ADRIEN DOUADY

Espaces analytiques sous-algébriques

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 344, p. 529-542
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__529_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967/68, n°344 Juin 1968

ESPACES ANALYTIQUES SOUS-ALGÉBRIQUES
(d'après B.G. MOĬŠEZON)

par Adrien DOUADY

Tous les espaces analytiques sont sur le corps des complexes. Le mot "variété" n'ayant pas le même sens en géométries analytique et algébrique, nous dirons "espace analytique lisse".

Soient X un espace analytique et Y un sous-espace analytique de X, on dira que Y est une <u>hypersurface</u> dans X si, pour tout $x \in X$, il existe $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ non diviseur de 0 tel que le germe de Y en x soit $h^{-1}(0)$.

1. <u>Eclatements</u>.

Soient X un espace analytique et Z un sous-espace analytique de X. On dit qu'un espace analytique $\tilde{X}$ au-dessus de X est obtenu en <u>éclatant</u> X <u>suivant</u> Z (ou à partir de X par éclatement suivant Z) s'il satisfait aux conditions suivantes :

(a) l'image réciproque de Z dans $\tilde{X}$ est une hypersurface ;

(b) pour tout espace analytique X' au-dessus de X vérifiant (a), il existe un morphisme et un seul de X' dans $\tilde{X}$ au-dessus de X.

PROPOSITION 1.- <u>Etant donnés un espace analytique</u> X <u>et un sous-espace analytique</u> Z <u>de</u> X, <u>il existe un espace obtenu en éclatant</u> X <u>suivant</u> Z <u>et un seul à isomorphisme unique près</u>.

<u>Démonstration</u>. La condition (b) signifie que $\tilde{X}$ est objet final dans la catégorie des espaces analytiques au-dessus de X vérifiant (a), d'où l'unicité. Démon-

Supposons d'abord que $X = \mathbb{C}^p$ et $Z = \{0\}$. Soient P l'espace projectif déduit de X et L le sous-fibré canonique de rang 1 du fibré trivial $X_P = X \times P$. Soit $\tilde{X}$ l'espace L, muni de la seconde projection $L \to X$. L'image réciproque de 0 est la section nulle de L, donc est une hypersurface dans L et on a (a). Soient X' un espace analytique et $f : X' \to X$ un morphisme tel que $Z' = f^{-1}(0)$ soit une hypersurface. Soient $\mathcal{U} = (U_j)$ un recouvrement de X' et pour tout j, $h_j \in \mathcal{O}(U_j)$ non diviseur de 0 et tel que $Z' \cap U_j = h_j^{-1}(0)$. Notons $\xi_1, \ldots, \xi_p$ les fonctions coordonnées dans X, et définissons $y_{j1}, \ldots, y_{jp}$ dans $\mathcal{O}(U_j)$ par $h_j . y_{ji} = \xi_i \circ f$. Comme les ξ_i engendrent l'idéal définissant Z', les fonctions $y_{j1}, \ldots, y_{jp}$ ne s'annulent pas simultanément sur U_j, donc définissent un morphisme s_j de X' dans P, et $f_j = (s_j, f)$ est un morphisme de U_j dans $\tilde{X}$ au-dessus de X. C'est le seul, car h_j n'est pas diviseur de 0, et par suite les f_j se recollent en un morphisme f de X' dans $\tilde{X}$, d'où (b).

Supposons maintenant que $Z = \varphi^{-1}(0)$, où φ est un morphisme de X dans $\mathbb{C}^p$, soient L l'espace obtenu en éclatant $\mathbb{C}^p$ suivant $\{0\}$, X_1 l'espace au-dessus de X obtenu à partir de L par changement de base de $\mathbb{C}^p$ à X suivant φ et Z_1 l'image réciproque de Z dans X_1. L'espace X_1 vérifie (b), et Z_1 est localement de la forme $h^{-1}(0)$. Parmi les sous-espaces de X_1 sur lesquels la trace de Z_1 est une hypersurface, il en est un plus grand $\tilde{X}$: si U est un ouvert de X_1 tel que $Z_1 \cap U = h^{-1}(0)$ où $h \in \mathcal{O}(U)$, l'espace $\tilde{X} \cap U$ est le sous-espace de U défini par l'idéal $\bigcup_k \mathcal{J}_k$, où $\mathcal{J}_k$ est le noyau de la multiplication par $h^k : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$. Cet espace vérifie (a) et (b).

