MICHEL RAYNAUD

Familles de fibrés vectoriels sur une surface de Riemann

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 316, p. 45-60
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__45_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année, 1966/67, n° 316 Novembre 1966

FAMILLES de FIBRÉS VECTORIELS sur une SURFACE de RIEMANN

(D'après C. S. SESHADRI, M. S. NARASIMHAN et D. MUMFORD)

par Michel RAYNAUD

1. Fibrés stables.

Soient $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et X une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$, lisse, propre et connexe, de genre g. A un fibré vectoriel algébrique V sur X, ou ce qui revient au même, à un faisceau algébrique cohérent sur X, localement libre, on associe son rang $r(V)$ et son degré $d(V)$, égal au degré du fibré de rang 1 $\det V = \Lambda^{r(V)} V$. Notons $F^{r,d}$ l'ensemble des classes, à isomorphisme près, de fibrés vectoriels sur X, de rang r et de degré d. Nous aurons aussi à considérer des familles algébriques de fibrés, paramétrées par des $\mathbb{C}$-préschémas S. Plus précisément, procédant comme dans [4], on définit un foncteur contravariant $\underline{F}^{r,d} : (\mathrm{Sch}/\mathbb{C})^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ en prenant le faisceau associé (pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte) au préfaisceau suivant :

$S \longmapsto$ Classes, à isomorphisme près, de fibrés vectoriels sur $X_S = X \times_{\mathbb{C}} S$, de rang r, dont les fibres, au-dessus des points de S, sont de degré d.

On a alors $\underline{F}^{r,d}(\mathbb{C}) = F^{r,d}$.

A la courbe X on associe, de la manière habituelle, une surface de Riemann compacte X_{an} et les notions introduites plus haut se transposent en géométrie analytique. D'ailleurs, le foncteur naturel, qui à un fibré algébrique sur X, fait correspondre un fibré analytique sur X_{an} est une équivalence de catégories.

Lorsque $r = 1$, on sait que $\underline{F}^{1,d}$ est représentable par un espace principal homogène sous la jacobienne de X. Par contre, pour $r > 1$, une étude infinitésimale facile ([6] Exp. III 7.1) montre que $\underline{F}^{r,d}$ n'est pas en général représentable. Dans la suite, nous allons porter notre attention sur un sous-foncteur particulièrement intéressant de $\underline{F}^{r,d}$, le foncteur des familles de <u>fibrés stables</u>.

DÉFINITION 1.- <u>Un fibré vectoriel</u> V <u>sur</u> X <u>est dit</u> semi-stable (resp. stable) <u>si pour tout sous-fibré</u> (resp. <u>pour tout sous-fibré propre non nul</u>) W <u>de</u> V <u>on a</u> :

$$r(V)d(W) \leq d(V)r(W) \qquad \text{(resp. } d(W)/r(W) < d(V)/r(V) \text{).}$$

Nous notons $\underline{F}^{r,d}_{s,s}$ (resp. $\underline{F}^{r,d}_{s}$) le sous-foncteur de $\underline{F}^{r,d}$ défini par les familles algébriques de fibrés à fibres géométriques semi-stables (resp. stables) et on pose $F^{r,d}_{s,s} = \underline{F}^{r,d}_{s,s}(\mathbb{C})$ (resp. $F^{r,d}_{s} = \underline{F}^{r,d}_{s}(\mathbb{C})$).

<u>Exemples</u>.- a) Si $g = 0$, il y a identité entre fibrés indécomposables, fibrés stables et fibrés de rang 1.

b) Si $g = 1$, tout fibré indécomposable est semi-stable ([1]) et par suite est stable si $(r,d) = 1$. Par contre si $d = 0$, tout fibré indécomposable contient un sous-fibré de rang 1, de degré 0 (loc. cit.) et par suite n'est pas stable si $r > 1$.

c) Soient V un fibré vectoriel sur X, V^* son dual, L un fibré de rang 1, alors : V stable $\Longleftrightarrow V^*$ stable $\Longleftrightarrow V \otimes L$ stable et itou pour la semi-stabilité.

