tore maximal $\bar{H}$, le système de racines dual de R, formé des vecteurs H_α ($\alpha \in R$) de l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{f}}$ de $\bar{H}$; il correspond à un groupe semi-simple M^* qui possède un tore maximal dont l'algèbre de Lie s'identifie canoniquement au dual $\bar{\mathfrak{f}}^*$ de $\bar{\mathfrak{f}}$; si l'on caractérise M (qui n'est déterminé par son algèbre de Lie qu'à une isogénie près) par le réseau $\bar{\mathcal{V}} \subset \bar{\mathfrak{f}}^*$ qui correspond au groupe des caractères rationnels du tore $\bar{H}$, il faut naturellement choisir pour M^* le groupe dont le réseau des poids est le réseau dual $\bar{\mathcal{V}}^* \subset \bar{\mathfrak{f}}$ de $\bar{\mathcal{V}}$, de sorte que si M est un groupe adjoint M^* est simplement connexe. Si l'on considère le groupe $M^*_{\underline{C}}$ des points complexes de M^* , on peut alors attacher à chaque forme linéaire complexe λ sur $\bar{\mathfrak{f}}$, i.e. telle que $\lambda(H_\alpha) \in \underline{C}$ pour toute racine α, un point $\exp(\lambda)$ du tore maximal $\overline{H}^*_{\underline{C}} = \exp(\overline{\mathfrak{f}}^*)$. Si en particulier on a sur $M_{\underline{A}}/M_{\underline{Q}}$ une forme automorphe φ invariante à gauche par le compact maximal K^M_p de M_p pour tout p fini, on a vu qu'il correspond à φ, pour chaque p fini, une forme linéaire complexe λ_p sur $\overline{\mathfrak{f}}$; considérons alors la forme linéaire $\log(p)\,\lambda_p$; l'ambiguité $2\pi i \overline{\mathfrak{w}}$ qui figure dans sa définition se trouve très exactement dans le noyau de l'application $\exp : \overline{\mathfrak{f}}^*_{\underline{C}} \longrightarrow \overline{H}^*_{\underline{C}}$; on voit donc que la donnée des valeurs propres propres des opérateurs de Hecke détermine dans le tore complexe $H^*_{\underline{C}}$ un point $h_p = \exp(\log(p)\lambda_p)$ qui est <u>parfaitement défini modulo le groupe de Weyl</u> (évidemment le même pour M et le groupe dual M^*). Si l'on choisit alors une représentation linéaire π de dimension finie de M^* (rationnelle et définie sur $\underline{Q}$ - ou, ce qui revient au même, une représentation sur les complexes), l'expression

$$(39) \qquad L(s;\pi,\varphi) = \prod_{p \text{ fini}} \text{dét}(1 - p^{-s}\pi(h_p))^{-1}$$

ne dépend que de φ, et non du choix des h_p modulo le groupe de Weyl. Si par exemple on prend $M = SL(2)$, si l'on désigne par λ_p les nombres tels que $T_p\varphi = \lambda_p \varphi$ dans la notation standard, et si l'on prend pour π la représentation de dimension m+1 de M, on trouve, après un calcul facile, que si φ est de poids k alors

$$(40) \qquad L(s;\pi,\varphi) = \prod_p \prod_{0 \leq n \leq m} (1 - p^{-s}\alpha_p^{m-2n})^{-1}$$

où les α_p sont déterminés en fonction des λ_p par la relation $p^{\frac{1-k}{2}}\lambda_p = \alpha_p + \alpha_p^{-1}$; ce sont précisément les produits infinis de Hecke pour m = 1, cependant qu'ils ont été introduits récemment par Serre [7] pour m quelconque; on ignore pour le moment s'ils se prolongent analytiquement (on le sait pour m = 2 grâce à une construction de Selberg, et Langlands le prouve aussi pour m = 3). Dans le cas général, Langlands conjecture que la fonction (39) est méromorphe, et admet une équation fonctionnelle reliant $L(s;\pi,\varphi)$ à $L(1-s;\check{\pi},\varphi)$, où $\check{\pi}$ **est la contragrédiente de** π **.**

En ce qui concerne la convergence du produit infini (39), on observe que les fonctions sphériques p-adiques obtenues en rendant φ bi-invariante par les K^M_p étant bornées, les formules de MacDonald montrent aussitôt que, pour tout p, la forme linéaire Re λ_p appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des transformés de $\overline{\rho}$ ($\frac{1}{2}$ somme des racines positives de M) par le groupe de Weyl de M, d'où résulte, pour tout poids ξ de π, une majoration $|\xi(h_p)| \leq cp^N$ avec des constantes c et N indépendantes de p. La convergence résulte évidemment de là.