Dans le cas général, il existe un recouvrement (U_i) de X tel que $U_i \cap Z$ soit de la forme $\varphi_i^{-1}(0)$, où φ_i est un morphisme de U_i dans $\mathbb{C}^{p_i}$, et on obtient X en recollant les espaces obtenus en éclatant les U_i suivant $U_i \cap Z$, ce qui achève la démonstration.

Si $\tilde{X}$ est obtenu en éclatant X suivant Z, on note π_Z la projection de $\tilde{X}$ sur X.

<u>Exemples et sorites</u>. Si Z est une hypersurface, on a $\tilde{X} = X$. Si $Z = X$, on a $\tilde{X} = \emptyset$. L'application π_Z est propre ; en particulier si X est compact, il en est de même de $\tilde{X}$. Si X est projectif, il en est de même de $\tilde{X}$. Si X et Z sont lisses, $\tilde{X}$ est lisse. Si U est un ouvert de X, l'espace $\pi_Z^{-1}(U)$ est obtenu en éclatant U suivant $Z \cap U$. Si Y est une hypersurface dans X, l'espace $\pi_Z^{-1}(Y)$ est une hypersurface dans $\tilde{X}$. Soient $f : X' \to X$ un morphisme, $Z' = f^{-1}(Z)$ et $\tilde{X}'$ l'espace obtenu en éclatant X' suivant Z' ; il existe un morphisme $\tilde{f} : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ au-dessus de f et un seul.

<u>Image stricte et image faible</u>. Soient X un espace analytique, Y et Z deux sous-espaces analytiques de X et $\tilde{X}$ l'espace obtenu en éclatant X suivant Z. L'espace $\tilde{Y}$ obtenu en éclatant Y suivant $Y \cap Z$ s'identifie à un sous-espace de $\tilde{X}$, appelé l'<u>image stricte</u> de Y dans $\tilde{X}$.

Si A est un espace analytique, B un sous-espace analytique de A et C une hypersurface de A contenue dans B, on définit l'espace B' obtenu en ôtant une fois C à B de la façon suivante : pour tout ouvert U de A tel que $C = h^{-1}(0)$, $h \in \mathcal{O}(U)$, l'idéal définissant $B' \cap U$ est formé des $h^{-1}f$, où f appartient à l'idéal définissant $B \cap U$. Si B' contient C, on peut recommencer, et l'espace B'' que l'on obtient est dit obtenu en ôtant deux fois C à B, et ainsi de suite.

Supposons X et Z lisses et Z connexe. On appelle <u>image faible</u> de Y dans X l'espace $\pi_Z^*(Y)$ obtenu en ôtant autant de fois qu'on le peut l'hypersurface $\pi_Z^{-1}(Z)$ à $\pi_Z^{-1}(Y)$. On a $\tilde{Y} \subset \pi_Z^*(Y) \subset \pi_Z^{-1}(Y)$. Si $Y \not\supset Z$, on a $\pi_Z^*(Y) = \pi_Z^{-1}(Y)$.

Soient X_1 l'espace obtenu en éclatant X suivant Y et $\tilde{X}_1$ l'espace obtenu en éclatant $\tilde{X}$ suivant $\pi_Z^*(Y)$. Il existe un morphisme et un seul de $\tilde{X}_1$ dans X_1 qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \rightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \rightarrow & X \end{array} .$$

2. Applications méromorphes.

Soient X et Y deux espaces analytiques compacts réduits et F un sous-ensemble analytique de $X \times Y$. On dit, par abus de langage, que F est une application méromorphe de X dans Y s'il existe des sous-ensembles analytiques d'intérieur vide F_1 de F et X_1 de X tels que la première projection induise un isomorphisme de $F - F_1$ sur $X - X_1$. L'ensemble $S(F)$ des $x \in X$ tels que $pr_1 : F \to X$ ne soit pas un isomorphisme au voisinage de $pr_1^{-1}(x)$ est un sous-ensemble analytique de X, appelé l'ensemble d'indéfinition de F (c'est le plus petit X_1 possible).

La première projection : $F \to X$ est surjective. L'image de F par la seconde projection est un sous-ensemble analytique de Y (d'après un théorème de Remmert) que l'on note $F(X)$. Plus généralement, pour tout sous-ensemble analytique X' de X, on note $F(X')$ le sous-ensemble analytique $pr_2(F \cap pr_1^{-1}(X'))$ de Y.

