ARMAND BOREL

Sous-groupes discrets de groupes semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 358, p. 199-215
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__199_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 358 Juin 1969

SOUS-GROUPES DISCRETS DE GROUPES SEMI-SIMPLES

(d'après D. A. KAJDAN et G. A. MARGOULIS)

par Armand BOREL

§ 1. Enoncé des résultats.

G désignera toujours un groupe de Lie connexe, semi-simple. Pour abréger on appellera facteur compact de G tout sous-groupe compact connexe distingué, et on dira que G est sans facteur compact s'il ne possède pas de facteur compact $\neq \{e\}$.

Dans ce paragraphe, on énonce les résultats obtenus dans [6] (à cela près que [6] suppose G linéaire, sans facteur compact, mais le passage de là au cas un peu plus général considéré ici est immédiat).

THÉORÈME 1.- *Il existe un voisinage W de l'élément neutre e de G tel que si Γ est un sous-groupe discret de G dont l'intersection avec tout facteur compact de G est dans le centre de G, alors il existe $g \in G$ tel que*

$$g.\Gamma.g^{-1} \cap W = \{e\} .$$

Soit m une mesure de Haar sur G. Elle est bi-invariante, et définit canoniquement une mesure invariante sur G/Γ pour tout sous-groupe discret Γ de G. On notera $m(A)$ la mesure d'une partie mesurable de G/Γ par rapport à cette mesure.

COROLLAIRE.- *Il existe une constante* $d_G > 0$ *telle que si* Γ *est comme dans le théorème, alors* $m(G/\Gamma) \geq d_G$.

En effet, si W_0 est un voisinage symétrique de e tel que $W_0 . W_0 \subset W$, alors la restriction de la projection canonique $\pi : G \to G/(g.\Gamma.g^{-1})$ à W_0 est injective donc $m(G/\Gamma) = m(G/(g\Gamma g^{-1})) \geq m(W_0)$.

On voit en particulier que *si* G *n'a pas de facteur compact, alors les conclusions du Théor. 1 et de son corollaire valent pour tout sous-groupe discret de* G . Cela est évidemment faux si G est compact.

Ce corollaire était connu auparavant pour $G = \underline{\underline{SL}}(2,\underline{\underline{R}})$. En effet, Siegel [7] a montré que si X est le disque unité $\{|z| < 1\}$ du plan complexe, muni de l'élément de volume $dx \wedge dy.(1 - |z|^2)^{-1}$, et si Γ est un groupe d'automorphismes proprement discontinu de X , alors $m(X/\Gamma) \geq \pi/21$ (la borne inférieure étant atteinte). Récemment, H. C. Wang [8] a donné une autre démonstration du Théor. 1, qui fournit aussi des renseignements quantitatifs sur W .

THÉORÈME 2.- *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* G . *Supposons* G/Γ *non compact et* $m(G/\Gamma) < \infty$. *Alors il existe* $x \in \Gamma$ *dont la classe de conjugaison* $C(x) = \{g.x.g^{-1} , g \in G\}$ *n'est pas fermée. Si* G *n'a pas de facteur compact, on peut trouver* $x \in \Gamma - \{e\}$ *tel que* e *soit contenu dans l'adhérence* $\overline{C(x)}$ *de* $C(x)$.

Il est élémentaire que si L est un groupe localement compact et H un sous-groupe discret tel que L/H soit compact, alors les classes de conjugaison dans L des éléments de H sont fermées (voir p. ex. [2, § 11.2]). Le théorème 2 fournit donc une réciproque (lorsque $m(G/\Gamma) < \infty$).

Supposons G linéaire. Il est alors d'indice fini dans le groupe des points réels d'un groupe algébrique sur $\mathbb{R}$. On sait que $C(g)$ est fermée (resp. admet e comme point d'accumulation) si et seulement si g est semi-simple (resp. unipotent, i.e. $g-1$ est nilpotent). Le théorème 2 entraîne donc le :

COROLLAIRE.- *Soit* Γ *comme dans le Théor. 2 et supposons* G *linéaire. Alors* Γ *possède un élément* $x \neq e$ *non semi-simple (resp. unipotent si* G *est sans facteur compact).*

Ce corollaire, classique pour les groupes fuchsiens, avait été conjecturé en général par A. Selberg. Il était connu dans plusieurs cas particuliers, notamment si Γ est arithmétique (conjecture de Godement, cf. [2, § 11]), si G est produit de groupes $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ (Selberg). On savait aussi que si G est simple, de rang réel 1, alors Γ a un élément non semi-simple (Garland, Selberg).

