ANDRÉ HAEFLIGER

Travaux de Novikov sur les feuilletages

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. nº 339, p. 433-444

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__433_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967-68, n° 339 Février 1968

TRAVAUX DE NOVIKOV SUR LES FEUILLETAGES

par André HAEFLIGER

Dans [1], Novikov démontre entre autres choses le théorème suivant dont nous esquisserons la démonstration et qui confirme une conjecture d'Ehresmann.

THÉORÈME. Soit M une variété différentiable compacte de dimension 3 dont le groupe fondamental est fini. Alors pour tout feuilletage de M par des surfaces, il existe une feuille compacte.

1. RAPPEL DE DÉFINITIONS FONDAMENTALES.

Un feuilletage F de codimension q sur une variété différentiable M est donné par une famille de projections locales $f_i : U_i \to \mathbb{R}^q$, où les U_i sont les ouverts d'un recouvrement de M, où les f_i sont différentiables de rang q et sont compatibles dans le sens suivant : pour tout $x \in U_i \cap U_j$, il existe un difféomorphisme g_{ji} d'un voisinage de $f_i(x)$ sur un voisinage de $f_j(x)$ tel que $f_j = g_{ji} f_i$ au voisinage de x. Si tous les g_{ij} sont de degré 1, on dira que le feuilletage est orienté.

Les intersections des ouverts de M avec les sous-ensembles de la forme $f_i^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{R}^q$, forment la base d'une topologie sur M appelée topologie des feuilles. Une feuille de F est une composante connexe de M relativement à cette topologie. D'après le théorème des fonctions implicites, les feuilles sont des sous-variétés de codimension q (en général non localement fermées) de M.

Par exemple sur M, une forme différentielle ω partout non nulle de degré un et complètement intégrable (i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$) définit un feuilletage de codimension 1 dont les feuilles sont les variétés intégrales complètes et dont les projections locales sont les intégrales premières de ω.

Les courbes intégrales d'un champ de vecteurs partout différent de zéro sur M sont les feuilles d'un feuilletage.

Le feuilletage de Reeb (cf. [2]). Dans le cylindre $D^2 \times \mathbb{R}$ produit du disque unité D^2 de $\mathbb{R}^2$ par la droite $\mathbb{R}$, on considère le feuilletage de codimension un dont une des feuilles est le bord $S^1 \times \mathbb{R}$; les autres feuilles sont les surfaces formées des points $(x, \alpha(|x|^2) + t)$, où x varie dans l'intérieur de D^2, t est un paramètre réel et α une fonction différentiable symétrique définie sur $]-1,+1[$ et tendant vers $-\infty$ lorsque son argument tend vers 1.

Le tore plein $T = D^2 \times S^1$ est le quotient de $D^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence qui identifie (x,t) à $(x,t+n)$, où n est un entier quelconque. Le feuilletage précédent étant invariant par ces translations, il définit par passage au quotient un feuilletage de T dont le bord $S^1 \times S^1$ est une feuille, les autres feuilles étant toutes homéomorphes au plan $\mathbb{R}^2$. Tout feuilletage homéomorphe à ce feuilletage de $D^2 \times S^1$ sera appelé une composante de Reeb.

En prenant deux telles composantes et en les recollant le long de leur bord par un homéomorphisme qui applique les méridiens de l'un sur les parallèles de l'autre, Reeb obtenait un feuilletage de S^3 de codimension 1 qui est différentiable si α est choisi convenablement.

Cet exemple classique est à la base de toutes les méditations sur les feuilletages. Il peut être varié à l'infini. Mais dans tous ces exemples, on constate l'existence d'une feuille compacte (il peut en exister une infinité). Comme l'avait fait remarquer Ehresmann, toute feuille compacte dans S^3 est forcément un tore, car sa caractéristique d'Euler doit être nulle.

Nous utiliserons le lemme suivant qui exprime dans un cas très particulier une propriété d'holonomie. Sa démonstration est élémentaire (cf. [2] ou [4]). Nous supposons M munie d'une métrique riemannienne.

LEMME D'HOLONOMIE. Soit A une feuille d'un feuilletage de codimension un sur M. Soit f_o une application continue d'un compact K dans A, homotope à une application constante. Il existe alors une famille continue d'applications $f_t : K \to M$ telle que

1) $f_t(K)$ soit contenu dans une feuille A_t

2) pour tout $x \in K$ fixe, la courbe $f_t(x)$ est différentiable et normale aux feuilles.

2. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

Soit M une variété munie d'un feuilletage de codimension 1. Un cycle évanouissant sur une feuille $A \subset M$ est une courbe $f_o : S^1 \to A$ contenue dans une famille continue de courbes f_t , $t \in [0,1]$, vérifiant les 3 propriétés :

1) $f_t(S^1)$ est contenu dans une feuille A_t ,

2) pour x fixé, $f_t(x)$ est une courbe différentiable normale aux feuilles ,

3) f_o n'est pas homotope à zéro dans $A = A_o$, mais f_t est homotope à zéro dans A_t pour tout $t > 0$.

Par exemple dans le feuilletage de Reeb, un méridien du tore est un cycle évanouissant.

Il est clair que le théorème énoncé au début sera une conséquence des deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. Si le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est fini et si M est compacte (sans bord), il existe toujours un cycle évanouissant.

THÉORÈME 2. Si M est compacte et de dimension 3, alors toute feuille contenant un cycle évanouissant est compacte.

En fait, Novikov démontre plus précisément que cette feuille borde une composante de Reeb, si le feuilletage est orienté.

Signalons d'autres résultats obtenus par Novikov avec des méthodes semblables.

THÉORÈME 1'. Soit M une variété munie d'un feuilletage de codimension 1. Si $\pi_2(M) \neq 0$ et si $\pi_2(A) = 0$ pour toute feuille A de M, il existe alors un cycle évanouissant.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 1 (voir paragraphe suivant), l'application φ du disque D^2 dans M étant remplacée par une application de S^2 dans M non homotope à zéro.

Si M est de dimension 3 et s'il existe une feuille A telle que $\pi_2(A) \neq 0$, alors A est forcément une sphère S^2 ou un plan projectif P^2. Or Reeb a démontré que dans ce cas et si M est compacte, toutes les feuilles sont compactes et que si le feuilletage est transversalement orientable, c'est même une fibration sur S^1 avec fibre S^2 ou P^2 (cf. [2]).

En combinant ces trois théorèmes, on obtient entre autres les corollaires suivants.

COROLLAIRE. Soit M^3 une variété compacte de dimension 3 munie d'un feuilletage codimension 1 orienté. Si aucune feuille n'est compacte, alors le revêtement universel $\hat{M}^3$ de M^3 est contractible. Si $\hat{M}^3$ n'est pas contractible, alors M^3 contient une composante de Reeb, à moins que $\hat{M}^3 = S^2 \times \mathbb{R}$ et que le feuilletage induit sur $\hat{M}^3$ ait pour feuilles les sphères $S^2 \times t$.

Novikov analyse également comment sont situées les composantes de Reeb d'un feuilletage de S^3. Il démontre qu'en faisant correspondre à chaque composante de Reeb $\approx D^2 \times S^1 \subset S^3$ la courbe $0 \times S^1$, on obtient un ensemble de courbes nouées ou enlacées (i.e. ne bordant pas des disques disjoints). Par exemple dans l'exemple classique de Reeb, on obtient deux courbes enlacées.

Il remarque aussi que tout champ de vecteurs, transversal aux feuilles d'une composante de Reeb, possède une trajectoire fermée. Cela résulte du fait que toute application de D^2 dans D^2 a un point fixe. Donc pour tout champ de vecteurs transversal à un feuilletage de S^3, il existe toujours un système de trajectoires fermées qui est noué.

Enfin, il montre que s'il existe sur la variété compacte M^3 un feuilletage analytique, alors son revêtement universel $\hat{M}^3$ est contractible ou bien isomorphe à $S^2 \times \mathbb{R}$.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

Elle est basée sur la méthode utilisée dans [3] (voir aussi [4]) et que nous rappelons brièvement.

On peut toujours supposer le feuilletage transversalement orientable (i.e. il existe un champ de vecteurs unités sur M normaux aux feuilles) ; si ce n'est pas le cas, il suffit de passer à un revêtement à deux feuillets de M. Comme M est compacte, il existe une courbe différentiable transverse aux feuilles (i.e. son vecteur vitesse n'est jamais tangent aux feuilles). On peut l'obtenir en modifiant légèrement une courbe intégrale du champ des vecteurs unités normaux aux feuilles. Comme cette courbe transversale représente un élément d'ordre fini p de $\pi_1(M)$, en la parcourant p fois, on obtient une courbe transversale fermée homotope à une application constante. Il existe donc une application φ du disque D^2 dans M dont la restriction au bord S^1 est transverse aux feuilles.

