ANDRÉ MARTINEAU

Théorèmes sur le prolongement analytique du type « edge of the wedge theorem »

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 340, p. 445-461

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__445_0>

Séminaire BOURBAKI
20e Année, 1967/68, n° 340 Février 1968

THÉORÈMES SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE DU TYPE "EDGE OF THE WEDGE THEOREM"

par André MARTINEAU

Les problèmes dont je vais parler ont été soulevés et d'ailleurs résolus dans dans un certain nombre de cas particuliers par les physiciens aux prises avec les difficultés de la théorie quantique des champs à la Wightman. La forme qui est donnée ici aux théorèmes de prolongement analytique doit beaucoup aux discussions que j'ai pu avoir, grâce aux réunions strasbourgeoises de la R.C.P. 25, avec MM. Bros, Epstein, Glaser, Stora.

Présentation du "Edge of the Wedge".

L'espace $\mathbb{C}^N$ est identifié à $\mathbb{R}^N \times i\mathbb{R}^N$, et $z \in \mathbb{C}^N$ sera noté $x + iy$. Un tube est un ensemble de la forme $\mathbb{R}^N \times iB$, et B s'appelle la base du tube. On désigne par $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions de Schwartz, par $\mathcal{S}'$ l'espace des distributions tempérées.

Soit T un tube ouvert connexe. On sait que toute fonction holomorphe dans T se prolonge à l'enveloppe convexe de T . Pour cette raison, les tubes dans la suite seront toujours supposés convexes.

Supposons que $0 \in \partial B$ et considérons une fonction f holomorphe dans T . On dira que f admet une valeur au bord dans $\mathcal{D}'$ (resp. dans $\mathcal{S}'$) notée ∂f , si $\lim_{\substack{y \in B \\ y \to 0}} f(x + iy)$ existe dans $\mathcal{D}'$ (resp. dans $\mathcal{S}'$).

Voici l'énoncé qui porte le nom de "Edge of the wedge theorem". On considère deux tubes ouverts T_1 et T_2 dont les bases B_1 et B_2 sont des cônes épointés de sommet l'origine, $B_2 = - B_1$. Alors si f_1 et f_2 sont deux fonctions holomorphes définies dans T_1 et dans T_2 telles que $\partial f_1 = \partial f_2$, il existe f entière, de restriction f_i à $T_i (i=1,2)$.

Si f_1 et f_2 sont tempérées (c.à.d. restrictions aux tubes de distributions tempérées), alors f est un polynôme. Le second énoncé est le plus ancien, et dû à N. Bogolioubov [2]. L'énoncé plus général est dû à H. Bremermann - R. Oehme et J.G.Taylor [1]. Le premier énoncé général, sans supposer les tubes opposés, et dans sa forme locale, est dû à H. Epstein [4].

Nous allons prouver dans la suite, en particulier, le théorème : Soient T_j, $j = 1,2,\dots, k$, des tubes ouverts de base B_j, les B_j étant des cônes épointés de $\mathbb{R}^N$. On se donne dans chaque T_j une fonction holomorphe f_j telle que ∂f_j existe dans $\mathcal{D}'$. Alors si $T_{i,j}$ désigne l'enveloppe convexe de $T_i \cup T_j$, et si $\tilde{T}_i = \bigcap_{j \neq i} T_{i,j}$, chaque fonction f_i se prolonge à $\tilde{T}_i$ en $\tilde{f}_i$ dès que $\sum_j \partial f_j = 0$

(On peut aussi montrer qu'il existe des $g_{i,j}$ holomorphes dans les $T_{i,j}$ telles que $\tilde{f}_i = \sum_{j \neq i} g_{i,j}$ dans $\tilde{T}_i$).

Nous montrerons divers résultats apparentés à celui-là, dont le correspondant local et les théorèmes des "tubes aplatis".

§ 1 . Ingrédients.

a) Distributions prolongeables.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est prolongeable si elle appartient à la restriction de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ à Ω. Une distribution dans Ω est tempérée si elle est la restriction d'une distribution tempérée de $\mathbb{R}^p$.

Un point d'un espace produit $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^s$ sera noté (z, u, ζ). Un ensemble Ω d'un tel espace sera dit un z - tube si $(z, u, \zeta) \in \Omega$ équivaut à $(\mathrm{Im}\, z, u, \zeta) \in \Omega$.

La base de ce tube soit B sera l'ensemble des $(x, u, \zeta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^s$ tels que $(ix, u, \zeta) \in \Omega$. Supposons Ω ouvert et soit T une distribution dans Ω. Si elle satisfait au système d'équations

$\bar\partial_z T = 0 \quad \bar\partial_\zeta T = 0$, soit $\dfrac{\partial T}{\partial \overline{z_j}} = 0 \quad j = 1,2,\dots,p \quad \dfrac{\partial T}{\partial \overline{\zeta_k}} = 0 \quad k = 1,\dots,s$,

nous dirons qu'elle est holomorphe en z dépendant de paramètres de façon distribution en u , holomorphe en ζ .

