ANDRÉ WEIL

# Séries de Dirichlet et fonctions automorphes

*Séminaire N. Bourbaki*, 1968, exp. nº 346, p. 547-552

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__547_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967/68, n° 346 Juin 1968

# SÉRIES DE DIRICHLET ET FONCTIONS AUTOMORPHES

par André WEIL

Classiquement, le lien entre les séries de Dirichlet (avec équation fonctionnelle) et fonctions automorphes, dont la découverte est due principalement à HECKE, est fourni par la transformation de Mellin, qui associe l'une à l'autre les séries

$$\Sigma\, a_n n^{-s} \quad , \quad \Sigma\, a_n e^{2\pi i n t} \quad .$$

Celles-ci (pourvu que la première ne diverge pas pour tout $s$ ) définissent respectivement des fonctions holomorphes dans un demi-plan $\mathrm{Re}(s) > a$ , et dans le demi-plan $\mathrm{Im}(t) > 0$ , et HECKE a montré que, si la première se prolonge dans tout le plan comme fonction holomorphe, et satisfait à une équation fonctionnelle d'un certain type, la seconde se comporte comme une "forme modulaire" d'un certain degré vis-à-vis de la transformation $t \to -1/At$ , avec $A > 0$ . La réciproque est vraie aussi, et joue même dans les travaux de HECKE un rôle encore plus important ; elle fait voir en effet qu'aux formes modulaires d'un type assez général, il correspond ainsi des séries de Dirichlet avec prolongement analytique et équation fonctionnelle ; de plus, HECKE fit voir qu'à la propriété, pour la forme modulaire, d'être fonction propre pour les "opérateurs de Hecke" correspond, pour la série de Dirichlet, la propriété de s'écrire comme produit eulérien.

A partir de là, on peut essayer de progresser dans plusieurs directions :

A) Sans sortir du cadre de la théorie de HECKE, on peut observer d'abord que celle-ci est incomplète, du fait qu'en général la transformation $t \to -1/At$, jointe à $t \to t+1$, engendre un groupe "trop petit" pour être vraiment intéressant (le quotient du demi-plan supérieur par ce groupe n'étant pas d'aire non-euclidienne finie). On est donc conduit à renforcer la condition imposée à la série de Dirichlet, en considérant en même temps toutes les séries $\Sigma\, a_n\chi(n)n^{-s}$, où $\chi$ est un caractère "usuel" (caractère multiplicatif des entiers premiers à $m$ modulo $m$, $m$ étant un entier, et $0$ sur les entiers non premiers à $m$). On constate alors que, si l'on impose des équations fonctionnelles (d'un certain type) à toutes celles de ces séries pour lesquelles le "conducteur" $m$ de $\chi$ est premier à un entier fixe, le résultat cherché est atteint, c'est-à-dire que la série $\Sigma\, a_n n^{-s}$ est bien la transformée de Mellin d'une forme modulaire. En fait, il suffit même de considérer une partie beaucoup plus restreinte de l'ensemble de séries de Dirichlet en question ; en un certain sens, il suffit d'en considérer un ensemble fini (mais "suffisamment grand"). Cf. [3].

B) D'importants travaux, et tout particulièrement ceux de MAASS (cf. p. ex. [2]), avaient déjà partiellement étendu les résultats de HECKE à l'analogue du groupe modulaire sur un corps de nombres algébriques. Mais le point de vue classique conduit vite à des complications inextricables (par exemple celles qui sont dues à la présence d'un groupe de classes d'idéaux non trivial) si on ne se borne pas à des cas particuliers bien choisis. Il était à prévoir que ces difficultés seraient surmontées par une bonne technique adélique, mettant autant que possible sur le même pied les places à l'infini (ou "archimédiennes") et les places finies (ou p-adiques) ; du reste, si on désire aussi traiter les corps de fonctions sur corps de constantes fini, on n'a pas le choix, puisqu'ils n'ont pas de place infinie. Soit donc $k$ un corps de nombres ou un corps de fonctions ; soit $k_A$ son anneau d'adèles ; soit $G = GL(2)$ . Par une fonction automorphe, on entendra une fonction sur $G_A = GL(2,k_A)$ , invariante à gauche par $G_k = GL(2,k)$ , à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans un vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ ; en général son comportement, vis-à-vis des translations à droite, sera soumis à certaines conditions. Celles-ci étant convenablement fixées, on constate qu'on peut associer à la fonction en question une "transformée de Mellin", c'est-à-dire une série de Dirichlet appartenant au corps $k$ ; on entend par là une série de la forme

$$\Sigma\, a(\mathfrak{m})\,|\mathfrak{m}|^s \quad ,$$

où $\mathfrak{m}$ parcourt l'ensemble des idéaux entiers de $k$ , si c'est un corps de nombres, et l'ensemble des diviseurs positifs de $k$ si c'est un corps de fonctions ; on écrit $|\mathfrak{m}|$ pour $N(\mathfrak{m})^{-1}$ dans le premier cas, et pour $q^{-\deg(\mathfrak{m})}$ dans le second, $q$ étant le cardinal du corps des constantes.