PROPOSITION 1.- <u>Soient</u> a <u>un nombre rationnel</u>, $F^{a}_{s,s}$ (resp. F^{a}_{s}) <u>la sous-catégorie pleine</u>, <u>de la catégorie des fibrés vectoriels sur</u> X, <u>formée des fibrés semi-stables</u> (resp. <u>stables</u>) <u>tels que</u> $d = ra$. <u>Alors</u> $F^{a}_{s,s}$ <u>est une catégorie abélienne</u>, <u>dont les objets simples sont les éléments de</u> F^{a}_{s}. <u>Tout élément</u> $V \in F^{a}_{s,s}$ <u>possède une</u>

<u>suite de Jordan-Hölder dont les quotients successifs sont stables</u> ; <u>on note</u> $Gr(V)$ <u>l'image de</u> V <u>dans le groupe de Grothendieck de</u> $F^a_{s,s}$.

<u>Démonstration.</u>

Soient V et $V' \in F^a_{s,s}$, $u \in Hom(V,V')$, $N = Ker\ u$, $Q = V/N$, I le sous-fibré de V' engendré par l'image de V , $i : Q \to I$ le monomorphisme canonique. Les hypothèses faites entraînent les inégalités : $d(N) \leqslant a.r(N)$ (donc $d(Q) \geqslant a.r(Q)$) et $d(I) \leqslant a.r(I)$. Par ailleurs, Q et I ont même rang r et la puissance extérieure $r^{\text{ième}}$ de i est non nulle, d'où $d(Q) \leqslant d(I)$. Il en résulte que i est un isomorphisme, puis que N , Q , I et V'/I sont dans $F^a_{s,s}$, d'où la proposition.

2. <u>Caractérisation transcendante des fibrés stables.</u>

Soient $\tilde{X}$ un revêtement universel de X_{an} , $p : \tilde{X} \to X_{an}$ le morphisme canonique, Γ le groupe fondamental de X_{an} . Rappelons qu'à tout faisceau E sur $\tilde{X}$, sur lequel Γ opère de façon compatible avec son action sur $\tilde{X}$, on associe un faisceau sur X_{an} : $p_*^{\Gamma}(E)$, en prenant le sous-faisceau de l'image directe $p_*(E)$, formé des sections invariantes sous Γ . En particulier, à toute représentation ρ de Γ , dans un espace vectoriel V sur $\mathbb{C}$, de rang fini, on fait correspondre le fibré vectoriel trivial $\tilde{V}$ sur $\tilde{X}$, sur lequel Γ opère par $(x,v) \to ({}^{\gamma}x, \rho(\gamma)v)$ ($\forall \gamma \in \Gamma$, $x \in \tilde{X}$ et $v \in V$) , puis le fibré vectoriel sur X_{an} : $p_*^{\Gamma}(\tilde{V})$, noté $V(\rho)$ et dit <u>associé</u> à ρ . Si ρ est unitaire, on dit que $V(\rho)$ est unitaire.

THÉORÈME 1.- <u>Soient</u> X , $\tilde{X}$ <u>et</u> Γ <u>comme ci-dessus. Alors</u> :

(i) <u>Si</u> (V_1, ρ_1) <u>et</u> (V_2, ρ_2) <u>sont deux représentations unitaires de</u> Γ <u>dans des espaces vectoriels sur</u> $\mathbb{C}$ <u>de rang fini et si</u> $Hom_{\Gamma}(V_1,V_2)$ <u>désigne le sous-</u>

espace de $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ formé des endomorphismes u tels que $\rho_2(\gamma).u = u.\rho_1(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma}(V_1,V_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,[V_1(\rho_1)\ ,\ V_2(\rho_2)]$$

est un isomorphisme.

(ii) Un fibré vectoriel sur X_{an} est stable de degré 0 , si et seulement si, il est isomorphe à un fibré associé à une représentation unitaire irréductible de Γ .

(iii) Un fibré vectoriel V sur X est isomorphe à un fibré unitaire, si et seulement si, V est somme directe de fibrés stables de degré 0 , en particulier, V est semi-stable de degré 0 .

Remarques.- i) Nous laissons au lecteur, le soin de reformuler le théorème 1 en termes d'équivalence entre des catégories convenables.

ii) Seshadri obtient des résultats analogues pour les fibrés semi-stables de degré < 0 . On doit remplacer le revêtement universel $\tilde{X}$ par un espace simplement connexe, convenablement ramifié au-dessus de X_{an} .