Fixons un ds^2 riemannien invariant à droite sur G, et soit $d(\ ,\ )$ la distance associée. Elle est invariante à droite, et fait de G un espace métrique *complet* (puisque le ds^2 est complet, G étant riemannien homogène). On posera

$$|x| = d(e,x) \quad , \quad D_r = \{g \in G \mid |g| < r\} \quad , \quad (x \in G \ ; \ r > 0) \ .$$

Comme la métrique d est complète, D_r est relativement compact. d étant symétrique, invariante à droite, on a

$$(1) \qquad |x| = |x^{-1}| \quad , \quad d(x,y) = |x.y^{-1}| \qquad (x\ ,\ y \in G) \ .$$

De $|x| = d(xy^{-1},y^{-1})$, on tire aussi

$$(2) \qquad |x| \leq |y| + d(x,y) \quad , \quad |x| \leq |y| + |y.x| \ , \quad (x\ ,\ y \in G) \ .$$

THÉORÈME A.- _Supposons_ G _sans facteur compact. Il existe un voisinage_ V _de_ e _dans_ G , _et des constantes_ $b > 0$, $c > 1$ _(dépendant de_ G _) ayant la propriété suivante : si_ Γ _est un sous-groupe discret de_ G , _alors on peut trouver_ $g \in D_b$ _tel que_

$$|g.x.g^{-1}| \geq c|x| , \qquad (x \in \Gamma \cap V) .$$

Les théor. 1 et 2 se déduisent par des raisonnements essentiellement élémentaires, mais extrêmement ingénieux, du Théor. A, qui est donc en fait le résultat central de [6]. Ce dernier sera établi au § 4, les §§ 2, 3 étant consacrés à la démonstration des Théor. 1 et 2 à partir du Théorème A. Bien qu'il s'agisse d'un rapport sur un article publié, on a donné des démonstrations complètes. Suivant l'exemple de [3], on renvoie au Mémoire original le lecteur qui préfère un exposé plus bref, non alourdi de détails techniques.

Notations. Outre celles introduites plus haut, on utilisera les suivantes :

Si $g \in G$ et $A \subset G$, on écrira quelquefois ${}^gA$ pour $g.A.g^{-1}$.

Si G est sans facteur compact, et Γ est un sous-groupe discret de G , un élément $g \in D_b$ qui vérifie la condition du Théor. A pour Γ sera dit être _adapté à_ Γ .

Enfin, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G , H , P ,... est notée par la minuscule soulignée correspondante $\underline{g}$, $\underline{h}$, $\underline{p}$,... .

§ 2. Démonstration du Théorème 1.

Dans ce paragraphe et le suivant, on admet le Théor. A. Si G est sans facteur compact, on choisit a $(0 < a \leq 1)$ tel que

$$(1) \qquad g^{-1}.D_a.g \subset V , \qquad (g \in D_b) .$$

Pour la commodité des références, on met en lemme le point essentiel de la démonstration du Théor. 1.

2.1. LEMME.- *Supposons G sans facteur compact, et soit Γ un sous-groupe discret de G. Soient n un entier ≥ 1 et $g_i \in D_b$ $(1 \leq i \leq n)$ tels que g_1 soit adapté à $\Gamma = \Gamma_1$, et g_i à $\Gamma_i = g_{i-1}.\Gamma_{i-1}.g_{i-1}^{-1}$ $(2 \leq i \leq n)$. Soient $x \in \Gamma$, $h_i = g_i . \dots . g_1$ et $x_i = h_i.x.h_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$. Supposons $x_n \in D_a$. Alors $x_i \in D_a$ et $|x_i| \geq c|x_{i-1}|$, $(1 \leq i \leq n$; $x_0 = x)$. En particulier $|x| \leq c^{-n}.a$.*

Supposons $x_i \in D_a$. Alors, vu (1),

$$x_{i-1} = g_{i-1}^{-1}.x_i.g_{i-1} \in V \cap \Gamma_{i-1} ,$$

donc, puisque g_{i-1} est adapté à Γ_{i-1}, $|x_i| \geq c|x_{i-1}|$ et $x_{i-1} \in D_a$, ce qui établit notre assertion par récurrence descendante sur i.