Notons enfin que, si l'on définit $G(u) = \prod G(\lambda_i)$ pour toute fonction holomorphe G, et pour toute matrice complexe semi-simple de valeurs propres λ_i, on peut encore, sans introduire les h_p, écrire (39) sous la forme

(39 bis)
$$L(s;\pi,\varphi) = \prod_{p \text{ fini}} G_p(s - \pi(\lambda_p)) \quad .$$

Lorsque ϑ est triviale aussi à l'infini, il s'impose de poser

$$\xi(s;\pi,\varphi) = G_\infty(s - \pi(\lambda_\infty))L(s;\pi,\varphi),$$

et d'écrire l'équation fonctionnelle conjecturale sous la forme

$$\xi(s;\pi,\varphi) = \xi(1-s;\check{\pi},\varphi)$$

comme le fait Langlands.

5 - Expression de c(s) à l'aide de fonctions $L(s;\pi,\varphi)$.

Revenant à la situation initiale, nous allons maintenant montrer comment le terme général (37) du facteur c(s) s'exprime à l'aide des facteurs p-adiques de certains produits (39). Partons de la formule (37) et écrivons-la sous la forme

(41)
$$c_p(s+\tfrac{1}{2}) = \prod_{\alpha \in U} G_p(\langle H_\alpha, \lambda_p + s\rho_U\rangle)/G_p(\langle H_\alpha, \lambda_p + s\rho_U\rangle + 1)$$

où $\beta_U = 2\rho_U$ est la somme des $\alpha \in U$. Considérons le groupe dual G^* de G et son tore maximal

(42)
$$H^* = \exp(\mathfrak{h}^*) \quad ,$$

si l'on ose dire. Les racines de G^* par rapport à H^* sont les $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ traditionnels; si l'on note α^* le caractère rationnel de H^* défini par H_α, on a donc

(43)
$$\alpha^*(h) = e^{\langle H_\alpha, \lambda\rangle} \qquad \text{si } h = \exp(\lambda) \in H^*_{\underline{C}} \quad \text{avec } \lambda \in \mathfrak{h}^*_{\underline{C}} \ ,$$

d'où aussi

(44)
$$\alpha^*(h)^{-1} = |p|^{\langle H_\alpha, \lambda\rangle} \qquad \text{si } h = \exp(\log(p)\lambda) \quad \text{avec } \lambda \in \mathfrak{h}^*_{\underline{C}} \ .$$

Considérons maintenant les groupes duals G^* et M^* et leurs tores maximaux $H^* = \exp(\mathfrak{h}^*)$ et $\bar{H}^* = \exp(\bar{\mathfrak{h}}^*)$. Comme $\bar{\mathfrak{h}}$ est un quotient de $\mathfrak{h}$, on peut regarder $\bar{\mathfrak{h}}^*$ comme une sous-algèbre de $\mathfrak{h}^*$; le noyau de l'application exp : $\bar{\mathfrak{h}}^*_{\underline{C}} \longrightarrow \bar{H}^*_{\underline{C}}$ est (au facteur $2\pi i$ près) le réseau $\bar{\mathcal{M}}$ qui correspond aux caractères rationnels du tore maximal $\bar{H}$ de M, i.e. aux caractères rationnels du tore maximal H de G triviaux sur T, de sorte que l'on a