On peut supposer φ en position générale par rapport aux feuilles : les fonctions locales sur D^2 obtenues en composant φ avec les projections locales du feuilletage ont des points critiques non dégénérés et les images par φ de deux points critiques distincts ne sont pas sur la même feuille (cf. [3] p. 316-321 et [4]). Les images inverses par φ des feuilles peuvent être interprétées comme des réunions de trajectoires d'un champ de vecteurs sur D^2, les points singuliers étant du type "centre" ou "col" ; de plus il n'y a pas de trajectoire partant d'un col et aboutissant à un col différent. Enfin sur le bord de D^2, le champ de vecteurs est dirigé vers l'intérieur. Appelons cycle ou cycle avec un coin une trajectoire fermée de ce champ, ou l'union d'un col et d'une trajectoire partant de ce col et y revenant. Ainsi les cycles sont des courbes fermées simples.

On peut alors appliquer le théorème classique de Poincaré-Bendixon et montrer l'existence d'un cycle limite minimal (pour plus de détails, cf. [4]). Plus précisément, on montre qu'il existe un cycle C dans D^2 tel que $\varphi(C)$ soit une courbe non homotope à zéro sur la feuille qui le contient, et que dans la région Ω de D^2 bordée par C, toutes les trajectoires sont fermées ou partent d'un col et y retournent (cf. propos. 4.2 de [4]).

Novikov fait un pas de plus ; il montre qu'il existe dans $\bar{\Omega}$ un cycle C_o tel que $\varphi(C_o)$ ne soit pas homotope à zéro sur sa feuille, alors que les images par φ de tous les cycles situés dans la région limitée par C_o sont homotopes à zéro dans leur feuille. Il est alors clair que $\varphi(C_o)$ est un cycle évanouissant.

Pour montrer l'existence de C_o, introduisons dans l'ensemble des cycles de $\bar{\Omega}$ l'ordre partiel défini par inclusion. Le sous-ensemble des cycles dont les images par φ ne sont pas homotopes à zéro dans leur feuille est inductif, en vertu du lemme d'holonomie et de la remarque que les cycles voisins d'un centre sont homotopes à zéro sur leur feuille. On pourra donc choisir pour C_o un élément minimal de cet ensemble.

4. DEMONSTRATION DU THÉORÈME 2.

Elle nécessitera 5 lemmes.

LEMME 1. <u>Soit</u> M <u>une variété munie d'un feuilletage de codimension</u> 1. <u>Toute feuille non fermée (par exemple non compacte) est coupée par une courbe transversale fermée</u>.

<u>Démonstration</u>. (cf. [3] p. 322, dernier paragraphe). On peut supposer le feuilletage transversalement orientable, en remplaçant M par un revêtement à deux feuillets convenable.

Il existe un segment de courbe $g : [0,1] \to M$ orthogonal aux feuilles et joignant deux points distincts x_0 et x_1 de la feuille non fermée A. En effet, tout segment orthogonal aux feuilles et passant par un point de $\bar{A} - A$ coupe A suivant une infinité de points.

Soit $f_0 : [0,1] \to A$ une courbe telle que $f_0(0) = x_1$ et $f_0(1) = x_0$. D'après le lemme d'holonomie, il existe une famille continue de courbes $f_t : [0,1] \to M$, $t \in [0,\varepsilon]$, chacune étant contenue dans une feuille, les segments $f_t(y)$, y fixe, étant orthogonaux aux feuilles. De plus, on suppose $f_t(0) = g(1-t)$.

Alors la courbe obtenue en parcourant d'abord le segment g de 0 à $1-\varepsilon$, puis la courbe $f_{(1-t)}(t)$ et en arrondissant les angles, est transverse aux feuilles (car le feuilletage est transversalement orientable). Elle coupe A en x_0.

LEMME 2. <u>Soit</u> A <u>une feuille contenant un cycle évanouissant</u>, M <u>étant de dimension</u> 3. <u>Aussi près qu'on veut de</u> A, <u>il existe une feuille</u> A_0 <u>et une famille différentiable de courbes</u> $f_t : S^1 \to M$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ <u>telles que</u>

1) $f_t(S^1)$ <u>est contenu dans une feuille</u> A_t ,

2) <u>pour</u> $x \in S^1$ <u>fixe, la courbe</u> $f_t(x)$ <u>est normale aux feuilles ; de plus si</u> $f_0(x) \neq f_0(y)$, <u>les deux courbes</u> $f_t(x)$ <u>et</u> $f_t(y)$ <u>ne se coupent pas</u>,

3) f_0 <u>est un cycle évanouissant</u> ($f_0 \sim 0$ <u>dans</u> A_0 , <u>mais</u> $f_t \not\sim 0$ <u>dans</u> A_t <u>pour</u> $t > 0$),

4) <u>le relèvement</u> $\hat{f}_t$ <u>de</u> f_t <u>dans le revêtement universel</u> $\hat{A}_t$ <u>de</u> A_t <u>est une</u> COURBE FERMÉE SIMPLE <u>pour</u> $t > 0$.