Démonstration partielle du théorème 1.

a) Démonstration de i). Soient ρ la représentation (unitaire) de Γ dans $V = \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ déduite de ρ_1 et ρ_2 . Le fibré $V(\rho)$ s'identifie au fibré vectoriel des homomorphismes de $V_1(\rho_1)$ dans $V_2(\rho_2)$. Il suffit donc de prouver le lemme :

LEMME 1.- Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (resp. sur $\mathbb{R}$), de rang fini, ρ une représentation unitaire (resp. orthogonale) de Γ dans E , $E(\rho)$ le fibré vectoriel sur X_{an} analytique complexe (resp. réel) associé à ρ . Alors l'application naturelle $u : H^0(\Gamma, E) \longrightarrow H^0(X_{an}, E(\rho))$ est bijective.

Démonstration. Etudions le cas complexe, le cas réel se traitant de manière analogue

L'application u est clairement injective, montrons qu'elle est surjective. Une section de $E(\rho)$ correspond à une fonction analytique sur $\tilde{X}$, à valeurs dans E, soit f, telle que $f({}^{\gamma}x) = \rho(\gamma)f(x)$ $\forall$ $x \in X$ et $\gamma \in \Gamma$. Si H est une forme hermitienne définie positive sur E, invariante par ρ, la fonction $x \mapsto H(f(x),f(x))$ est donc invariante par Γ et par suite provient d'une fonction h sur X_{an}. Comme h est pluri-sous-harmonique et X_{an} compact connexe, h est constante, donc f est constante et le lemme en résulte.

b) Démonstration de ii) dans le cas des fibrés vectoriels de rang 1.

Soient U le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 et $O^*_{X_{an}}$ le faisceau des unités de $O_{X_{an}}$, de sorte que l'on a le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "v"] & U \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & O_{X_{an}} \arrow[r, "u"] & O^*_{X_{an}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(u est l'application exponentielle et v la multiplication par le nombre complexe i). On en déduit facilement que l'on a le diagramme exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^1(X,\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^1(X,U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
H^1(X,O_{X_{an}}) \arrow[r] & H^1(X,O^*_{X_{an}}) \arrow[r] & H^2(X,\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Il suffit alors de remarquer que les classes de fibrés de rang 1, de degré 0 correspondent à l'image de $H^1(X,O_{X_{an}})$ dans $H^1(X,O^*_{X_{an}})$ tandis que les classes de fibrés unitaires correspondent à l'image de $H^1(X,U)$ dans $H^1(X,O^*_{X_{an}})$.

c) Si ρ est une représentation unitaire de Γ dans V, $V(\rho)$ est semi-stable.

D'après b) appliqué à $\det(V)$, V est de degré 0. Soit W un sous-fibré non nul de V ; montrons que l'on a $d(W) \leq 0$. Quitte à remplacer V par $\Lambda^{r(W)} V$, on peut supposer W de rang 1 . Supposons $d(W) > 0$. Il existe alors $L \in F^{1,o}$, tel que $H^o(X, L \otimes W)$ soit non nul. Comme L est unitaire d'après b), quitte à remplacer V par $V \otimes L$, on peut supposer $H^o(X,W) \neq 0$. Soit $\rho = \oplus \rho_i$ une décomposition de ρ en facteurs irréductibles, $V = \oplus V_i$ la décomposition correspondante de V , p_i la projection de V sur V_i . Comme W est de rang 1 , il existe un indice i tel que le composé $W \to V \xrightarrow{p_i} V_i$ soit injectif, de sorte que $H^o(X,V_i) \neq 0$. D'après le lemme 1, V_i est nécessairement le fibré trivial de rang 1 : Comme $d(W) \leq d(V_i)$, on a $d(W) \leq 0$, d'où une contradiction.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il est clair qu'il suffit de montrer que tout fibré stable V , de degré 0 , est associé à une représentation unitaire (nécessairement irréductible puisque V est indécomposable (cf. prop. 1). Ce point délicat sera établi plus loin.

3. Le théorème principal.

Rappelons que le groupe fondamental Γ est engendré par $2g$ générateurs $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, liés par la seule relation : $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. Par suite, l'espace des représentations de Γ dans le groupe linéaire $Gl_r(\mathbb{C})$ (resp. dans le groupe unitaire $U(r)$), muni de la topologie de la convergence simple, est homéomorphe à l'espace sous-jacent à un certain sous-espace analytique fermé R'^c (resp. R'^u) du produit $Gl_r(\mathbb{C})^{2g}$ (resp. $U(r)^{2g}$). En particulier, R'^u est compact, et il en est de même de l'espace R^u des classes de représentations unitaires de rang r de Γ .