(45) $$\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cap \bar{\mathfrak{h}}^*$$

en notant $\mathcal{M}$ le réseau de $\mathfrak{h}^*$ qui définit le groupe des caractères rationnels de H, i.e. le noyau (à $2\pi i$ près) de l'application exp : $\mathfrak{h}^*_{\underline{C}} \longrightarrow H^*_{\underline{C}}$. Par suite l'injection naturelle de $\bar{\mathfrak{h}}^*$ dans $\mathfrak{h}^*$ conduit à regarder $\bar{H}^*$ comme un sous-tore de H^*, et comme les racines de M^* s'identifient naturellement à des racines de G^* on obtient de cette façon une injection naturelle de M^* dans G^* (alors que M était un quotient d'un sous-groupe de G; bel exemple - s'il n'est pas canulé - de passage par dualité d'un objet-quotient à un sous-objet). Il est clair que, dans cette injection, l'élément h_p de $\bar{H}^*_{\underline{C}}$ qu'on a, pour tout p premier, attaché à la forme parabolique φ au n° précédent, se transforme en l'élément $\exp(\log(p)\lambda_p)$ de $H^*_{\underline{C}}$, où maintenant l'on regarde λ_p comme une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$, nulle sur la sous-algèbre $\mathfrak{t}$ correspondant au tore T. La formule (44) montre alors que

(46) $$\alpha^*(h_p)^{-1} = |p|^{\langle H_\alpha, \lambda_p \rangle},$$

ce qui fournit une interprétation à l'aide de h_p d'une partie du second membre de (41). Pour aller plus loin, il faut introduit l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$ (sic) de G^*, sa sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}^*$, les sous-espaces radiciels $\mathfrak{g}^*(\alpha)$ de $\mathfrak{g}^*$ correspondant aux racines α^*, et enfin la sous-algèbre nilpotente

(47) $$\mathfrak{n}^* = \sum_{\alpha \in U} \mathfrak{g}^*(\alpha) \quad ;$$

en considérant la représentation adjointe de $M^* \subset G^*$ dans $\mathfrak{g}^*$ on trouve évidemment une représentation π de M^* dans $\mathfrak{n}^*$, et il est maintenant clair que les premiers membres de (46), pour les $\alpha \in U$ qui interviennent dans (41), sont les <u>valeurs propres de l'opérateur</u> $\check{\pi}(h_p)$, où $\check{\pi}$ est la contragrédiente de π. En regardant π comme une représentation de l'algèbre de Lie de M^* dans $\mathfrak{n}^*$, et en regardant les λ_p comme des éléments de cette algèbre de Lie (et en fait d'une de ses sous-algèbres de Cartan, à savoir de $\bar{\mathfrak{h}}^*$), on verrait aussi bien que <u>les nombres</u> $\langle H_\alpha, \lambda_p \rangle$ <u>sont les valeurs propres de l'opérateur</u> $-\check{\pi}(\lambda_p)$.

Considérons enfin la représentation adjointe de l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}^*$ dans $\mathfrak{g}^*$; pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, l'opérateur $\mathrm{ad}(\lambda)$ effectue dans le sous-espace $\mathfrak{g}^*(\alpha)$ une multiplication par le scalaire $\lambda(H_\alpha) = \langle H_\alpha, \lambda \rangle$. Prenons en particulier pour λ l'élément β_U qui figure au second membre de (41). Si une racine β est dans M, l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de U est stable par les opérateurs $\mathrm{ad}(X_\beta)$ et $\mathrm{ad}(X_{-\beta})$, par suite l'opérateur $\mathrm{ad}(H_\beta)$ a, dans $\mathfrak{n}$, une trace nulle. On a donc $\beta_U(H_\beta) = 0$ pour toute racine $\beta \in M$. Il s'ensuit que l'opérateur $\mathrm{ad}(\beta_U)$ commute à la représentation adjointe de M^* dans $\mathfrak{g}^*$ et en particulier à la représentation π dans $\mathfrak{n}^*$. Si donc on désigne par $a_1, \ldots, a_q$ les diverses valeurs propres de $\mathrm{ad}(\beta_U)$ dans $\mathfrak{n}^*$, i.e. les valeurs possibles de l'entier

$$(48) \qquad \beta_U(H_\alpha) = \sum_{\gamma \in U} \gamma(H_\alpha)$$

pour les diverses racines $\alpha \in U$, et par $\mathfrak{n}^*_i$ le sous-espace propre de $\mathfrak{n}^*$ correspondant à a_i , on aura

$$(49) \qquad \langle H_\alpha , s\beta_U \rangle = a_i s \qquad \text{si } \alpha^* \in \mathfrak{n}^*_i .$$