Démonstration. Par la définition d'un cycle évanouissant, il existe une famille de courbes f_t vérifiant 1), 2), et 3) avec $A_o = A$. Nous pouvons supposer que f_o est une immersion en position générale dans A_o (points doubles isolés à tangentes distinctes). Pour obtenir la condition 3) renforcée, il suffit de restreindre t à un intervalle plus petit.

Pour $t > 0$, le revêtement universel $\hat{A}_t$ de A_t et le relèvement $\hat{f}_t$ seront déterminés par le point base $f_t(x_o)$, où x_o est un point base dans S^1.

Soit r le nombre des couples (x,y) de points distincts de S^1 tels que $\hat{f}_t(x) = \hat{f}_t(y)$ pour un certain $t > 0$. Soit (x,y) un tel point double. Soit U l'ensemble des t pour lesquels $\hat{f}_t(x) = \hat{f}_t(y)$, et K l'ensemble des t pour lesquels $f_t(x) = f_t(y)$. On a évidemment $U \neq \emptyset$ et $U \subset K$. De plus U est un ouvert de $[0,1]$ en vertu du lemme d'holonomie, et K est un fermé par continuité.

Soient t' et t'' tels que $]t',t''] \subset U$ et $t' \notin U$; comme K est fermé, $t' \in K$. La restriction de $f_{t'}$ à l'un des deux arcs de S^1 déterminés par x et y est une courbe fermée non homotope à zéro dans $A_{t'}$. En effet si $t' > 0$, cela résulte du fait que cette courbe se relève dans $\hat{A}_{t'}$ suivant une courbe non fermée ; si $t' = 0$, comme f_o est non homotope à zéro dans A_o, les restrictions de f_o à $\widehat{xy}$ et $\widehat{yx}$ ne peuvent être toutes deux homotopes à zéro.

Remplaçons alors la famille f_t par une nouvelle famille de courbes obtenues en restreignant f_t à l'un des deux arcs $\widehat{xy}$ ou $\widehat{yx}$ et le paramètre à l'intervalle $[t',t'']$, et en arrondissant l'angle en $f_{t'}(x)$.

Cette nouvelle famille, reparamétrisée convenablement, vérifie les mêmes conditions que f_t, mais le nombre de ses points doubles définis plus haut est inférieur à r. Il suffit donc de répéter cet argument un nombre fini de fois.

LEMME 3. <u>Soit</u> f_t <u>une famille de courbes vérifiant les conditions du lemme</u> 2. <u>Il existe une immersion</u> $F :]0,1] \times D^2 \to M$ <u>telle que</u> :

1) $F(t,x) = f_t(x)$ <u>pour</u> $x \in S^1$,

2) $F(t \times D^2) \subset A_t$,

3) <u>pour</u> $x \in D^2$ <u>fixé, la courbe</u> $f_t(x)$ <u>est normale aux feuilles</u>,

4) <u>l'ensemble</u> U <u>des points</u> $x \in D^2$ <u>pour lesquels</u> $F(t,x)$ <u>tend vers une limite pour</u> t <u>tendant vers zéro, est un ouvert contenant</u> S^1 <u>et dont le complémentaire est non vide</u>.

<u>Démonstration</u>. Construisons d'abord F sur $1 \times D^2$ en appliquant le théorème de Jordan à $\hat{f}_1$. En vertu du lemme d'holonomie, F peut être défini de manière unique sur $]t_o,1] \times D^2$ en vérifiant 1)-3), où t_o est un certain nombre inférieur à 1. Si $t_o \neq 0$, en utilisant à nouveau le théorème de Jordan (*) et le lemme d'holonomie, on voit que F peut aussi être défini pour t_o . On peut donc construire F sur $]0,1] \times D^2$ vérifiant 1)-3).

Par continuité, il est clair que U est ouvert. Il contient S^1 car $\lim F(t,x) = f_o(x)$ pour $t \to 0$ et $x \in S^1$. Si U était égal à D^2, alors $F(0,D^2) = \lim F(t,D^2)$ pour $t \to 0$, serait un disque appliqué dans A_o et bordé par $f_o(S^1)$, ce qui contredit l'hypothèse que f_o n'est pas homotope à zéro dans A_o .