Soient F une application méromorphe de X dans Y et G une application méromorphe de Y dans Z telles que, pour toute composante irréductible X_i

de X, l'ensemble $F(X_i)$ ne soit pas contenu dans l'ensemble d'indéfinition de G. On définit l'application méromorphe composée $H = G \circ F$ de la façon suivante : en notant H' l'image de $F \times_Y G$ par la projection de $X \times Y \times Z$ sur $X \times Z$ (image qui est un ensemble analytique d'après Remmert), H est la réunion des composantes irréductibles de H' dont la projection sur X n'est pas d'intérieur vide.

On appelle <u>équivalence méromorphe</u> entre X et Y une application méromorphe F de X dans Y telle que l'image F^{-1} de F par la symétrie $X \times Y \to Y \times X$ soit une application méromorphe de Y dans X.

PROPOSITION 2.- <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces analytiques compacts réduits et</u> F <u>une application méromorphe de</u> X <u>dans</u> Y. <u>Si</u> X <u>est normal, l'ensemble d'indéfinition de</u> F <u>est de codimension</u> $\geqq 2$ <u>dans</u> X.

<u>Démonstration</u>. On peut supposer X irréductible, soit n sa dimension. Soit F_1 l'ensemble des points de F dont la fibre pour la projection de F sur X est de dimension $\geqq 1$, et posons $X_1 = pr_1(F_1)$. L'ensemble F_1 est un sous-ensemble analytique de F et on a $\dim X_1 + 1 \leqq \dim F_1 \leqq n-1$, d'où $\operatorname{codim} X_1 \geqq 2$. La projection pr_1 induit un morphisme fini p de $F - F_1$ sur $X - X_1$, et p est ouvert car ces deux espaces ont même dimension. Le nombre ensembliste de points des fibres de p est semi-continu inférieurement ; comme il vaut 1 sur un ouvert dense et que p est surjectif, il vaut constamment 1, autrement dit p est bijectif. Comme X est normal et F réduit, p est un isomorphisme et X_1 est l'ensemble d'indéfinition de F, d'où la proposition.

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> X <u>un espace analytique irréductible</u>. <u>Une application méromorphe de</u> X <u>dans</u> P^1C <u>n'est autre chose qu'une fonction méromorphe sur</u> X <u>au sens usuel, ou l'application constante</u> ∞.

Démonstration. On peut supposer X normal. Soit F une application méromorphe de X dans $P^1\mathbb{C}$, et notons X_1 l'ensemble des $x \in X$ tels que $(x,\infty) \in F$. L'ensemble X_1 contient l'ensemble d'indéfinition de F. Soient $x_1 \in X_1$, $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ une carte de X au voisinage de x_1, U' un voisinage de x_1 relativement compact dans U, d la distance sur U obtenue en transportant par φ la distance euclidienne de $\mathbb{C}^n$, et $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique nulle sur $X_1 \cap U$. D'après un résultat de Lojasiewicz, les sous-ensembles analytiques F et $X \times \{\infty\}$ de $X \times P^1\mathbb{C}$ sont régulièrement situés ; en d'autres termes il existe des constantes C et k telles que, pour tout $(x,t) \in F$ tel que $x \in U'$, on ait $\frac{1}{t} \geqq C.d(x,X_1)^k$. La fonction g, étant analytique, est lipschitzienne, et il existe une constante C' telle que, pour tout $x \in U' - X_1$, on ait $\frac{1}{F(x)} \geqq C'.g(x)^k$. Soit k' un entier $> k$ et définissons la fonction $f : U' \to \mathbb{C}$ par $f(x) = g(x)^{k'}F(x)$ pour $x \in U'-X_1$ et $f(x) = 0$ pour $x \in X_1$. La fonction f est continue sur U' et analytique sur $U' - X_1$, donc analytique sur U', et on a $F = \frac{f}{g^{k'}}$ sur U', ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 4 (Hironaka).- Soient X et Y deux espaces analytiques compacts réduits et F une application méromorphe de X dans Y. Si X est une variété projective (ou seulement un espace sous-algébrique, cf. n°5), il existe un espace X' au-dessus de X, obtenu par une suite finie d'éclatements suivant des sous-espaces d'intérieur vide, tel que $F \circ \pi : X' \to Y$ soit analytique, où $\pi : X' \to X$ est la projection.