Dans ce cas, on peut définir pour tout $y \in B$ la distribution $T_y(x, u,\zeta)$ obtenue en fixant y ; c'est une distribution définie dans l'ouvert Ω_y de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^s$ égal à $\{(x,u,\zeta) \mid (x+iy,u,\zeta) \in \Omega\}$.
Supposons que Ω_y contient un ouvert fixe si $y \to 0$, voisinage d'un point x_o,u_o,ζ_o . Cet ouvert contient un ouvert de la forme $\omega \times \varpi$ où ω est un voisinage de x_o dans $\mathbb{R}^p$, ϖ un voisinage de (u_o,ζ_o) dans $\mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^s$. On peut définir la valeur au bord de T_y , limite au sens distribution dans $\mathcal{D}'(\omega \times \varpi)$ de T_y lorsque $y \to 0$. On obtient ainsi une distribution ∂T , distribution en x dépendant au voisinage de (u_o,ζ_o) de façon distribution en u , et holomorphe en ζ .

<u>Proposition 1</u> : <u>Dans les hypothèses ci-dessus décrites, T admet une valeur au bord si et seulement si elle est une distribution prolongeable au voisinage du point</u> $((x_o+i.o), u_o,\zeta_o)$.

Dans la suite, nous allons en conséquence remplacer systématiquement l'hypothèse de l'existence de la valeur au bord par celle de la prolongeabilité.

b) <u>$\bar\partial$-cohomologie à coefficients prolongeables, à coefficients</u> C^∞ <u>à la frontière.</u>

Nous considérons un convexe $\Omega \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^s$ et l'opérateur
$\bar\partial = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial}{\partial \bar z_j} d\,\bar z_j \;\Lambda$.

Nous considérons les formes à coefficients distributions prolongeables (tempérées) dans Ω , de degré p en dz_j q en $d\bar z_k$. On a le

<u>Théorème 1</u> : <u>Si</u> $\overset{p,q}{\omega}$ <u>est $\bar\partial$-fermée</u> , $q \geq 1$, <u>il existe</u> $\overset{p,q-1}{\varpi}$ <u>telle que</u> $\bar\partial \overset{p,q-1}{\varpi} = \overset{p,q}{\omega}$, $\overset{p,q-1}{\varpi}$ <u>étant à coefficients prolongeables (tempérés)</u> [6] page 303 .
Si X est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^N$, on désigne par $\mathcal{S}(X)$ le quotient de

$\mathcal{S}(\mathbb{C}^N)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à décroissance rapide, par son sous-espace formé des fonctions qui s'annulent ainsi que toutes leurs dérivées sur X .

Soit Γ un ouvert convexe d'une sous-variété linéaire réelle de $\mathbb{C}^N$. Imposons à Γ la condition supplémentaire qu'il existe $\ell_1,\dots,\ell_N$ N formes linéaires complexes indépendantes telles que

$$\Gamma \subset \{z \mid \operatorname{Re} \ell_1(z) < 0,\dots,\operatorname{Re} \ell_N(z) < 0\}$$

Nous considérons les formes à coefficients dans $\mathcal{S}(\bar{\Gamma})$.
Nous définissons l'opérateur $\bar{\partial}$ par son action dans Γ .

<u>Théorème 2</u> : <u>Si</u> $\overset{p,q}{\omega}$ <u>est $\bar{\partial}$-fermée,</u> $q \geq 1$, <u>il existe</u> $\overset{p,q-1}{\varpi}$ <u>telle que</u> $\bar{\partial}\,\overset{p,q-1}{\varpi} = \overset{p,q}{\omega}$, $\overset{p,q-1}{\varpi}$ <u>étant à coefficients dans</u> $\mathcal{S}(\bar{\Gamma})$.

(Ceci n'est pas démontré dans [6] mais la méthode indiquée pour la démonstration du théorème 1 dans le cas tempéré s'applique immédiatement).

c) <u>Un théorème de dualité</u>.

Le théorème précédent nous sera utile sous une forme duale que je vais décrire.

Soit Γ un convexe fermé de $\mathbb{C}^N$. Un élément de $\mathcal{S}(\Gamma)$ sera dit fonction holomorphe si sa restriction à l'<u>intérieur au sens convexe</u> de Γ est holomorphe des variables complexes de cet intérieur (ou, ce qui revient au même, des variables complexes de la plus petite variété affine réelle contenant Γ). L'ensemble de ces éléments sera noté $H_{\mathcal{S}}(\Gamma)$. Nous supposons comme précédemment que Γ est inclus dans une intersection de N-demi espaces réels en position générale. Notons $\sum^p_\Gamma$ le groupe différentiel gradué des formes en $dz, d\bar{z}$, de degré fixe p en dz , à coefficients distributions tempérées à support dans Γ , muni de l'opérateur $\bar{\partial}$.

Nous désignerons par $H^q_{\Gamma,\mathcal{S}'}(\mathbb{C}^N;\, \Omega^p)$, le q-ième groupe de cohomologie associé et, plus fréquemment, par $H^q_{\Gamma,\mathcal{S}'}$,

On a alors les propriétés suivantes :

Théorème 3 : a) si $\Gamma_2 \supset \Gamma_1$ $H_{\mathcal{S}}(\Gamma_2)$ est dense dans $H_{\mathcal{S}}(\Gamma_1)$

b) le dual de $H_{\mathcal{S}}(\Gamma)$ est isomorphe à $H^N_{\Gamma,\mathcal{S}'}$ et on a $H^q_{\Gamma,\mathcal{S}'} = 0$ pour $q \neq N$. (L'isomorphisme est obtenu à partir de la forme bilinéaire de dualité de définition entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.)