LEMME 4. <u>Etant donné</u> $\alpha > 0$, <u>on peut trouver des nombres</u> t' <u>et</u> t'' <u>tels que</u> $0 < t' < t'' < \alpha$, $A_{t'} = A_{t''}$, <u>et un plongement</u> h <u>de</u> D^2 <u>dans l'intérieur de</u> D^2, <u>conservant l'orientation et tel que</u>

$$F(t'',x) = F(t',hx).$$

(*) en tenant compte du théorème de Reeb cité au bas de la page 4, on peut supposer que le revêtement universel de toute feuille est un plan.

Démonstration Soit x un point de D^2 n'appartenant pas à U. Alors $F(t,x)$ est une courbe normale de longueur infinie. Soit z un point limite de cette courbe et $A(z)$ la feuille contenant z. Il existe une suite de nombres t_i tendant vers 0 telle que les points $F(t_i,x)$ appartiennent à $A(z)$ et tendent vers z. On a donc $A_{t_i} = A(z)$.

Notons que dans $A(z)$, les courbes $f_{t_i}(S^1)$ sont éloignées les unes des autres relativement à la métrique riemannienne induite sur $A(z)$ par celle de M.

Soit $(\hat{A}(z),\hat{z})$ le revêtement universel pointé de $A(z)$ muni du point base z. Pour t_i assez petit, z appartient à $F(t_i \times D^2)$. Soit D_i le relèvement de $F(t_i \times D^2)$ dans $\hat{A}(z)$ contenant $\hat{z}$. Etant donné un tel disque D^i, il ne peut contenir qu'un nombre fini de D^j, puisque leurs frontières sont loin les unes des autres. Il existe donc $t_j < t_i$ tel que $D_j \supset D_i$. On peut alors définir h par l'équation

$$\hat{F}(t_i,y) = \hat{F}(t_j,hy)$$

où $\hat{F}(t_i,y)$ est le relèvement de $F(t_i,y)$ dans $\hat{A}(z)$ appliquant $F(t_i \times D^2)$ sur D_i

LEMME 5. Il n'existe pas de transversale fermée coupant A_o.

Démonstration. Soit $\tau : S^1 \to M$ une courbe transversale fermée coupant A_o. Nous pouvons supposer le feuilletage transversalement orienté de sorte que les courbes τ et f_t soient orientées positivement. Nous pouvons aussi modifier τ de sorte que τ ne coupe $f_o(S^1)$ qu'au seul point $f_o(x_o) = \tau(1)$, et que près de ce point, τ soit une courbe orthogonale aux feuilles. Nous pouvons donc trouver un nombre $\alpha > 0$ assez petit pour que τ ne rencontre $F([0,\alpha] \times S^1)$ que le long du segment $F([0,\alpha] \times x_o)$.

Choisissons t' et t'' comme dans le lemme 4. Soit N le quotient de $[t',t''] \times D^2$ par la relation d'équivalence identifiant (t'',x) à (t',hx). On a une projection p de N dans M définie par $p(t,x) = F(t,x)$ et qui est une immersion. L'espace N est une variété dont le bord est la réunion de $C = [t',t''] \times S^1$ et $C' = t' \times (D^2 - h(D^2))$; C et C' se coupent le long d'une arête.

Essayons de relever τ dans N. Nous pouvons trouver un arc maximal $Q = \{e^{i\theta}, c \leqq \theta \leqq c'\}$ dans S^1 tel qu'il existe une application continue $\hat{\tau} : Q \to N$ vérifiant $p\hat{\tau} = \tau$ et $\tau(c) = (t',x_o)$. Comme Q est maximal, $\hat{\tau}(c')$ doit appartenir à la frontière de N. Mais c'est impossible, car $\hat{\tau}$ coupe C seulement le long de l'arc $[t',t''] \times x_o$ et aux points de C', la direction positive est dirigée vers l'intérieur de N. Il y a donc une contradiction.

<u>Démonstration du théorème</u>. D'après le lemme 1, il suffit de montrer que A n'est pas coupée par une transversale fermée. Si c'était le cas, cette transversale couperait aussi une feuille A_o vérifiant les conditions du lemme 2, car A_o peut être choisie aussi près qu'on veut de A. Mais c'est impossible d'après le lemme 5.

RÉFÉRENCES

1. S.P. NOVIKOV - <u>Topologie des feuilletages</u>, Trud. Mosc. Mat. Ob., 14 (1965), p. 248-278.

2. G. REEB - <u>Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées</u>, Act. Scient. et Indust., Hermann, Paris (1952).

3. A. HAEFLIGER - <u>Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes</u>, Comm. Math. Helv. 32 (1958), p. 248-329.

4. A. HAEFLIGER - <u>Variétés feuilletées</u>, Ann. Scuola Normale Sup., Pisa 16 (1962), p. 367-397.