Pour la démonstration, voir [1].

3. Enoncé des résultats.

Soit X un espace analytique compact réduit. Considérons les propriétés suivantes :

(i) il existe un espace X' obtenu à partir de X par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses, d'intérieur vide, tel que X' soit une variété projective (qu'on peut supposer lisse d'après Hironaka) ;

(ii) il existe une variété projective X' et une application analytique de X' sur X qui soit une équivalence méromorphe ;

(iii) l'espace X est méromorphiquement équivalent à une variété projective ;

(iv) pour chaque composante irréductible X_i de X, le degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps des fonctions méromorphes sur X_i est égal à la dimension de X_i .

Il est immédiat que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

PROPOSITION 5 (Moĭšezon).- On a (iv) $\Rightarrow$ (iii).

PROPOSITION 6.- On a (iii) $\Rightarrow$ (ii).

THÉORÈME 1 (Moĭšezon).- Si X peut se plonger dans un espace lisse et vérifie (ii), il vérifie (i).

D'autres résultats seront énoncés au n° 8.

4. Démonstration des propositions 5 et 6.

Démonstration de la proposition 5.- On peut supposer X irréductible. Soient $f_1,\ldots,f_n$ des fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur X, où n est la dimension de X. Ces fonctions définissent une application méromorphe de X dans $(P^1\mathbb{C})^n$ d'où une application méromorphe F de X dans $P^n\mathbb{C}$ (méromorphiquement équivalent à $(P^1\mathbb{C})^n$). L'espace X est méromorphiquement équivalent au graphe F. Notons f la projection de F sur $P^n\mathbb{C}$. D'après un théorème de Cartan, on peut mettre sur l'ensemble X' quotient de F par la relation d'équivalence ayant pour classes les composantes connexes des fibres de f une structure d'espace analytique, quotient de celle de F. L'application de X' dans $P^n\mathbb{C}$ déduite de f est un morphisme fini ; par suite X' est une variété projective.

D'autre part f est surjective : en effet $f(F) = F(X)$ est un sous-ensemble analytique, donc algébrique d'après le théorème de Chow, de $P^n\mathbb{C}$; si c'était un sous-ensemble strict, on aurait une relation algébrique entre les f_i. Comme $\dim F = \dim X = n = \dim P^n\mathbb{C}$, il existe un sous-ensemble analytique strict F_1 de F tel que la restriction de f à $F - F_1$ soit localement finie. En notant X_1' l'image de F_1 dans X', l'application canonique de F sur X' induit un isomorphisme de $F - F_1$ sur $X' - X_1'$, donc est une équivalence méromorphe entre F et X', ce qui démontre (iii).

<u>Démonstration de la proposition</u> 6.- Soient X' une variété projective et $F : X' \to X$ une équivalence méromorphe. D'après la proposition 4, il existe un espace X'' obtenu à partir de X' par une suite finie d'éclatements, tel que $F \circ \pi : X'' \to X$ soit analytique, π désignant la projection de X'' sur X'. L'espace X'' est une variété projective et l'application $F \circ \pi$ est une équivalence méromorphe, d'où la proposition.

5. <u>Espaces analytiques sous-algébriques</u>.

DÉFINITION.- <u>On dit qu'un espace analytique compact réduit est sous-algébrique s'il vérifie les conditions équivalentes</u> (ii), (iii) <u>et</u> (iv).

PROPOSITION 7.- <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces analytiques compacts réduits et</u> F <u>une application méromorphe de</u> X <u>dans</u> Y <u>telle que</u> $F(X) = Y$. <u>Si</u> X <u>est sous-algébrique</u>, <u>il en est de même de</u> Y .

<u>Démonstration</u>. On peut supposer X et Y irréductibles et quitte à remplacer X par F , on peut supposer que F est une application analytique f. Soient X' une variété projective et $g : X' \to X$ un morphisme surjectif. Il existe une sous-variété irréductible X'_1 de X' telle que $\dim X'_1 = \dim Y$ et que la restriction g_1 de $f \circ g$ à X'_1 soit un morphisme surjectif de X'_1 sur Y. Soit r le degré de g_1 . L'espace X'_1 est une variété projective, son produit symétrique $\mathrm{Sym}^r X'_1$ est encore une variété projective, et le produit fibré symétrique $\mathrm{Sym}^r_Y X'_1$, sous-espace analytique du précédent, est toujours une variété projective. Soit Y' la composante irréductible de $\mathrm{Sym}^r_Y X'_1$ qui contient les points de la forme $\{x_1,\dots,x_r\}$, où les x_i sont r points distincts d'une fibre de g_1 . L'application g_1 induit une application h de Y' dans Y, d'où etc.