On comparera l'énoncé du théorème 3 à celui relatif à la vraie cohomologie donné en [5].

§ 2 - Le théorème des tubes aplatis.

a) Cohomologie de la différence de deux convexes.

Soient A et B deux fermés satisfaisant aux hypothèses précédentes. On va calculer la cohomologie prolongeable (resp. tempérée) de A-B.

On suppose $B \subset A$ et on considère les complexes suivants : K_A est le complexe des formes différentielles de type $0,q$ à coefficients tempérés dans A, K_B celui des formes analogues, mais à coefficients dans B, K_{A-B} est le complexe des formes distributions tempérées et à support dans A-B.

On a donc la suite exacte :

$$0 \to K_B \to K_A \to K_{A-B} \to 0 \quad .$$

Donc, il vient la suite exacte de "cohomologie"

$$\to H^q_{B,\mathcal{S}'} \to H^q_{A,\mathcal{S}'} \to H^q_{A-B,\mathcal{S}'} \xrightarrow{\partial} H^{q+1}_{B,\mathcal{S}'} \to \; .$$

Il vient donc $H^q_{A-B,\mathcal{S}'} = 0$ si $q > N$ ou si $q < N-1$, puis le bout de suite exacte :

$$0 \to H^{N-1}_{A-B,\mathcal{S}'} \to H^N_{B,\mathcal{S}'} \xrightarrow{(j)} H^N_{A,\mathcal{S}'} \to \; .$$

Or, par la propriété a) du théorème 3, l'application de $H_{\mathcal{S}}(A)$ dans $H_{\mathcal{S}}(B)$ est d'image dense, donc sa transposée qui est l'application (j) de $H^N_{B,\mathcal{S}'}$ dans $H^N_{A,\mathcal{S}'}$ est injective, ce qui prouve que $H^{N-1}_{A-B,\mathcal{S}'} = 0$ soit :

Proposition 2 . Si A et B sont deux convexes satisfaisant aux conditions du théorème 2 , $H^q_{A-B,\mathcal{S}'} = 0$ pour $q \neq N$. On peut introduire des paramètres dans cet énoncé . On doit noter que $H^N_{A-B,\mathcal{S}'}$ n'admet pas de topologie localement convexe séparée raisonnable en général.

b) Cohomologie d'un produit de demi-espaces.

Nous désignerons par $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs et par $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des nombres réels négatifs.

Si $\zeta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, nous notons par $\zeta \to \sqrt{\zeta}$ la fonction holomorphe qui coïncide pour $\zeta \in \mathbb{R}^+$ avec la racine carrée arithmétique. Soit Γ le convexe $y_1 \geq 1$, , $y_N \geq 1$. La transformation

$$(u_1,\ldots,u_N) \to ((\sqrt{u_1},\ldots, \sqrt{u_N}) = (z_1,\ldots,z_N))$$

définie si $u_j \notin \mathbb{R}^-$ pour tout j , transforme un voisinage de Γ dans le demi-espace $x_1 > 0,\ldots, x_N > 0$, et Γ devient le convexe $U = U_1 \times \ldots \times U_N$ où U_j est le convexe de $\mathbb{C}$ défini par $x_j^2 - y_j^2 \geq 1$ $(z_j = x_j + iy_j \ , \ j = 1,\ldots,N)$.

Nous coupons U par l'hyperplan réel P_n d'équation $\sum_{j=1}^{N} x_j = n$, qui définit le demi-espace $D_n = \{ \sum_{j=1}^{N} X_j < n \}$. Nous considérons la suite des convexes suivants :

$$W_2 = \overline{U \cap D_2} \ , \ F_2 = U \cap P_2 \ , \ V_2 = W_2 - F_2$$

$$W_n = (\overline{U \cap D_n}) \cap \complement D_{n-1} \ , \ F_n = U \cap P_n \ , \ V_n = W_n - F_n \ .$$

Nous avons fait en sorte que U_n et F_n soient compacts. Si ω est une forme de degré q en $d\bar{z}$ et $\bar{\partial}$-fermée $0 < q < N$, sa restriction à V_2 admet une primitive prolongeable π_2 . Je désigne par $\tilde{\pi}_2$ un prolongement de π_2 à support dans W_2 . Alors $\omega_2 = \omega - \bar{\partial}\tilde{\pi}_2$ est $\bar{\partial}$-fermée et à support dans $(\complement D_2) \cap U$; ω_2 restreinte à V_3 a une primitive prolongeable π_3 en $\tilde{\pi}_3$ à support dans W_3 , et $\omega - \bar{\partial}(\tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_3)$ a son support dans $(\complement D_3) \cap U$, etc...

La série $\sum_{j \geq 2} \tilde{\pi}_j$ converge dans $\mathcal{D}'$, étant localement finie, et donne la la primitive cherchée. D'autre part, pour $q = 0$, il est évident par raison de support que $H^0_U = 0$. Après changement de notation, nous énoncerons le

Théorème 4 : Soit Γ le convexe $y_1 \geq 0, \ldots, y_N \geq 0$ dans $\mathbb{C}^N$. On a $H^q_{\Gamma,\mathcal{D}'} = 0$ pour $q \neq N$.