2.2. *Démonstration du Théor. 1.* Supposons tout d'abord G sans facteur compact, et montrons que $W = D_a$ vérifie le théorème. Soit q le minimum de $|x|$ sur $\Gamma - \{e\}$, et soit $n \geq 1$ tel que $c^n.q > a$. D'après le Théor. A, on peut trouver une suite d'éléments $g_i \in D_b$ $(1 \leq i \leq n)$ tels que g_1 soit adapté à $\Gamma = \Gamma_1$ et g_i à $\Gamma_i = g_{i-1}.\Gamma_{i-1}.g_{i-1}^{-1}$ $(i \geq 2)$. Posons $h_n = g_n . \dots . g_1$. Soit $x \in \Gamma$. Alors, si $h_n.x.h_n^{-1} \in W$, le lemme 2.1 montre que

$$|x| \leq c^{-n}.a < q ,$$

donc $x = e$, et ainsi Γ possède un conjugué, Γ_n , dont l'intersection avec W est réduite à $\{e\}$.

Dans le cas général, soient Z le centre de G , N le plus grand facteur compact de G et $\pi : G \to G/N = G'$ la projection canonique. Alors G' est sans facteur compact. Soit W un voisinage de e dans G tel que $W \cap Z = \{e\}$ et que $\pi(W)$ vérifie le Théor. 1 pour G' . Soit Γ un sous-groupe discret de G tel que $\Gamma \cap N \subset Z$. Comme N est compact $\Gamma' = \pi(\Gamma)$ est discret et il existe donc $g \in G$ tel que ${}^{\pi(g)}\Gamma' \cap \pi(W) = \{e\}$. On a alors ${}^{g}\Gamma \cap W \subset N$; mais, comme $\Gamma \cap N \subset Z$, et N est distingué dans G , on a ${}^{g}\Gamma \cap N = {}^{g}(\Gamma \cap N) \subset Z$, donc ${}^{g}\Gamma \cap W \subset Z \cap W = \{e\}$.

§ 3. Démonstration du Théorème 2.

3.1. LEMME.- *Soit Γ un sous-groupe discret de G tel que G/Γ soit non compact, de mesure $m(G/\Gamma)$ finie, et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $x \in \Gamma$, $x \neq e$, et $g \in G$ tels que $|{}^{g}x| \leq \varepsilon$.*

Soit $\pi : G \to G/\Gamma$ la projection canonique. La métrique d définit sur G/Γ une métrique $\bar{d}$ caractérisée par

$$\bar{d}(\pi(u),\pi(v)) = \min_{x\in\Gamma} d(u,v.x) \qquad (u , v \in G) .$$

L'espace G/Γ étant non compact, de mesure finie, on peut trouver $r > 0$ et $g_0 \in G$ tels que

$$(1) \qquad m(G/\Gamma - \pi(D_r)) < m(D_{\varepsilon/2}) \quad , \quad \bar{d}(\pi(e),\pi(g_0)) > r + \varepsilon .$$

Vu (2) du § 1, on a alors

$$(2) \qquad \pi(D_{\varepsilon/2}.g_0) \cap \pi(D_r) = \emptyset ,$$

d'où

$$m(\pi(D_{\epsilon/2}.g_0)) < m(G/\Gamma - \pi(D_r)) < m(D_{\epsilon/2}) = m(D_{\epsilon/2}.g_0) ,$$

ce qui prouve que π n'est pas injective sur $D_{\epsilon/2}.g_0$. Soient donc $u \in D_{\epsilon/2}$ et $x \in \Gamma - \{e\}$ tels que $u.g_0.x \in D_{\epsilon/2}.g_0$. On a alors $d(u.g_0,u.g_0.x) \leq \epsilon$, donc $|u.g_0.x.(u.g_0)^{-1}| \leq \epsilon$.

3.2. Dans la suite de ce paragraphe, C désigne une constante $\geq c$ telle que

(3) $\qquad |{}^g x| \leq C.|x| , \qquad (g \in D_b \ ; \ x \in D_a)$.

[L'existence de C résulte du fait que $|.|$ est associée à une métrique riemannienne, cf. 4.1.]

Supposons G sans facteur compact. On fixe un voisinage symétrique W_0 de e tel que $W_0.W_0 \subset D_a$, et $r > 0$ tel que

(4) $\qquad m(G/\Gamma - \pi(D_r)) < m(W_0)$.

Soit

$$S = \{x \in \Gamma \mid D_{r+a+C}.x \cap D_{r+a+C} \neq \emptyset\} .$$

Nous voulons montrer que S contient un élément $s \neq e$ tel que $e \in \overline{C(s)}$, ce qui établira le Théor. 2 lorsque G est sans facteur compact. Comme S est fini (car D_{r+a+C} est relativement compact), il suffira pour cela de prouver :

(*) Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $s \in S - \{e\}$ et $g \in G$ tels que $|{}^g s| \leq \epsilon$.

On suppose $\epsilon \leq a$. On fixe un entier $n \geq 1$ et un nombre réel d tels que

(5) $\qquad c^n.\epsilon \geq a , \qquad 0 < d < (c/C)^n.C^{-1}.\epsilon \leq \epsilon$.