D'autre part, soit Q le quotient de l'ensemble $F^{r,o}_{s,s}$ obtenu en identifiant deux fibrés semi-stables V et V' tels que $Gr(V) = Gr(V')$ (prop. 1) et soit Q_s

l'image de $F_s^{r,o}$ dans Q . Il résulte du n° 2 c), qu'il existe une application canonique de R^u dans $F_{s,s}^{r,o}$ qui, à la classe de la représentation unitaire ρ , fait correspondre la classe du fibré associé $V(\rho)$. Le théorème 1 nous dit alors que l'application composée $j : R^u \longrightarrow F_{s,s}^{r,o} \longrightarrow Q$ est bijective, donc Q est muni d'une topologie d'espace compact. Le théorème suivant nous dit que l'espace compact Q est sous-jacent à une variété projective qui apparait comme une compactification naturelle de l'ouvert Q_s des points stables.

THÉORÈME 2.- *Supposons que la courbe* X *soit de genre* $g \geqslant 2$. *Alors il existe un schéma* $\underline{Q}$ *et un morphisme* $q : \underline{F}_{s,s}^{r,o} \longrightarrow \underline{Q}$, *tel que, pour tout préschéma* Z *et pour tout morphisme* $u : \underline{F}_{s,s}^{r,o} \longrightarrow Z$, *il existe un unique morphisme* $v : \underline{Q} \longrightarrow Z$ *tel que* $v.q = u$. *De plus* :

a) *Le schéma* $\underline{Q}$ *est une variété projective, normale, de dimension* $r^2(g-1)+1$.

b) *Deux points* V *et* V' *de* $F_{s,s}^{r,o}$ *sont tels que* $q(V) = q(V')$ *si et seulement si* $Gr(V) = Gr(V')$, *de sorte que* $\underline{Q}(\mathbb{C})$ *s'identifie à* Q .

c) *Le sous-ensemble* Q_s *de* Q , *formé des points stables est l'ensemble des points rationnels d'une sous-variété ouverte* $\underline{Q}_s$ *de* $\underline{Q}$. *De plus* $\underline{Q}_s$ *est lisse et représente le foncteur* $\underline{F}_s^{r,o}$.

d) *L'application canonique* $R'^u \longrightarrow R^u \xrightarrow{j} Q = \underline{Q}(\mathbb{C})$ *est sous-jacente à un morphisme d'espaces analytiques réels et induit un homéomorphisme de* R^u *sur* $\underline{Q}(\mathbb{C})$.

Pour établir le théorème 2, nous utiliserons la théorie du passage au quotient de Mumford [7] , que nous allons brièvement rappeler.

4. Action d'un groupe réductif sur un schéma. Passage au quotient.

Soit G un groupe réductif qui opère sur un schéma X de type fini sur $\mathbb{C}$.

a) Cas où X est affine d'anneau A . Comme toute représentation, de dimension finie sur $\mathbb{C}$, d'un groupe réductif, est complètement réductible, un raisonnement classique montre que l'anneau A^G des invariants de A sous G est de type fini sur $\mathbb{C}$ et sépare deux fermés saturés de X qui sont disjoints. On en déduit que $Y = \mathrm{Spec}(A^G)$ est un quotient catégorique de X (c.à.d. tout morphisme de X dans un préschéma Z , invariant par G , se factorise de manière unique à travers Y). Si de plus G opère régulièrement sur X , c.à.d. si la dimension du stabilisateur des points de X est localement constante, alors les orbites des points fermés de X sont fermées et Y est un quotient géométrique de X (c.à.d., Y est le quotient de X par G dans la catégorie des espaces annelés).

b) Cas général.

DÉFINITION 2.- Soit L un faisceau inversible sur X . Une G-linéarisation de L est la donnée d'une action de G sur le fibré vectoriel de rang 1 défini par L , compatible avec l'action de G sur X .

Exemple 1.- Si E est un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{C}$, les actions de G sur l'espace projectif $P(E)$, pour lesquelles le faisceau ample canonique $O_P(1)$ est G-linéarisé, sont exactement les actions de G qui proviennent d'une représentation de G dans E .