D'une façon plus générale, si B et C sont deux convexes de $\mathbb{C}^N$ qui satisfont aux conditions du théorème 3 , on a $H^q_{B-C,\mathcal{D}'} = 0$ pour $q \neq N$.

Le théorème 4 (ou plutôt sa généralisation !) sera appliqué plus loin dans le cas où Γ est un tube fermé à base polyédrale pour simplifier des récurrences.

Bien entendu, on a désigné par $H^q_{\Gamma,\mathcal{D}'}$ le quotient de l'espace des formes distributions de degré q en $d\bar{z}$ et à support dans Γ , par le sous-espace de celles qui ont une primitive à coefficients distributions à support dans Γ .

On remarquera aussi que le théorème 4 reste vrai avec la véritable cohomologie : on emploie la même démonstration en remplaçant le théorème 3 par les résultats de [5] page 214 - 11 .

En nous arrêtant au terme U_2 , nous avons aussi prouvé le fait suivant.

Théorème 4' : Soit Ω un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^N$. Il existe un voisinage Ω' de 0 ne dependant que de Ω tel que pour toute forme ω de degré q où $0 < q < N$ $\bar{\partial}$-fermée, à coefficients distributions définies dans Ω et à support dans $\Omega \cap \Gamma$, il existe une primitive dans Ω' , à coefficients distributions définies dans Ω , et à support dans $\Omega' \cap \Gamma$.

c) Interprétations.

Pour la simplicité des notations, je traite seulement le cas d'un produit de demi-espaces. Soit J un sous-ensemble de $[1,\ldots,N]$; le cardinal de J sera noté $|J|$ ou h. Nous notons par V_J la sous-variété réelle de $\mathbb{C}^N$ définie par $y_j = 0$ pour tout $j \in J$, et nous posons $F_J = V_J \cap \Gamma$. Dans F_J nous considérons l'ouvert Ω_J défini par $y_k > 0$, $k \in \complement J$ et nous nous donnons une distribution T_J dans cet ouvert, holomorphe des variables z_k et prolongeable à tout V_J.

Si $\ell \notin J$, T_J a une valeur au bord dans $\Omega_{J\cup\{\ell\}}$, distribution définie dans $\Omega_{J\cup\{\ell\}}$ et prolongeable à $V_{J\cup\{\ell\}}$, soit :

$$\lim_{y_\ell \to 0} T(\ldots, x_\ell + iy_\ell, \ldots) = \partial_\ell T_J$$

Nous noterons par $\tilde{T}_J$ un prolongement de T_J à support dans F_J. L'ensemble J étant ordonné par l'ordre naturel $J = \{j_1,\ldots,j_h\}$, nous notons par $d\bar{z}^J$ la forme $d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_h}$. Nous notons $\delta(y_J)$ la distribution $\delta(y_{j_1}) \otimes \delta(y_{j_2}) \otimes \ldots \otimes \delta(y_{j_h})$.

Nous considérons la forme :

$$T = \sum_{|j|=h} \tilde{T}_J \otimes \delta(y_J).d\bar{z}^J \tag{1}$$

Cette forme est à support dans Γ et de degré h en $d\bar{z}$. Il vient le

<u>Lemme 1</u> : <u>On peut choisir les</u> $\tilde{T}_J$ <u>en sorte que</u> T <u>soit</u> $\bar{\partial}$-fermée <u>si et seulement si les conditions suivantes sont remplies</u> :

$$\sum_{\ell=o}^{h} (-1)^\ell \, \partial_{j_\ell} (T_{j_o \ldots \hat{j}_\ell \ldots j_h}) = 0 \tag{2}$$

<u>pour tout sous-ensemble</u> $H = \{j_o,\ldots,j_h\}$ de $[1,\ldots,N]$.

On s'appuie pour la démonstration sur le lemme 2 qui va suivre et sur les raisonnements de la fin de la démonstration du théorème 5.

Pour appliquer le théorème 3, on peut supposer que les T_J sont tempérées, pour appliquer le théorème 4', on supposera les T_J définies seulement dans $\Omega \cap V_J$.

Dans chacun des cas, il existe une primitive de même nature (dans un ouvert convexe Ω' qui ne dépend que de Ω pour le dernier cas). Montrons que la primitive peut être choisie du type (1) avec $|J| = h-1$, soit

$$\theta = \sum_{|J|=h-1} \tilde{\theta}_J \otimes \delta(y_J)\, d\bar{z}^J$$

et que alors on a :

$$(3) \qquad (\tfrac{2}{i})\, T_{j_0 \ldots j_{n-1}} = \sum_{m=0}^{h-1} (-1)^m \partial_{j_m} (\theta_{j_0 \ldots \hat{j}_m \ldots j_{h-1}}) \, .$$

En effet, soit U une primitive. Sa restriction à l'intérieur de Γ (resp de $\Gamma \cap \Omega$) est $\bar{\partial}$-fermée. Pour $h = 1$, c'est une fonction holomorphe. Supposons $h > 1$. D'après le théorème 1 , il existe une primitive V de cette restriction, prolongeable (resp tempérée ; primitive dans Ω').