(Rappelons que $C \geq c > 1$.) D'après 3.1, il existe $g_0 \in G$ et $x_0 \in \Gamma - \{e\}$ tels que

(6) $\qquad |g_0.x.g_0^{-1}| < d$.

A l'aide du Théor. A, on peut trouver $g_1 \in D_b$ adapté à $\Gamma_1 = g_0.\Gamma.g_0^{-1}$, puis g_i adapté à $\Gamma_i = g_{i-1}.\Gamma_{i-1}.g_{i-1}^{-1}$, $(i = 2, 3, \ldots)$. Vu (5), (6) on a $\Gamma_1 \cap D_a \neq \{e\}$. Comme on l'a vu en démontrant le Théor. 1, 2.1 entraîne alors l'existence de $m \geq 1$ tel que

$$(7) \qquad \Gamma_m \cap D_a \neq \{e\} \quad , \quad \Gamma_{m+1} \cap D_a = \{e\} .$$

Posons encore $h_i = g_i \,.\, \ldots \,.\, g_0$ $(0 \leq i \leq m + 1)$.

LEMME.- <u>On conserve les notations et hypothèses précédentes. Alors</u> $\pi(D_a.h_{m+1}) \cap \pi(D_r) \neq \emptyset$. <u>Si</u> $y \in \Gamma - \{e\}$ <u>est tel que</u> $h_m.y.h_m^{-1} \in D_a$, <u>alors</u> $|g_0.y.g_0^{-1}| \leq \varepsilon$.

Admettons provisoirement ce lemme. Il existe alors $x \in \Gamma - \{e\}$ et $u \in D_a$ tels que $u.h_{m+1}.x \in D_r$. Vu (2) du § 1, on a

$$(8) \qquad \begin{aligned} |h_{m+1}.x| &\leq |u.h_{m+1}.x| + |u| , \\ |h_{m+1}.x| &\leq r + a . \end{aligned}$$

Soit $y \in \Gamma - \{e\}$ tel que $h_m.y.h_m^{-1} \in D_a$. On a, vu (3),

$$d(h_{m+1}.y.x, h_{m+1}.x) = d(h_{m+1}.y, h_{m+1}) = |h_{m+1}.y.h_{m+1}^{-1}| \leq C.|h_m.y.h_m^{-1}| .$$

Comme $h_m.y.h_m^{-1} \in D_a$ et $a \leq 1$, le dernier terme est $\leq C$. Vu (8), et (2) du § 1, cela donne

$$(9) \qquad |h_{m+1}.y.x| \leq C + r + a .$$

On a par suite

$$h_{m+1}.y.x = h_{m+1}.x.x^{-1}.y.x \in D_{r+a+C} \cap D_{r+a}.x^{-1}.y.x ,$$

d'où $x^{-1}.y.x \in S - \{e\}$. Mais $C(x^{-1}.y.x) = C(y)$, donc (*) résulte de la deuxième assertion du lemme.

3.3. Démontrons maintenant le lemme de 3.2. Comme $h_{m+1}.\Gamma.h_{m+1}^{-1} \cap D_a = \{e\}$ (cf. (7)), la projection π est injective sur $W_0.h_{m+1}$. On a alors, vu (4)

$$m(\pi(W_0.h_{m+1})) = m(W_0.h_{m+1}) = m(W_0) > m(G/\Gamma - \pi(D_r)) ,$$

d'où $\pi(W_0.h_{m+1}) \cap \pi(D_r) \neq \emptyset$, et la première assertion du lemme, puisque $W_0 \subset D_a$.

Soit $y \in \Gamma - \{e\}$ tel que $|h_m.y.h_m^{-1}| < a$. D'après 2.1, on a

$$|g_0.y.g_0^{-1}| < c^{-m}.a ,$$

donc, si $m \geq n$, on a, vu (5) et $c > 1$:

$$|g_0.y.g_0^{-1}| < c^{-n} \leq \epsilon .$$

Il reste à considérer le cas où $n > m$. Soit m' le plus grand entier $\leq m$ tel que

$$h_{m'+1}.x_0.h_{m'+1}^{-1} \notin D_a , \quad h_j.x_0.h_j^{-1} \in D_a , \quad (0 \leq j \leq m') .$$

On a alors, vu (3),

$$a \leq |h_{m'+1}.x_0.h_{m'+1}^{-1}| \leq C^{m'+1}.|g_0.x_0.g_0^{-1}| .$$

D'autre part, 2.1 donne

$$|g_0.y.g_0^{-1}| \leq c^{-m'}|h_{m'}.y.h_{m'}^{-1}| \leq c^{-m'}.a .$$

Par conséquent, vu (5), (6)

$$|g_0.y.g_0^{-1}| \leq c^{-m'}.C^{m'+1}|g_0.x_0.g_0^{-1}| \leq (c/C)^{-m'+n}.\epsilon .$$

Comme $m' \leq m < n$ et $c/C \leq 1$, cela entraîne $|g_0.y.g_0^{-1}| \leq \epsilon$, et termine la démonstration du lemme, et par conséquent du Théor. 2, lorsque G est sans facteur compact.