Notons qu'une G-linéarisation de L définit une G-linéarisation de $L^n = L^{\otimes n}$, $(n \in \mathbb{Z})$ et que G opère sur $H^o(X,L^n)$. Si $f \in H^o(X,L^n)$ on note X_f le plus grand ouvert de X au-dessus duquel f engendre L^n . Nous pouvons alors formuler le résultat principal :

PROPOSITION 2.- Soit X un schéma propre sur $\mathbb{C}$, sur lequel opère un groupe réductif G et qui est muni d'un faisceau ample G-linéarisé L. Le schéma X s'identifie donc au spectre homogène de l'algèbre graduée $S = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L^n)$ ([5] II 2.3.4.1). soit S^G la sous-algèbre graduée de S des invariants sous G, et soit Y le schéma projectif, égal au spectre homogène de S^G. Alors :

(i) L'injection $S^G \to S$ définit une application rationnelle de X dans Y, dont le domaine de définition $X_{s,s}$ est l'ensemble des points semi-stables de X (relativement à la G-linéarisation considérée). C'est l'ensemble des points x de X tels qu'il existe $n > 0$ et $f \in H^0(X, L^n)$, invariante sous G, tel que $x \in X_f$. De plus Y est un quotient catégorique de $X_{s,s}$.

(ii) Soit X_s l'ouvert de $X_{s,s}$ formé des points stables, c.à.d. l'ensemble des $x \in X$, pour lesquels il existe f comme dans (i), tel que G opère régulièrement sur X_f. Alors il existe un ouvert U de Y qui est un quotient géométrique de X_s.

Par ailleurs, Mumford donne un critère commode pour reconnaître si un point de X est stable (resp. semi-stable). Nous allons l'utiliser pour traiter l'exemple suivant qui nous sera utile plus loin :

Exemple 2.- Soit $G_{h,r}$ la variété grassmannienne des espaces vectoriels quotients de dimension r d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ de dimension h. Le groupe linéaire $G = Gl(E)$ opère de façon naturelle sur $G_{h,r}$ et le plongement canonique de $G_{h,r}$ dans $P(\Lambda^r(E))$ montre qu'il existe une G-linéarisation naturelle du faisceau ample canonique L sur $G_{h,r}$. Plus généralement, pour tout entier $N > 0$, il existe une G-linéarisation naturelle du faisceau ample sur $(G_{h,r})^N$ égal au produit tensoriel des faisceaux L sur chacun des facteurs.

PROPOSITION 3.- <u>Un point</u> $(V_1,\dots,V_N)$ <u>de</u> $G^N_{h,r}(\mathbb{C})$ <u>est semi-stable</u> (resp. <u>stable avec pour stabilisateur le centre de</u> G) <u>si et seulement si, pour tout sous-espace</u> W <u>de</u> E (resp. <u>pour tout sous-espace propre non nul</u>) <u>on a</u> :

$$\frac{\sum_i r(W_i)}{N\,r} \geqslant \frac{r(W)}{h} \qquad \left(\text{resp. } \frac{\sum_i r(W_i)}{N\,r} > \frac{r(W)}{h}\right)$$

où W_i est l'image de W dans V_i et $r(V)$ est le rang de l'espace V .

5. Démonstration du théorème 2.

a) Construction d'une "jolie famille" algébrique de fibrés.

Soit $O_P(1)$ un faisceau inversible ample sur X , de degré 1 . Pour tout faisceau cohérent F sur X , on note $F(n)$ le faisceau $F \otimes O_P(1)^{\otimes n}$. L'entier r est fixé jusqu'à la fin de la démonstration.

Notons d'abord que $F^{r,o}_{s,s}$ est une <u>famille limitée</u>, c.à.d. qu'il existe un entier n_o tel que pour tout $n \geqslant n_o$ et pour tout $V \in F^{r,o}_{s,s}$, $V(n)$ soit engendré par ses sections et $H^1(X,V(n))$ soit nul. En effet, la proposition 1 nous ramène au cas où V est indécomposable de degré 0 et de rang $\leqslant r$, auquel cas la propriété résulte de [1] lemme 7. Pour n fixé $\geqslant n_o$, on a alors par Riemann-Roch :

$$r(H^o(X,V(n)) = rn + r(1-g) = h \quad \forall\ V \in F^{r,o}_{s,s} \ .$$

Soit E le fibré trivial sur X de rang h et soit H le schéma quasi-projectif sur $\mathbb{C}$ qui représente le foncteur suivant (cf. [3]) :

Pour tout $\mathbb{C}$ préschéma S , H(S) est l'ensemble des faisceaux F sur X_S vérifiant les conditions suivantes :

(i) F est un quotient de E_S où E_S est l'image réciproque de E sur X_S .

(ii) F est localement libre de rang r et pour tout point s de S , la fibre

F_s de F est de degré m.

(iii) $\forall s \in S$, $H^1(X_s, F_s) = 0$ et $H^0(X_s, E_s) \longrightarrow H^0(X_s, F_s)$ est surjectif (donc bijectif).