Si $\tilde{V}$ est un prolongement de V à support dans Γ (resp à support dans $\Gamma \cap \bar{\Omega}'$) , $U + \bar{\partial}\tilde{V}$ est une primitive U_1 de θ concentrée dans la réunion des faces (réunion de l'intersection des faces avec Ω'). On a alors besoin du lemme suivant , [6]

<u>lemme 2</u> : <u>Soit</u> Ω <u>un ouvert de</u> V_J $J \subset [1,2,\ldots,N]$.

<u>On a</u> $H^q_{\Omega,\mathcal{D}'} = 0$ <u>pour</u> $q \neq |J|$ $(H^q_{\Gamma,\mathcal{S}'} = 0)$.

<u>Le groupe</u> $H^{|J|}_{\Omega,\mathcal{D}'}$ $(H^{|J|}_{\Omega,\mathcal{S}'})$ <u>est isomorphe à l'ensemble des distributions</u> T <u>définies dans</u> Ω , <u>holomorphes des variables</u> z_k, $k \notin J$, <u>prolongeables à</u> V_J <u>(tempérées) par l'isomorphisme</u> $T \mapsto$ <u>(classe de</u> $T \otimes \delta(y_J) d\bar{z}^J$).

Donc si $|J| \geq 2$ la restriction de U_1 à l'intérieur de chaque $F_{\{j\}}$ est congrue à 0 , ce qui permet de modifier U_1 en U_2 concentrée sur les $F_{\{i,j\}}$, etc... et nous conduit bien à une forme θ . Reste à voir le fait que θ est primitive de T entraîne la condition (3).

Il suffit de vérifier cela au voisinage de tout point de Ω_J , $|J| = h$.

Alors dans un voisinage de ce point, $H \subset J$ étant fixé $|H| = h-1$, θ_H est de la forme DC_H, D étant une dérivation multiple des z_j, $j \notin H$ et C_H holomorphe de ces z_j et continuement dérivable, jusqu'au bord V_J, de la variable z_{j_o} où $H \cup \{j_o\} = J$. On considère le prolongement $\tilde{C}_J$ de C_J par continuité jusqu'au bord, puis 0 ailleurs. On remplace l'opérateur $D = \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha}$ par $D_x = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$.

Alors, on a :

$$\bar{\partial}(D_x \tilde{C}_H) \wedge d\bar{z}^H = D_x(\bar{\partial} \tilde{C}_H) \wedge d\bar{z}^H$$

La distribution $D_x \tilde{C}_H$ est égale à θ_H au voisinage du point considéré dans Ω_H, donc réalise un prolongement de θ_H. D'après l'expression de droite, on voit que $\bar{\partial}(D_x C_H)$ est égal à

$$\frac{i}{2} \partial_{j_o} (\theta_H).\delta(y_{j_o})\, d\bar{z}_{j_o} \wedge d\bar{z}^H$$

Donc, par le lemme 2, $T = \bar{\partial}\,\theta$ implique l'égalité (3) . c.q.f.d.

D'où le

<u>Théorème 5</u> : <u>Soient</u> T_J <u>des distributions des</u> (x_k, z_j) $k \notin J$, $j \in J$, $|J| = p$, <u>à support dans</u> $\Gamma \cap \Omega_J$ <u>et prolongeables. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des</u> θ_H $|H| = p-1$, <u>distributions des</u> (x_ℓ, z_m) $\ell \notin H$, $m \in H$ <u>holomorphes des</u> z_m, <u>à support dans</u> $\Omega_H \cap \Gamma$ <u>et prolongeables, telles que</u> :

$$T_{j_o \cdots j_{p-1}} = \sum_{m=o}^{p-1} (-1)^m \partial_{j_m} (\theta_{j_o \cdots \hat{j}_m \cdots j_{p-1}})$$

<u>est que</u> :

$$\sum_{h=o}^{p} (-1)^h \partial_{j_h} (T_{j_o \cdots \hat{j}_h \cdots j_p}) = 0$$

variante $\mathcal{S}'$: Si les T_J sont tempérées, les θ_H peuvent être choisies tempérées .

Variante locale : Les T_J étant définies dans $\Gamma \cap \Omega_J \cap \Omega$, les θ_H existent dans $\Gamma \cap \Omega_H \cap \Omega'$ et sont prolongeables. Le théorème pour $|J| = N-1$ a été démontré pour la première fois par Malgrange (non publié) et a été redémontré par Zerner [8] .