Notons alors π_i la représentation de M^* dans $\mathfrak{n}^*_i$ et $\check{\pi}_i$ sa contragrédiente. On a d'après (49) et (46) la relation

$$(50) \qquad G_p(a_i s - \check{\pi}_i(\lambda_p)) = \prod_{\alpha^* \in \mathfrak{n}^*_i} G_p(\langle H_\alpha , \lambda_p + s\beta_U \rangle) .$$

Portant dans (41) on en déduit la formule cherchée, à savoir

$$(51) \qquad c_p(s + \tfrac{1}{2}) = \prod_i G_p(a_i s - \check{\pi}_i(\lambda_p))/G_p(a_i s + 1 - \check{\pi}_i(\lambda_p)) \quad ,$$

avec naturellement un résultat analogue à l'infini si la composante ∞-adique de ϑ est triviale.

Si G est déployé et si ϑ est triviale, on trouve donc la relation

$$(52) \qquad c(s + \tfrac{1}{2}) = \prod_i \xi(a_i s ; \check{\pi}_i , \varphi)/ \xi(a_i s + 1 ; \check{\pi}_i , \varphi) \quad ,$$

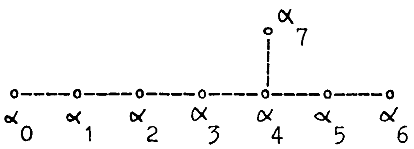
ce qui prouve que les seconds membres se prolongent analytiquement.

Bien entendu on peut effectuer les mêmes calculs en remplaçant le sous-groupe parabolique P = ZU par son opposé P' = ZU' ; on remplace ainsi la représentation dans $\mathfrak{n}^*$ par la représentation dans l'algèbre nilpotente opposée, qui est précisemment en dualité avec la première. On en déduit aussitôt qu'en remplaçant P par P' on remplace l'expression (52) par l'expression

$$(53) \qquad \prod L(a_i s; \pi_i , \varphi)/L(a_i s+1 ; \pi_i , \varphi) \quad .$$

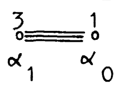
Comme l'observe Langlands, l'équation fonctionnelle conjecturale qui fait passer de $L(s;\pi,\varphi)$ à $L(1-s;\check{\pi},\varphi)$ est compatible avec la relation $c'(1-s)c(s) = 1$ qui traduit l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein; mais celle-ci n'implique pas, en général, l'équation fonctionnelle souhaitée pour la fonction ξ . On trouve cependant des résultats.

Le cas le plus simple est celui où l'on a, dans ce qui précède, un seul indice i, de sorte que (52) se réduit à $\xi(a_1 s;\check{\pi}, \varphi)/\xi(a_1 s+1;\check{\pi}, \varphi)$; si l'on sait que ce quotient est méromorphe il s'ensuit aussitôt, puisque $\xi(s;\check{\pi}, \varphi)$ est holomorphe dans un demi-plan, que la fonction $\xi(s;\check{\pi}, \varphi)$ est en fait partout méromorphe. Si l'on a deux valeurs propres a_1 et a_2 et si l'on sait prolonger analytiquement $\xi(s;\check{\pi}_1 , \varphi)$ il s'ensuit que l'on sait prolonger analytiquement $\xi(s;\check{\pi}_2 , \varphi)$... A partir de là, le problème consiste, M étant donné, à trouver un groupe G tel que rg(G) = 1 + rg(M) dans lequel M soit la partie semi-simple d'un sous-groupe parabolique, et pour lequel on soit dans l'une des situations précédentes. C'est ce que fait Langlands dans 32 situations différentes en exhibant le diagramme de Dynkin de M, celui de G, les valeurs des a_i et les représentations π_i (avec i = 1 ou bien i = 1,2 ou bien i = 1,2,3). Dans la 32^e position par exemple - l'aurore boréale, dans la terminologie de Paul Eluard et André Breton - le diagramme de Dynkin est le suivant :



de sorte que G est de type E_8 et M de type E_7 ; il y a deux représentations π_1 et π_2 , la première ayant pour poids dominant fondamental Δ_1 et la seconde étant la représentation unité, et les entiers a_1 et a_2 sont égaux à 29 et 58 respectivement.