3.4. Soient N le plus grand facteur compact de G et $\pi : G \to G' = G/N$ la projection canonique. Comme N est compact, le groupe $N.\Gamma$ est fermé dans G, l'application π est propre, et $\pi(\Gamma) = \Gamma'$ est discret dans G'. Le quotient G/Γ est fibré, de fibre type $N/N \cap \Gamma$ compacte, base $G/N.\Gamma$, donc $G/N.\Gamma$ est non-compact, de mesure invariante finie. Comme $G'/\Gamma' \cong G/N.\Gamma$, il en est de même pour G'/Γ' . Le groupe G' étant sans facteur compact, il existe d'après ce qui précède $x \in \Gamma - \{e\}$ tel que $C(\pi(x))$ ne soit pas fermée dans G' . Comme $C(\pi(x)) = \pi(C(x))$ et que π est propre, il s'ensuit que $C(x)$ n'est pas fermée dans G .

§ 4. Démonstration du Théorème A.

4.1. Soit U un voisinage ouvert relativement compact de e dans G admettant des coordonnées canoniques (x_i) . Cela signifie qu'il existe un voisinage U_0 de 0 dans $\underline{g}$ tel que l'application exponentielle $\exp : \underline{g} \to G$ soit un difféomorphisme de U_0 sur U , et que (x_i) est transporté par l'exponentielle d'un système de coordonnées sur $\underline{g}$.

On fixe une norme euclidienne $|.|$ sur $\underline{g}$, et on note de la même manière le transporté de $|.|$ à U par l'exponentielle. Comme $|\ |$ est associée à une métrique riemannienne, on voit facilement qu'il existe des constantes d , $d' > 0$ telles que

$$(1) \qquad d.|x|_0 \leq |x| \leq d'.|x|_0 , \qquad (x \in U) .$$

L'existence de la constante C de 3.2 (3) s'en déduit immédiatement. En effet, soit a' tel que ${}^{g}D_{a'} \subset U$ pour $g \in D_b$ $(0 < a' \leq a)$. Alors, si $a' \leq |x| \leq |a|$, l'existence de C est évidente par compacité et continuité, et si $|x| \leq a'$, elle résulte de (1) et du fait que $x \mapsto {}^{g}x$ est linéaire en coordonnées canoniques.

4.2. On sait que si U est suffisamment petit, alors $\Gamma \cap U$ est contenu dans un sous-groupe analytique nilpotent de G quel que soit le sous-groupe discret Γ

de G (cf. [9], et, pour des résultats plus précis, [8]). Rappelons-en brièvement une démonstration : d'après la formule de Campbell-Hausdorff, on a, pour $t \in \underline{\underline{R}}$ suffisamment petit

$$\log(\exp t.x\,,\, \exp t.y) \;=\; t^2.[x,y] + \text{termes d'ordre} \geq 3\;, \qquad (x\,,\, y \in \underline{g})\;,$$

où $(u,v) = u.v.u^{-1}.v^{-1}$, $(u\,,\,v \in G)$. Il s'ensuit que, pour U convenable, on a

$$|(u,v)|_0 \;<\; \min(|u|_0\,,\, |v|_0) \qquad\qquad (u\,,\, v \in U - \{e\})\;.$$

Si maintenant Γ est un sous-groupe discret, on peut écrire

$$\Gamma \cap U \;=\; \{e\,,\, a_1\,,\ldots,\, a_m\}\;, \qquad (|a_1|_0 \leq |a_2|_0 \leq \ldots \leq |a_m|_0)\;,$$

et l'on déduit de l'inégalité précédente que les groupes à un paramètre $\exp(\underline{\underline{R}}\,\log a_i)$, $(1 \leq i \leq m)$ engendrent un groupe analytique nilpotent.

Cela montre que le Théorème A est conséquence du

THÉORÈME B.- Supposons G sans facteur compact. Il existe un voisinage V de e dans U , et des constantes $b > 0$, $c > 1$ (dépendant de G) ayant la propriété suivante : si N est un sous-groupe analytique nilpotent de G , alors il existe $g \in D_b$ tel que $|{}^g x| \geq c|x|$ quel que soit $x \in N \cap V$.