On trouve ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, un schéma H et un fibré vectoriel V_H sur X_H, qui est de rang r, qui est un quotient de E_H et qui possède la propriété suivante :

Pour tout $\mathbb{C}$-préschéma S et tout fibré W sur X_S qui est semi-stable, de rang r et de degré 0, il existe un recouvrement ouvert S_i de S et des morphismes $u_i : S_i \longrightarrow H$ tels que la restriction de $W(n)$ au-dessus de S_i soit isomorphe à l'image réciproque de V_H par u_i. En prime, on note les propriétés suivantes :

(i) Le groupe linéaire Gl_h opère sur H et deux points x et x' de $H(\mathbf{C})$ sont dans la même orbite si et seulement si $V_x \simeq V_{x'}$.

(ii) Le schéma H est lisse, de dimension $r^2(g-1) + h^2$ (utiliser l'étude différentielle faite dans [3]).

(iii) H est irréductible (utiliser le fait qu'un fibré vectoriel de rang r sur X qui est engendré par ses sections, est extension d'un fibré de rang 1 par le fibré trivial de rang $r - 1$ ([1] théorème 2)).

b) <u>Passage au quotient.</u>

A toute suite de N points rationnels (distincts) de X, soient $P_1, \ldots, P_N$ on associe de façon évidente un morphisme $i_{P_1, \ldots, P_N} : H \dashrightarrow G^N_{h,r}$ (cf. n° 4, Exemple 2). Ce morphisme est compatible avec l'action de Gl_h et est injectif pour N assez grand. Mais on a bien mieux :

PROPOSITION 4.- (i) <u>Les points de</u> $H(\mathbf{C})$ <u>qui correspondent à des fibrés semi-stables</u>

(resp. stables) sont les points d'un ouvert $H_{s,s}$ (resp. H_s) de H .
(ii) Si n et N sont choisis assez grands et si $V \in H_{s,s}(\mathbb{C})$, $i_{P_1,\ldots,P_N}(V)$ est un point semi-stable de $G^N_{h,r}$, au sens du n° 4, et est stable (avec pour stabilisateur le centre de Gl_h) si et seulement si V est stable.

Idée de la démonstration de la proposition 4. Pour simplifier, si M est un faisceau cohérent sur X , nous posons $h^i(M) = r\, H^i(X,M)$. Soient $V \in F^{r,o}_{s,s}$, W un sous-fibré de V , m un entier $\geqslant n^o$. On a alors d'après Riemann-Roch :

(1) $h^o(W(m))/r(W(m)) - h^o(V(m))/r(V(m)) = h^1(W(m))/r(W(m)) + d(W)/r(W) - d(V)/r(V)$.

Par ailleurs, si $W(m)$ est engendré génériquement par ses sections (c.à.d. si $H^o(X,W(m))$ engendre un sous-fibré de $W(m)$ ayant même rang que W), on montre que l'on a $h^o(W(m)) \leqslant d(W(m)) + r(W(m))$, de sorte que le second membre de (1) est majoré par $g + d(W)/r(W) - d(V)/r(V)$. Or la famille des W pour lesquels ce dernier nombre est $\geqslant 0$ est limitée, d'où le lemme :

LEMME 2.- Si n est choisi assez grand, pour tout $V \in H_s(\mathbb{C})$ et pour tout sous-fibré propre non nul, W de V , qui est génériquement engendré par ses sections , on a :
$h^o(W)/r(W) - h^o(V)/r(V) < 0$.

L'entier n étant ainsi choisi, prouvons par exemple, que si $V \in H_s(\mathbb{C})$, et si $N \geqslant 2h^2nr$, $i_{P_1,\ldots,P_N}(V)$ est stable. Soit F un sous-espace propre, non nul, de $H^o(X,V)$, W le sous-fibré de V engendré par F , F_i l'image de F dans la fibre de W au point P_i et notons que F engendre W sauf en au plus $d(W)$ points. On a alors les inégalités :

(2) $$0 \leqslant \frac{\sum [r(W)-r(F_i)]}{N\, r(F)} \leqslant \frac{d(W)r(W)}{N\, r(F)} \leqslant \frac{d(V)r(W)^2}{N\, r(F)r(V)} \leqslant \frac{nr}{N} \leqslant \frac{1}{2h^2} .$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2, on a si $W \neq V$:

$$r(W)/r(F) - r(V)/h^0(V) \geqslant r(W)/h^0(W) - r(V)/h^0(V) > 0$$

et comme $r(F) \leq h^0(V) = h$, on a même :

$$(3) \qquad r(W)/r(F) - r(V)/h^0(V) \geqslant 1/h^2 .$$

Si $W = V$, comme $r(F) \neq h^0(V)$, (3) est trivialement vérifiée. Il résulte alors de (2) et (3) que l'on a :

$$\frac{\sum r(F_i)}{N\, r(F)} - \frac{r(V)}{h^0(V)} \geqslant \frac{1}{2h^2} > 0 .$$

Mais c'est dire que $i_{P_1,\dots,P_N}(V)$ est stable.