La même démonstration appliquée à un tube fermé dont la base est un cône strictement convexe polyédral donne les résultats suivants . Désignons par X_h l'ensemble des faces orientées de dimension h de la base. Si $F \in X_h$, son bord est une somme de faces de X_{h-1} : $\partial F = \sum G(F) \quad G(F) \in X_{h-1}$.
On se donne des distributions T_F définies dans $\mathbb{R}^N \times i \overset{\circ}{\hat{F}}$ prolongeables (tempérées) (définies dans $\Omega \cap \mathbb{R}^N \times i \overset{\circ}{\hat{F}}$) et holomorphes des variables de la face. On convient que $T_{-F} = -T_F$. On peut définir si $G \in \partial F$, $\partial_G T_F$ la valeur au bord de T_F sur G . Alors, si

$$\sum_{\substack{F \\ G\in\partial F}} \partial_G T_F = 0 \tag{4}$$

pour tout $G \in X_{h-1}$ il existe des distributions θ_H , $H \in X_{h+1}$, définies dans chaque $\mathbb{R}^N \times i \overset{\circ}{\hat{H}}$, holomorphes des variables de la face H , prolongeables (tempérées) (définies dans $\Omega' \cap \mathbb{R}^N \times i \overset{\circ}{\hat{H}}$ et prolongeables) et telles que :

$$\sum_{\substack{H \\ F\in\partial H}} \partial_F \theta_H = T_F \tag{5}$$

(on remarquera que si $F \in \partial H$, $F \notin \partial(-H)$) .

Appliquons ce résultat au cas général suivant :
on se donne des points $x_1,\dots,x_p$ dans $\mathbb{R}^N - \{0\}$ et sur $[1,\dots,p]$ on se donne une structure de complexe abstrait. Mais on suppose qu'il est possible de réaliser cette structure de la façon suivante : il existe un polyèdre compact convexe P à p sommets $(y_1,\dots,y_p)$ dans un espace $\mathbb{R}^M$, polyèdre ne contenant pas l'origine, tel que, si on considère le cône de base

P dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, la projection de P sur $\mathbb{R}^N$ projette chaque arête $(0\, y_j)$ sur la demi-droite $(0\, X_j)$, cette correspondance établissant un isomorphisme entre la structure simpliciale de P et celle que nous nous sommes donnée sur $[1,\dots,p]$.

Nous disons que la situation est non dégénérée jusqu'à la dimension q si, étant donné une face de dimension inférieure ou égale à q de P , et J le sous-ensemble correspondant, l'enveloppe convexe des X_j et de 0 , $j \in J$ est de dimension q . Il revient au même de dire que la projection est biunivoque entre la pyramide engendrée par la face de P et son image dans $\mathbb{R}^N$.

Si J est une face, on désigne par $[X_J]$ la variété réelle engendrée par $\mathbb{R}^N$ et les $i\,X_j$ $j \in J$ $|J| < N$ et orientée par l'orientation naturelle de $\mathbb{R}^N$ et le choix de l'ordre croissant sur les indices des X_j . On posera $[X_o] = \mathbb{R}^N$; on note $[X_J]^+$ le tube qui a pour base l'enveloppe convexe de 0 et des X_j . On se donne dans l'intérieur de $[X_J]^+$ une distribution T_J prolongeable (tempérée) holomorphe des variables complexes de la face. Si la face J est non dégénérée et si $K \in \partial J$, on peut définir la valeur au bord $\partial_K\, T_J$. Si pour tout J tel que $|J| = h$ on s'est donné des T_J en sorte qu'on ait pour tout G , $|G| = h-1$

$$\sum_{\substack{J \\ G\in\partial J}} \partial_G\, T_J = 0$$

et si la situation est non dégénérée pour la valeur $h < N-1$, alors il existe des θ_H telles que

$$\Big(\sum_{\substack{H \\ J\,\in\,\partial H}} \partial_J\; \theta_H\Big) = T_J \,.$$

Pour cela, on remonte les données de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^{N+M}$ sur les faces du cône de base P . On applique le théorème 5 et on projette le résultat dans $\mathbb{C}^N$.

Notons que si tous les systèmes de k-vecteurs X_j sont linéairement indépendants, la situation est non dégénérée jusqu'à la dimension k : il suffit de prendre le simplexe abstrait $[1,\dots,p]$ et de le réaliser.

§ 3 - Les théorèmes de prolongement analytique.

Nous nous donnons dans l'espace $\mathbb{R}^N$ une suite de cônes convexes fermés Γ_j , $j = 1,2,\dots,p$ de sommet l'origine. Nous les considérons en situation non dégénérée si pour tout couple d'indices (i,j) l'enveloppe convexe de $\Gamma_i \cup \Gamma_j$ n'est pas incluse dans une droite. Nous notons V_j la variété réelle engendrée par $\mathbb{R}^N \times i\,\Gamma_j = T_j$ et nous nous donnons dans l'intérieur $\overset{\circ}{T}_j$ de T_j dans V_j une distribution holomorphe des variables complexes du tube, f_j , et prolongeable (tempérée), ou encore, dans la situation locale, les f_j sont donnés dans $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_j$.

Nous supposons que

$$\sum_j \lim_{\substack{y_j \to 0 \\ y_j \in \Gamma_j}} (f_j(x + iy_j)) = 0 .$$

Désignant par $\gamma(X)$ l'enveloppe convexe d'un ensemble X , nous définissons $\tilde{T}_j = \bigcap_{h \neq j} \gamma(T_j \cup T_h)$. Alors nous allons montrer que f_j est la restriction à l'intérieur de T_j (éventuellement la valeur au bord) d'une distribution $\tilde{f}_j$ définie dans l'intérieur de $\tilde{T}_j$, prolongeable, (tempérée), (définie dans un $\Omega' \cap \tilde{T}_j$ et prolongeable), holomorphe des variables complexes du tube $\tilde{T}_j$. Le cas des tubes ouverts indiqué dans l'introduction n'est jamais dégénéré.