4.3. Soient R_p l'ensemble des sous-groupes analytiques nilpotents de dimension p de G et LR_p celui de leurs algèbres de Lie. Il est immédiat que LR_p est fermé dans la grassmannienne des p-plans de $\underline{g}$, donc LR_p , muni de la topologie induite, est compact.

Pour tout sous-groupe analytique H de G , posons $H_0 = \exp(\underline{h} \cap U_0)$, où $U_0 = \log U$. C'est un voisinage de e dans H pour sa topologie de groupe de Lie. (Rappelons que si H est fermé, cette dernière est la topologie induite par celle de G .)

Soit N un sous-groupe analytique nilpotent. Soient $U' \subset U$ un voisinage de e, et $r > 0$ assez petit pour que la boule fermée $\{|x| \leq r\}$ soit contenue dans U'. Notons S_r la sphère $\{|x| = r\}$ de rayon r, A un voisinage ouvert de $N_0 \cap S_r$ dans S_r, et A' le cône de sommet e, et base A. Il est clair qu'il existe un voisinage C de $\underline{n}$ dans LR_p tel que si $\underline{m} \in C$, et si M est le groupe analytique correspondant, alors $M_0 \cap A$ est un voisinage de e dans M_0. Comme l'adhérence d'un sous-groupe analytique nilpotent est un groupe nilpotent, on voit, par compacité, que, étant donné N, il suffit d'exhiber U', A', $c_N > 1$ et $g \in G$ tels que

$$(1) \qquad |{}^g x| \geq c_N . |x| , \qquad (x \in A') .$$

4.4. LEMME.- <u>Soit</u> $\underline{n}$ <u>une sous-algèbre de Lie nilpotente de</u> $\underline{g}$ <u>et soit</u> c' <u>une constante</u> > 0. <u>Alors il existe</u> $g \in G$ <u>tel que</u>

$$|\mathrm{Ad}\, g(x)|_0 \geq c' |x|_0 , \qquad (x \in \underline{n}) .$$

Montrons tout d'abord que si $c' > 2.d'/d$ (où d, d' sont comme dans 4.1 (1)), alors 4.4 entraîne la dernière assertion de 4.3. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{Ad}\, g(x) \in U_0$ si $|x| \leq r$. Il existe alors, par continuité, un voisinage A de $N_0 \cap S_r$ dans S_r tel que

$$(2) \qquad {}^g x \in U , \qquad |{}^g x|_0 \geq (c'/2).|x|_0 , \qquad (x \in A) .$$

Comme $|\ |_0$ provient d'une métrique euclidienne en coordonnées canoniques, (2) reste vraie, par homogénéité, si x parcourt le cône A' de sommet e et base A. Mais, d'après 4.1 (1), on a alors

$$|{}^g x| \geq d.|{}^g x|_0 \geq (c'.d/2).|x|_0 \geq (c'.d/2.d').|x| , \qquad (x \in A') ,$$

ce qui donne bien 4.3 (1) si $c' > 2.d'.d^{-1}$.

4.5. Il reste à démontrer 4.4. Il est clair que l'on peut remplacer G par un groupe localement isomorphe, par exemple par son groupe adjoint $\mathrm{Ad}\,G$, ce qui permet de supposer que G est la composante connexe de e dans le groupe des points réels d'un groupe algébrique $G_{\mathbb{C}}$ défini sur $\mathbb{R}$, et a un centre réduit à $\{e\}$. Une partie (resp. un sous-groupe) de G sera dite (resp. dit) algébrique si c'est l'intersection de G avec une partie (resp. un sous-groupe) algébrique de $G_{\mathbb{C}}$. Pour les propriétés des groupes algébriques (resp. semi-simples réels) utilisées ci-dessous, voir par exemple [1] (resp. [5]).

La plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\underline{g}$ contenant $\underline{n}$ est aussi nilpotente, donc, quitte à agrandir $\underline{n}$, on peut supposer $\underline{n}$ algébrique. Soit N le sous-groupe algébrique correspondant de G . On a $N = S \times N_u$, où S est un tore algébrique (ou, plus précisément, l'intersection de G avec un tore algébrique de $G_{\mathbb{C}}$) et N_u est unipotent.