On suppose désormais que les entiers n et N satisfont aux conditions de la proposition 4 et on pose $i = i_{P_1,\dots,P_N}$. Il résulte alors de la proposition 2, qu'il existe un quotient géométrique $\underline{Q}_s$ de H_s par $Gl_h(\mathbb{C})$; $\underline{Q}_s$ est lisse et représente le foncteur $\underline{F}_s^{r,o}$ (cf. [7] 0,9.). Soit d'autre part Y le quotient catégorique de l'ouvert des points semi-stables de $G_{h,r}^N$ et $\underline{Q}$ le normalisé de l'image fermée de $H_{s,s}$ dans Y . Il est clair que l'on a un morphisme canonique $q : \underline{F}_{s,s}^{r,o} \to \underline{Q}$. Soit $V \in H_{s,s}(\mathbb{C})$; comme V possède une suite de composition dont les quotients successifs sont stables (prop. 1), on montre que $i(V)$ possède une propriété analogue, ce qui nous permet de définir le gradué de $i(V)$: $Gr\, i(V)$. On montre alors que $Gr(V) \simeq Gr(V') \iff Gr\, i(V) \simeq Gr\, i(V')$ et que Y sépare les éléments semi-stables qui ont des gradués non isomorphes. Il en résulte que $Gr(V) \neq Gr(V') \implies q(V) \neq q(V')$. Enfin, les seules orbites fermées sous Gl_h dans $H_{s,s}(\mathbb{C})$ sont celles dont les points correspondent à des fibrés semi-stables, somme directe de fibrés stables, on en déduit que $\underline{Q}$ est un quotient catégorique de $H_{s,s}$ et satisfait à la propriété universelle énoncée dans le théorème 2.

c) Fin de la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Reprenons les notations introduites dans le n° 3 et notons que les constructions faites dans la partie a) de ce n° se transposent immédiatement en géométrie analytique. A la représentation universelle de Γ dans $Gl_r(\mathbb{C})$, est associé un fibré analytique F sur $X_{an} \times_{\mathbb{C}} R'^{c}$. L'ouvert R''^{c} de R'^{c}, correspondant aux fibres semi-stables de F, contient R'^{u} (n° 2, c)) et F définit un morphisme analytique $j' : R''^{c} \to \underline{Q}_{an}$. La restriction de j' à R'^{u} est donc un morphisme analytique réel, noté encore j'. Il est clair que la démonstration des théorèmes 1 et 2 sera achevée si on prouve que $j'(R'^{u}) = \underline{Q}(\mathbb{C})$. Comme R'^{u} est compact, $j'(R'^{u})$ est fermé dans $\underline{Q}_{an}$. Si R'^{u}_{irr} est le sous-ensemble de R'^{u} qui correspond aux représentations irréductibles, $j'(R'^{u}_{irr})$ est fermé dans $(\underline{Q}_s)_{an}$, et d'autre part, cet ensemble est non vide pour $g \geq 2$. Comme $\underline{Q}_s$ est irréductible, donc $(\underline{Q}_s)_{an}$ connexe, il suffit de montrer que $j'(R'^{u}_{irr})$ est <u>ouvert</u> dans $(\underline{Q}_s)_{an}$. Pour établir ce point, nous montrons que R'^{u}_{irr} est une variété analytique et que l'application linéaire tangente à j' est surjective. Or, si (E,ρ) est une représentation unitaire irréductible de Γ, de rang r, l'espace tangent à R'^{u}, au point correspondant à ρ, s'identifie au groupe des 1-cocycles $Z^1(\Gamma, \mathrm{Lie}\ U(r))$, (où Γ opère sur Lie $U(r)$ par la représentation $\mathrm{ad}(\rho)$ composée de ρ et de la représentation adjointe de $U(r)$), tandis que l'espace tangent à $\underline{Q}_s$ au point $j'(E,\rho)$ s'identifie à $H^1(X_{an}, \mathrm{Hom}\ E(\rho), E(\rho))$. Comme le complexifié de $U(r)$ est $Gl(E)$, Lie $U(r)$ a pour complexifié $\mathrm{End}(E,E)$. Soit V le faisceau des sections du fibré vectoriel $\mathrm{End}(E,E)\ (\mathrm{ad}\,\rho)$ et soit W le faisceau sur X_{an}, qui est associé au faisceau constant sur $\tilde{X}$ défini par Lie $U(r)$. L'application linéaire tangente à j' au point (E,ρ) est alors la composée des applications canoniques suivantes :