Soit x_0 un point de $\mathbb{R}^N$ appartenant à

$$\bigcap_{1 \neq j} \gamma(\Gamma_1 \cup \Gamma_j) \text{ et différent de l'origine.}$$

Alors il existe des points $x_k \in T_1$, $y_k \in T_k$, $k = 2,\dots,p$ tels que x soit point de chacun des segments $(x_k\, y_k)$ pour tout $k \geq 2$. Soit P le polyèdre convexe fermé engendré par les x_k .

Nous désignons par X_h l'ensemble des faces de dimension h orientées. Si $x \in X_o$ nous considérons la situation suivante

$[x]^+$, $[y_2]^+$,..., $[y_p]^+$, $f_1, f_2, \ldots, f_p$ les f_j étant la restriction de la fonction f_j sur l'intérieur de $[y_j]^+$ ou de $[x]^+$, ou éventuellement leur valeur au bord sur $[x]^+$, ou $[y_j]^+$. Puisque la somme des valeurs au bord sur $\mathbb{R}^N$ est nulle, il existe des $f^x_{i,j}$ définies dans les intérieurs des $[x, y_j]^+$, $[y_j, y_k]^+$ de valeur au bord les f_j . Soit $y \in X_o$ en sorte que $(x, y) \in X_1$. Nous pouvons recommencer et déterminer des $f^y_{i,j}$. Nous considérons alors la situation suivante,

$[y]^+$, $[x]^+$ $[y_2]^+, \ldots, [y_p]^+$ et la donnée de $f^x_{i,j} - f^y_{i,j}$ sur $[y_i, y_j]^+$, de $f^x_{x,i}$ sur $[x, y_i]^+$, de $f^y_{y,j}$ sur $[y, y_j]^+$ et de la restriction ou valeur au bord de $-f_1$ sur $[x,y]^+$. Alors ce système de fonctions satisfait aux conditions de raccord, donc il existe des $f^{(x,y)}_{i,j,k}$ telles que les données précédentes soient leurs valeurs au bord. Nous associons ces $f^{(x,y)}_{i,j,k}$ à la face orientée $(x,y) \in X_1$. A la face (y,x) est associée la donnée opposée.

Nous notons par $|\Phi|$ la dimension d'une face Φ de P . Nous introduisons aussi le polyèdre $Q(\Phi)$ dont une face de dimension k est l'enveloppe convexe d'une face de dimension $\ell \leq k$ de Φ et des points

$$y_{j_1}, \ldots, y_{j_{k-\ell+1}} \qquad 1 < j_1 \leq p, \ldots, 1 < j_{k-\ell+1} \leq p \ .$$

Cette face est orientée par la donnée de la face orientée de Φ et des y_{j_n} avec $j_1 < \ldots < j_{k-\ell+1}$.

Supposons l'hypothèse de récurrence suivante satisfaite. Pour tout $\Phi \in X_{\ell-1}$ où $\ell \leq h$, on a associé aux faces orientées $\Psi(\Phi)$ de dimension $|\Phi| + 1$ de $Q(\Phi)$, des $f^{\Psi(\Phi)}$, distributions définies sur l'intérieur du tube dont la base est le cône engendré par $\Psi(\Phi)$, holomorphes des variables du tube, prolongeables, qui satisfont à l'hypothèse de recollement :

$$f^{\Psi(\Phi)} = - f^{-\Psi(\Phi)} \qquad ;$$

pour tout $\sigma \in Q(\Phi)$ $|\sigma| = |\Phi|$

$$\sum_{\substack{\Psi(\Phi) \\ \sigma \in \Psi(\Phi)}} \partial_\sigma f^{\Psi(\Phi)} = \sum_{\Theta \in \partial\Phi} f^{\sigma(\Theta)}$$

et si $\sigma = \Phi$, $\sum_{\substack{H \\ \Phi \in \partial H}} \partial_\Phi f^{H(\Phi)} = \pm f_1$ ou sa valeur au bord sur Φ .

Soit $F \in X_h$. Si $\Psi \in Q(F)$ nous lui mettons la valeur :

$$g^{\Psi(F)} = \sum_{\Phi \in \partial F} f^{\Psi(\Phi)}$$ si la sommation comprend au moins un terme.

Si $\Psi = F$, nous posons $g^F = \mp f_1$ ou sa valeur au bord sur F .

Alors je dis que la condition de recollement est satisfaite pour les g .

Si $A \in Q(F)$ $\Delta \notin (\partial F \cup - \partial F)$

$$S = \sum_{\substack{H \\ \Delta \in \partial H}} \partial_\Delta . g^{H(F)} = \sum_{\substack{H \\ \Delta \in \partial H}} \partial_\Delta \Big(\sum_{\Phi \in \partial F} f^{H(\Phi)} \Big)$$

$$S = \sum_{\substack{H \\ \Delta \in \partial H}} \Big(\sum_{\Phi \in \partial F} \partial_\Delta f^{H(\Phi)} \Big) = \sum_{\substack{H \\ \Delta \in \partial H}} \Big(\sum_{\Phi \in \partial F} \Big(\sum_{\Theta \in \partial\Phi} f^{\Delta(\Theta)} \Big)\Big)$$

$$S = \sum_H 0 = 0$$

car, pourvu que la sommation soit non vide, chaque terme apparaît deux fois mais avec les signes opposés.