Bien entendu, pour $k = \mathbb{Q}$ , ce point de vue ne diffère que formellement du point de vue classique ; il est bien connu, en effet, qu'il y a correspondance biunivoque entre les formes modulaires de la théorie classique et les fonctions automorphes sur $G_A$ qui se comportent comme il convient vis-à-vis des translations à droite.

L'analogie avec A) conduit à introduire les séries

$$\Sigma\, a(\mathfrak{m})\chi(\mathfrak{m})\,|\mathfrak{m}|^s$$

où $\chi$ est un caractère de $k_A^\times/k^\times$ ("Grössencharakter" au sens de HECKE si $k$ est un corps de nombres, caractère de la théorie du corps de classes si c'est un corps de fonctions), ou du moins celles d'entre elles pour lesquelles le conducteur de $\mathfrak{m}$ est premier à un idéal (resp. diviseur) fixe, et à se demander si la transformation de Mellin établit bien une correspondance biunivoque entre les fonctions automorphes d'un certain type, d'une part, et d'autre part les séries de Dirichlet satisfaisant, ainsi que les séries modifiées par un tel caractère $\chi$, à des équations fonctionnelles convenables. Jusqu'à présent (à la différence de ce qui se passe pour $k = \mathbb{Q}$ ), il n'a été possible de démontrer ce résultat que pour les séries de Dirichlet qui, en presque toute place, ont un facteur eulérien d'un type déterminé. Cf. [4].

C) Dans ce qui précède, la théorie des représentations des groupes $G_v = GL(2,k_v)$ ( $k_v$ = complété de $k$ à la place $v$ ) et $G_A$ ne joue en apparence aucun rôle ; elle joue au contraire le rôle principal dans des travaux récents (et inédits) de LANGLANDS et de JACQUET, où en revanche la transformation de Mellin disparaît sans laisser de trace. Suivant ce point de vue, on se donne pour toute place $v$ de $k$ une représentation $\pi_v$ de $G_v$ , à laquelle on associe un facteur de produit eulérien (facteur gamma, bien entendu, si $v$ est à l'infini). A l'équation fonctionnelle, pour le produit eulérien et ses modifiés par des caractères $\chi$ , correspond le fait que le produit tensoriel des représentations $\pi_v$ est une représentation de $G_A$ qui intervient dans la partie de $L^2(G_A/G_k)$ formée par les "formes paraboliques". Les résultats de B) et de C) se complètent mutuellement, sans se recouvrir exactement.

Chez HECKE, il s'agissait surtout de fabriquer des séries de Dirichlet avec équation fonctionnelle, à partir des formes modulaires considérées (provisoirement) comme mieux connues. Les résultats décrits plus haut permettent d'essayer de procéder en sens inverse ; par analogie avec ce qui se passe en théorie du corps de classes, on peut dire, lorsqu'on a démontré qu'une série de Dirichlet à définition arithmétique est transformée de Mellin d'une fonction automorphe (et, dans les cas les plus favorables, d'une forme parabolique), qu'on a démontré une "loi de réciprocité". On n'a encore, à cet égard, que quelques résultats isolés :

(a) dans tous les cas où on sait traiter la fonction zêta d'une courbe elliptique sur $k$, on trouve (cf. [3] et [4]) que c'est la transformée d'une fonction automorphe d'un type qui se laisse caractériser d'une manière précise ; on sait traiter ainsi les courbes à multiplication complexe, celles d'Eichler-Shimura, et, en caractéristique $p$, les courbes à invariant constant ;

(b) les fonctions zêta des courbes elliptiques à multiplication complexe sont des cas particuliers de celles qu'on obtient en prenant une série $L$ sur une extension quadratique de $k$, ou un produit de deux telles séries sur $k$ ; les premières sont associées à des formes paraboliques, les secondes à des séries d'Eisenstein ;

(c) on peut traiter aussi les fonctions $L$ non galoisiennes d'Artin-Hecke, appartenant à des caractères de degré 2 (caractères de représentations par des matrices à 2 lignes et 2 colonnes), pourvu qu'on sache que ce sont des fonctions entières ("hypothèse d'Artin", qui est démontrée en caractéristique $p$ ) ; ce cas comprend en particulier des cas d'extensions de $k$ à groupe "icosaédrique" (groupe alterné à 5 lettres). Sur d'autres questions qui se posent pour les courbes elliptiques et leurs fonctions zêta, cf. [3], [4].

## BIBLIOGRAPHIE

[1] E. HECKE - Mathematische Werke, Göttingen, 1959.

[2] H. MAASS - Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen, Hamb. Abh., 16, Heft 3-4, 1949, p. 72-100.

[3] A. WEIL - Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann., 168, 1967, p. 149-156.

[4] A. WEIL - Zeta-functions and Mellin transforms, à paraître dans les Comptes-Rendus du Colloque de Bombay (Tata Institute, 1968).