COROLLAIRE. <u>Tout sous-espace analytique fermé réduit d'un espace sous-algébrique est sous-algébrique</u>.

<u>Démonstration</u>. Soient X un espace sous-algébrique et Y un sous-espace analytique fermé réduit de X. Soient X' une variété projective et $f : X' \to X$ un morphisme surjectif. Posons $Y' = f^{-1}(Y)$. L'espace Y' est une variété projective, donc est sous-algébrique, et $f_{|Y'} : Y' \to Y$ est surjective, d'où le corollaire.

6. Plan de la démonstration du théorème 1.

Considérons les assertions suivantes :

$(A_{N,n})$, $n < N$: Soit X un espace analytique lisse de dimension N. Tout sous-espace sous-algébrique de X de dimension n vérifie (i).

(A'_N) : Soient X un espace analytique lisse de dimension N et Y un sous-espace analytique de X de dimension $< N$, dont le réduit associé soit sous-algébrique. Il existe un espace X', obtenu à partir de X par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses, tel que l'image faible itérée de Y dans X' soit vide*.

(B_N) : Soient X et Y deux espaces analytiques compacts, X sous-algébrique lisse, et soit F une application méromorphe de X dans Y. Il existe un espace X', obtenu à partir de X par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses, et tel que $F \circ \pi$ soit une application analytique de X' dans Y, où π désigne la projection de X' sur X.

(C_N) : Tout espace sous-algébrique lisse de dimension N vérifie (i).

Le théorème 1 sera démontré si l'on établit les lemmes suivants :

LEMME 1.- $(\forall\ N' < N\ ,\quad (C_{N'})$ <u>et</u> $\forall\ n' < n\ ,\quad (A_{N,n'})\ ) \Rightarrow (A_{N,n})$.

LEMME 2.- $(\forall\ N' < N\ ,\quad (C_{N'})$ <u>et</u> $\forall\ n < N\ ,\quad (A_{N,n})\ ) \Rightarrow (A'_N)$.

LEMME 3.- $(A'_N) \Rightarrow (B_N)$.

LEMME 4.- $(B_N) \Rightarrow (C_N)$.

*) Il suffit de trouver un X' tel que l'image faible itérée Y'' de Y' dans X' soit une variété projective lisse. En effet, l'image faible Y'' de Y' dans l'espace X'' obtenu en éclatant X' suivant Y' sera alors vide.

La démonstration des lemmes 1 et 2 est faite simultanément (avec des resps) dans [2]. Elle occupe les pages 119 à 135. Le rapporteur ne parvient pas à en extraire quelque chose qui tienne dans ce cadre. Cette démonstration s'appuie sur la proposition suivante :

PROPOSITION 8.- Soient X un espace analytique lisse et Y un sous-espace lisse de X qui soit une variété projective. Il existe un sous-espace lisse Z de Y, d'intérieur vide dans Y, vérifiant les conditions suivantes :

a) en notant X' l'espace obtenu en éclatant X suivant Z et Y' l'image stricte de Y dans X', il existe un espace analytique X_o, un point x_o de X_o et un morphisme f de X' dans X_o qui induise un isomorphisme de $X' - Y'$ sur $X_o - \{x_o\}$ et qui applique Y' en x_o ;

b) l'espace X'' obtenu en éclatant X' suivant Y' peut être également obtenu en éclatant X_o suivant un sous-espace Y_o dont l'ensemble sous-jacent est réduit à x_o.

La démonstration de cette proposition occupe dans [2] le § 2 du Chapitre II, c'est-à-dire les pages 100 à 110.