Si $\Delta \in \partial F$, que nous notons alors Φ_o

$$\sum_{\substack{H \\ \Phi_o \in \partial H}} \partial_{\Phi_o} f^{H(F)} = \sum_{\substack{H \subset Q(\Phi_o) \\ \Phi_o \in \partial H^o}} \partial_{\Phi_o} f^{H(\Phi_o)} \mp f_1 = 0 \ .$$

En conséquence, par la fin du § 2, nous savons qu'il existe sur l'intérieur des tubes dont la base est engendrée par les faces Ψ de dimension $q + 1$ de $Q(F)$, des distributions $f^{\Psi(F)}$, $f^{-\Psi(F)} = -f^{\Psi(F)}$, holomorphes de variables du tube, prolongeables, qui satisfont à la condition que pour tout σ , $|\sigma| = |F|$, $\sigma \notin F$

$$f^{\Psi(-F)} = -f^{\Psi(F)} \quad ; \quad \sum_{\substack{\Psi \\ \sigma\in\partial\Psi}} \partial_\sigma f^{\Psi(F)} = \sum_{\Phi\in\partial F} d^{\sigma(\Phi)} ,$$

et si $\sigma = F$

$$\sum_{\substack{\Psi \\ F\in\partial\Psi}} \partial_F f^{\Psi(F)} = \pm f_1 .$$

Donc l'hypothèse de récurrence passe de h à $h+1$.

En fin de compte, il existe des $f_{1,i}$ $1 < i \leq p$, distributions définies dans l'intérieur du tube dont la base est engendrée par P et y_i , holomorphes des variables du tube, prolongeables, dont la somme des valeurs au bord sur P est f_1 . En conséquence la somme des $f_{1,i}$ réalise le prolongement analytique de f_1 (ou de sa valeur au bord) dans l'intérieur du convexe engendré par P et x_o .

Le théorème de prolongement analytique annoncé dans l'introduction est donc démontré. Mais, de plus, une inspection évidente de chaque terme de la construction montre qu'on peut choisir les prolongements distribution de f_1 à chaque tube de base $\gamma(P \cup x_o)$, provenant d'une partie bornée de $\mathcal{D}'$, ce qui montre que $\tilde{f}_1$ définie dans l'intérieur de $\tilde{T}_1$ est prolongeable en tant que distribution.

Enfin il est clair que ce résultat est vrai aussi dans le cas tempéré, les $\tilde{f}_j$ étant tempérés.

Il est vrai aussi dans le cas local : si Ω est un ouvert de départ dans la plus petite variété affine contenant la réunion des Γ_j , réunion des enveloppes convexes cerclées des suites de vecteurs unitaires $(x_1,\ldots,x_p)$ où $x_j \subset \Gamma_j$, $j = 1,\ldots,p$, nous notons Ω^p le rétrécissement associé qui est un homothétique de Ω , le rapport d'homothétie ne dépendant pas des positions relatives des Γ_j . La construction comprend N termes, donc la construction aboutit dans Ω^{p^N} . C'est-à-dire que si les f_j sont données dans les $T_j \cap \Omega$, les $\tilde{f}_j$ sont données dans les $T_j \cap \Omega^{p^N}$.

Signalons, liés aux résultats du théorème 5, l'existence d'autres théorèmes de prolongement analytique.

Enfin, cette théorie garde son sens en hyperfonctions. Ceci sera développé ailleurs.

Pour l'apparition et l'utilisation de ces théorèmes en théorie quantique des champs je renvois aux exposés de Bros [3] et Stora [7] et à leur bibliographie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. J. BREMERMANN, R. OEHME, J. G. TAYLOR - "A proof of dispersion relations in quantized field theories", Phys. Rev. 109, 1958, p. 2178-2190.

[2] N. BOGOLIOUBOV, B. V. MEDVEDEV, M. K. POLIVANOV - Voprosy teorii dispersionnykh sootnosheniy, Fitzmatgiz, 1958.

[3] J. BROS - Propriétés algébriques des valeurs au bord de la fonction de n points en théorie quantique des champs. Prépublication de la R.C.P. n° 25, Strasbourg, 1967, 39 p.

[4] H. EPSTEIN - Generalization of the "Edge of the wedge theorem", J. Math. Phys. 1, 1960, p. 524-531.

[5] A. MARTINEAU - Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki, 13e année, 1960-61, n° 214, 13 p.

[6] A. MARTINEAU - Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Proc. of an Intern. Summer Institute held in Lisbon, sept. 1964, p. 195-326.

[7] R. STORA - Sur la définition des distributions retardées en théorie quantique des champs, Prépublication de la R.C.P. n° 25, Strasbourg, 1967, 13 p.

[8] M. ZERNER - Quelques résultats sur le prolongement analytique des fonctions de variables complexes, Séminaire de Physique théorique de la Faculté des Sciences de Marseille, 1963-64.