L'exemple le plus "particularly striking", comme le dit Langlands avec raison, s'obtient en prenant $M = SL(2) = A_1$ et $G = G_2$, le diagramme de Dynkin étant le suivant :



(position 15, l'orchidée). On trouve alors, en examinant le diagramme de G_2 , qu'il y a dans $\mathfrak{n}^*$ deux représentations irréductibles de SL(2), la représentation unité (pour laquelle $a_1 = 10$) et celle de dimension 4 (pour laquelle $a_2 = 5$). Notant π cette dernière représentation, on voit donc que l'expression

$$\frac{\xi(10 s ; id , \varphi)}{\xi(10 s + 1 ; id , \varphi)} \; \frac{\xi(5s ;\pi , \varphi)}{\xi(5s + 1 ;\pi, \varphi)} \; \frac{\xi(-10 s ; id , \varphi)}{\xi(-10 s + 1 ; id , \varphi)} \; \frac{\xi(-5s ;\pi, \varphi)}{\xi(-5s + 1;\pi , \varphi)}$$

est invariante par $s \longmapsto -s$; mais comme $\xi(s ; id , \varphi)$ est la fonction $\xi(s)$ usuelle correspondant à la fonction zêta de Riemann, on voit finalement que l'expression

$$\frac{\xi(5s ;\pi , \varphi)}{\xi(1 - 5s;\pi , \varphi)} \; \frac{\xi(-5s ;\pi , \varphi)}{\xi(1 + 5s;\pi , \varphi)}$$

est invariante par s $\longmapsto$ - s. Ce résultat est évidemment très voisin de ce qu'on espère, à savoir que $\xi(1 - s ; \pi , \varphi) = \xi(s ; \pi , \varphi)$ pour la représentation π de dimension 4 de SL(2) ...

Notons pour conclure qu'un procédé trivial pour associer à une forme automorphe φ des séries de Dirichlet admettant des équations fonctionnelles consiste à effectuer une transformation de Laplace sur un tore déployé maximal (le résultat dépend d'un "Grössencharaktere" du tore, et est invariant par le groupe de Weyl), et à exprimer la fonction obtenue à l'aide du développement de φ en "série de Fourier" suivant un horicyle maximal. La théorie classique de Hecke consiste à prouver que, pour les fonctions propres des T_n , la série de Dirichlet obtenue admet un développement en produit eulérien. Il serait intéressant d'examiner les liens pouvant exister entre ces séries de Dirichlet et les produits infinis de Langlands.

BIBLIOGRAPHIE

1 R. Godement, Introduction à la théorie de Langlands (Séminaire Bourbaki, n° 321, 1967)

2 Harish-Chandra, Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups (Lectures Notes in Mathematics, Springer, 1968).

3 H. Jacquet, Fonctions de Whittaker associées aux groupes de Chevalley (Bull. Soc. Math. France, 95, 1967, p. 243-309). Voir aussi la thèse à paraître de G. Schiffmann.

4 R. P. Langlands, Euler Products (James K. Whittemore lectures in mathematics given at Yale University, April 3-7, 1967, Department of Mathematics, Yale University, Lux et Veritas).

5 I. G. Macdonald, Spherical Functions on a p-adic Chevalley Group (Bull. Amer. Math. Soc., 74, 1968, p. 520-525.

6 I. Satake, Theory of Spherical Functions on Reductive Algebraic Groups over p-adic Fields (I.H.E.S., Publications Mathématiques, n° 18, 1963, p. 5-69).

7 J. P. Serre, Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de Ramanujan (Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des Nombres, 9e année, 1967/68, n° 14).