Soit $G = K.A.U$ une décomposition d'Iwasawa de G (K sous-groupe compact maximal, U sous-groupe unipotent maximal, A sous-groupe diagonalisable sur $\mathbb{R}$ connexe maximal normalisant U). Soient $P = M.A.U$ le normalisateur de U $(M = P \cap K)$. C'est donc un $\mathbb{R}$-sous-groupe parabolique minimal, et $M.A$ est le centralisateur $Z(A)$ de A . Soit $P^- = Z(A).U^-$ le sous-groupe parabolique opposé à P contenant $Z(A)$. ($U^- \cap U = \{e\}$.) Nous voulons montrer tout d'abord

(*) Il existe $h \in G$ tel que $\mathrm{Ad}\,h\,(\underline{p}) \cap \underline{n} = 0$.

Si $h \in G$, ${}^hP \cap N$ est un sous-groupe algébrique de N , donc sa composante neutre est produit de ses intersections avec S et N_u , la première étant un tore. Il suffit donc d'exhiber $h \in G$ tel que

$$\mathrm{Ad}\,h\,(\underline{p}) \cap \underline{s} = \mathrm{Ad}\,h\,(\underline{p}) \cap \underline{n}_u = 0 .$$

Comme un ensemble algébrique propre de G est sans point intérieur, l'existence de h résulte (par Baire) des trois faits suivants :

(i) l'ensemble L des $h \in G$ tels que ${}^{h}P \cap N_u = \{e\}$ contient un ouvert dense ;

(ii) si S' est un sous-tore de S, l'ensemble $Q(S')$ des $h \in G$ tels que $\operatorname{Ad} h\,(\underline{p}) \supset \underline{s}'$ est contenu dans un sous-ensemble algébrique propre.;

(iii) l'ensemble des sous-tores de S est dénombrable.

Démontrons ces trois assertions :

(i) il existe $a \in G$ tel que ${}^{a}U \supset N_u$, donc L contient les éléments $x.a$, où x est tel que ${}^{xa}P$ soit opposé à ${}^{a}P$, donc contient un ouvert de Zariski non vide de G.

(ii) l'ensemble Q' des sous-espaces de dimension $p = \dim P$ de $\underline{g}_{\underline{\underline{C}}} = \underline{g} \otimes_{\underline{\underline{R}}} \underline{\underline{C}}$ qui contiennent $\underline{s}'$ est algébrique dans la grassmannienne $G_p(\underline{g}_{\underline{\underline{C}}})$ des sous-espaces vectoriels de dimension p de $\underline{g}_{\underline{\underline{C}}}$. L'application $s : h \mapsto \operatorname{Ad} h\,(\underline{p})$ est un morphisme de variétés algébriques de $G_{\underline{\underline{C}}}$ dans $G_p(\underline{g}_{\underline{\underline{C}}})$, donc $Q(S')$ est contenu dans $s^{-1}(Q') \cap G$, qui est algébrique. D'autre part, l'intersection des sous-groupes ${}^{h}P$ $(h \in G)$ est contenue dans $\mathbf{M.A}$. Sa composante connexe de e est un sous-groupe distingué, donc semi-simple, donc contenu dans $\mathbf{M}$, donc réduit à $\{e\}$ puisque G est sans facteur compact, d'où $s^{-1}(Q') \cap G \neq G$.

(iii) les sous-tores de S correspondent biunivoquement aux sous-groupes facteurs directs d'un groupe abélien libre de rang égal à $\dim S$ (le groupe des caractères rationnels de S).

On peut donc supposer que $\underline{p} \cap \underline{n} = (0)$. On munit le système $\{\alpha\}$ des racines de G par rapport à A d'un ordre associé à P . On a donc

$$\underline{g} = \underline{u}^- \oplus \underline{p} \ , \quad \underline{u}^- = \bigoplus_{\alpha<0} \underline{g}_\alpha \ , \quad \underline{g}_\alpha = \{x \in \underline{g} \mid \mathrm{Ad}\, a\,(x) = \alpha(a).x \ , \ (a \in A)\} \ .$$

Soit $x \in \underline{n}$. Il s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{\alpha<0} x_\alpha + z_x \qquad (x_\alpha \in \underline{g}_\alpha \ ; \ z_x \in \underline{p}) \ .$$

Comme $\underline{n} \cap \underline{p} = (0)$, il existe une constante $r > 0$ telle que

$$\Big|\sum_{\alpha<0} x_\alpha\Big|_0 \geq r.|x|_0 \ , \qquad (x \in \underline{n}) \ .$$

Soit $h \in A$. On a

$$\mathrm{Ad}\, h\,(x) = \sum_{\alpha<0} \alpha(h).x_\alpha + \mathrm{Ad}\, h\,(z_x) \ , \qquad \mathrm{Ad}\, h\,(z_x) \in \underline{p} \ , \quad (x \in \underline{n}) \ .$$