7. Démonstration des lemmes 3 et 4.

Démonstration du lemme 3. D'après la proposition 4 d'Hironaka, il existe une suite finie $(X_o,\dots,X_k)$, où $X_o = X$ et où X_i est obtenu en éclatant X_{i-1} suivant un sous-espace Z_i d'intérieur vide, telle que $F \circ \pi_k$ soit analytique, π_k désignant la projection de X_k sur X. Construisons par récurrence sur i un espace lisse X'_i et un morphisme $g_i : X'_i \to X_i$ de la façon suivante : $X'_o = X$

et g_o est l'identité ; X'_i est un espace obtenu à partir de X'_{i-1} par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses, tel que l'image faible itérée de $g_{i-1}^{-1}(Z_i)$ dans X'_i soit vide, et g_i est l'unique morphisme de X'_i dans X_i au-dessus de g_{i-1} . L'espace X'_k est obtenu à partir de X par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses et

$$F \circ \pi'_k = F \circ \pi_k \circ g_k$$

est analytique, d'où (B_N) .

<u>Démonstration du lemme</u> 4. Soit X un espace sous-algébrique de dimension N. Soient X' une variété projective et $f : X' \to X$ un morphisme qui soit une équivalence méromorphe. D'après (B_N) appliqué à l'application méromorphe f^{-1}, il existe une suite finie $(X_o,\ldots,X_k)$, où $X_o = X$ et où X_i est obtenu en éclatant X_{i-1} suivant une variété projective lisse Z_i , telle que la projection $\pi_k : X_k \to X$ se factorise en $X_k \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{f} X$. Définissons l'espace X'_i et les morphismes $f_i : X'_i \to X_i$ et $g_i : X_k \to X'_i$ par récurrence de la façon suivante : $X'_o = X'$, l'espace X'_i est obtenu en éclatant X'_{i-1} suivant $f_{i-1}^{-1}(Z_i)$; on a $f_o = f$ et $g_o = g$, et les morphismes f_i et g_i rendent commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & X_k \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[d] \arrow[ddl, "g_{i-1}"] \\
X'_i \arrow[r, "f_i"'] \arrow[d] & X_i \arrow[d] \\
X'_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"'] & X_{i-1}
\end{tikzcd}$$

L'espace X_k' est une variété projective, et $f_k \circ g_k$ est l'identité de X_k, donc X_k est une variété projective, d'où (C_N).

8. Autres résultats.

DÉFINITION.- Soient X une variété analytique complexe et Y un sous-espace analytique de X, d'intérieur vide. On dit que Y est exceptionnel de première espèce (terminologie reçue, mais abominable) s'il existe une variété X', une sous-variété Y' de X' et une application analytique propre f de X dans X' telles que :

(a) f induit un isomorphisme de $X - Y$ sur $X' - Y'$;

(b) on a $Y = f^{-1}(Y')$;

(c) pour $x \in Y$, l'application $T_x f : T_x X \to T_{f(x)} X'$ n'est pas un isomorphisme.

Moïšezon donne la caractérisation suivante des sous-espaces exceptionnels de première espèce :

THÉORÈME 2.- Soient X une variété analytique, Y un sous-espace exceptionnel de première espèce de X, X' et Y' comme dans la définition 1. Si Y est irréductible, X s'identifie à la variété obtenue à partir de X' par éclatement de centre Y' (en particulier Y est une hypersurface lisse).

THÉORÈME 3.- Soient X une variété analytique complexe, Y une hypersurface lisse compacte dans X, et $f : Y \to Y'$ une submersion propre dont les fibres sont isomorphes à des espaces projectifs complexes de $\dim \geqq 1$. Notons $[Y]$ l'élément de $H^2(X)$ défini par Y, et supposons que, pour tout point $q \in Y'$, l'élément de $H^2(f^{-1}(q))$ induit par $[Y]$ soit la "section hyperplane" de l'espace projectif

$f^{-1}(q)$. On suppose en outre que le degré de transcendance du corps des fonctions méromorphes sur Y' est égal à $\dim Y'$.

Il existe alors une variété X' admettant Y' comme sous-variété, et un prolongement de f en une application analytique de X dans X' vérifiant les conditions (a), (b) et (c) de la définition 1. En particulier Y est une variété exceptionnelle de première espèce dans X. Enfin Moĭšezon donne un exemple d'un espace lisse de dimension 3, sous-algébrique mais non algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. HIRONAKA - Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math. 79 (1964), 109-326.

[2] B.G. MOĬŠEZON - On n-dimensional compact complex varieties with n algebraically independent meromorphic functions, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 30 (1966), 133-174 ; 345-386 ; 621-656. English translation : Amer. Math. Soc. Transl. (2) 63 (1967), 51-177.