$$Z^1(\Gamma,\mathrm{Lie}\ U(r)) \longrightarrow H^1(\Gamma,\mathrm{Lie}\ U(r)) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{an},W) \longrightarrow H^1(X_{an},V)\ .$$

Des majorations immédiates, montrent qu'il suffit de prouver que l'application $H^1(X_{an},W) \longrightarrow H^1(X_{an},V)$ est injective, ou encore que l'application $H^0(X_{an},V) \longrightarrow H^0(X_{an},V/W)$ est surjective. Mais le faisceau V/W s'identifie au faisceau des sections du fibré vectoriel analytique réel, associé à $(\mathrm{Lie}\ U(r), \mathrm{ad}\,\rho)$ et on applique le lemme 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. ATIYAH - Vector bundles over an elliptic curve. Proc. London Math. Soc. t. 7, 1957. (Voir aussi Sém. Bourbaki 1957/58, n° 154.)

[2] A. GROTHENDIECK - Sur le mémoire de A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, Sém. Bourbaki 1956/57, n° 141.

[3] A. GROTHENDIECK - Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert. Sém. Bourbaki 1960/61, n° 221.

[4] A. GROTHENDIECK - Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique V : les schémas de Picard. Sém. Bourbaki 1961/62, n° 232.

[5] A. GROTHENDIECK - Eléments de géométrie algébrique. Publ. Math. I.H.E.S.

[6] A. GROTHENDIECK - Séminaire de géométrie algébrique. Séminaire I.H.E.S., 60/61.

[7] D. MUMFORD - Geometric invariant theory. Springer Verlag 1965.

[8] M. S. NARASIMHAN et C. S. SESHADRI - Holomorphic vector bundles on a compact Riemann surface. Math. Ann., 1964, 155.

[9] M. S. NARASIMHAN et C. S. SESHADRI - Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. of Math., 82, 1965.

[10] C. S. SESHADRI - Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface. A paraître.

[11] A. WEIL - Introduction à l'étude des variétés kählériennes. Paris Hermann 1958.

ERRATA

Page 316-04 - Le lemme 1 doit être modifié comme suit :

LEMME 1.- *Soient* ρ *une représentation unitaire* (resp. *orthogonale*) *de* Γ *dans un espace vectoriel* E *complexe* (resp. *réel*) *de rang fini*, $E(\rho)$ (resp. $E_h(\rho)$) *le faisceau sur* X_{an} *associé au faisceau sur* $\tilde{X}$ *des fonctions holomorphes* (resp. *harmoniques*) *à valeurs dans* E . *Alors l'application* :

$H^\circ(\Gamma,E) \to H^\circ(X_{an},E(\rho))$ (resp. $H^\circ(\Gamma,E) \to H^\circ(X_{an},E_h(\rho))$) *est bijective*.

Page 316-15 - Supprimer les lignes 5 et 6 et lire :

faisceau associé au faisceau sur $\tilde{X}$ des fonctions harmoniques à valeurs dans Lie U(r) et on applique le lemme 1.

Généralisation.- Le foncteur $\underline{F}^{r,d}_S$ s'introduit plus généralement pour une " famille de courbes X au-dessus d'un préschéma S ", définie par un S-schéma X , projectif et lisse sur S , à fibres géométriquement connexes de genre g . Lorsque S a toutes ses caractéristiques résiduelles nulles, la méthode exposée ici lorsque $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ et $d = 0$, jointe à une technique de descente, permet encore de montrer que $\underline{F}^{r,d}_S$ est représentable par un S-schéma lisse, à fibres connexes de dimension $r^2(g - 1) + 1$. Lorsqu'on disposera de l'analogue de la prop. 2 sur un corps de caractéristique $p > 0$ (cf. [7]. Préface) le même résultat vaudra sans restriction sur S .