Soit $q > 0$. On peut trouver $h \in A$ tel que $\alpha(h) > q$ pour tout $\alpha < 0$. En supposant, ce qui est loisible, les $\underline{g}_\alpha$ $(\alpha < 0)$ et $\underline{p}$ mutuellement orthogonaux, on obtient

$$|\mathrm{Ad}\, h\,(x)|_0^2 \geq q^2. \sum_{\alpha<0} |x_\alpha|_0^2 = q^2.\Big|\sum_{\alpha<0} x_\alpha\Big|_0^2 \geq q^2.r^2.|x|_0^2 \ ,$$

ce qui démontre le lemme, si l'on choisit $q > r^{-1}.c'$.

§ 5. Groupes de rang réel un.

Dans ce paragraphe, on décrit brièvement des résultats de H. Garland et M. S. Raghunathan [4], qui ont leur point de départ dans le cor. au Théor. 2, et, entre autres choses, le renforcent considérablement dans un cas particulier. Dans ce paragraphe, G est simple, linéaire, de rang réel égal à un (i.e. le A de la décomposition d'Iwasawa $G = K.A.U$ de 4.5 est de dimension un), et Γ est un sous-groupe discret de G tel que $m(G/\Gamma) < \infty$. Bien que Γ ne soit pas nécessairement définissable arithmétiquement (Makarov, Vinberg), [4] montre que Γ a plusieurs propriétés importantes en commun avec les sous-groupes de ce type de G . On suppose G/Γ non compact (sinon ce qui suit est évident, ou connu ou trivialement faux).

Soit α la racine simple de G par rapport à A, positive pour l'ordre associé à U, et, pour $t > 0$, soit $A_t = \{a \in A \mid \alpha(a) \leq t\}$. Un ensemble de Siegel $\underline{S}_{t,\eta}$ de G (par rapport à K, A, U) est un ensemble de la forme

$$\underline{S}_{t,\eta} = K.A_t.\eta \ , \quad (\ \eta \text{ voisinage relativement compact de } e \text{ dans } U\ ).$$

Le résultat principal de [4] affirme que l'on peut trouver $\underline{S} = \underline{S}_{t,\eta}$ et une partie finie non vide C de G ayant les propriétés suivantes :

(i) ${}^cU/({}^cU \cap \Gamma)$ est compact pour tout $c \in C^{-1}$;

(ii) $G = \underline{S}.C.\Gamma$;

(iii) $\{x \in \Gamma \mid \underline{S}.C.x \cap \underline{S}.C \neq \emptyset\}$ est fini ;

(iv) pour t' suffisamment grand :

$$\underline{S}_{t',\eta}.c.x \cap \underline{S}_{t,\eta}.c' \neq \emptyset \ , \qquad (c\ ,\ c' \in C\ ;\ x \in \Gamma)\ ,$$

entraîne $c = c'$ et $c.x.c^{-1} \in Z(A).U$.

De plus, Γ est de présentation finie, G/Γ est difféomorphe à l'intérieur d'une variété à bord compacte et, si G n'est pas localement isomorphe à $\underline{\underline{SL}}(2,\underline{\mathbb{R}})$ ou $\underline{\underline{SL}}(2,\underline{\mathbb{C}})$, alors Γ est rigide (i.e. $H^1(\Gamma\,,\,\mathrm{Ad}) = 0$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL - Linear algebraic groups, Mathematical Lecture Notes Series, Benjamin, New York (1969).

[2] A. BOREL and HARISH-CHANDRA - Arithmetic subgroups of algebraic groups, Annals of Math. (2) 75 (1962), 485-535.

[3] C. DELAROCHE et A. KIRILLOV - Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après D. A. Kajdan), Sém. Bourbaki, 20e année, 1967/68, Exp. 343.

[4] H. GARLAND and M. S. RAGHUNATHAN - Fundamental domains for lattices in rank one semi-simple Lie groups (à paraître).

[5] S. HELGASON - Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York (1962).

[6] D. A. KAJDAN et G. A. MARGOULIS - Démonstration d'une conjecture de Selberg, Math. Sbornik N. S. 75 (1968), 163-168 (en russe).

[7] C. L. SIEGEL - Some remarks on discontinuous groups, Annals of Math. (2) 46 (1945), 124-132. Gesammelte Abhandlungen, Bd III, 67-77.

[8] H. C. WANG - On discrete nilpotent subgroups of Lie groups (à paraître).

[9] H. ZASSENHAUS - Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen, Abh. math. Sem. Hamburg 19 (1938), 289-312.