PIERRE CARTIER

Théorie des groupes, fonctions thêta et modules des variétés abéliennes

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 338, p. 417-432

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__417_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967/68, n° 338 Février 1968

THÉORIE DES GROUPES, FONCTIONS THÉTA ET MODULES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

par Pierre CARTIER

Dans la première partie, nous montrerons comment l'on peut faire dépendre la théorie des fonctions théta de l'étude des représentations d'un certain groupe de Lie réel nilpotent. Nous montrerons ensuite comment MUMFORD a étendu la définition des fonctions théta au cas ℓ-adique et nous indiquerons sommairement comment il en déduit une construction algébrique des variétés de modules pour les variétés abéliennes polarisées.

§ 1. Fonctions théta complexes.

1. Un certain groupe nilpotent.

On note V un espace vectoriel réel de dimension finie $2g$ et B une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $V \times V$. Le groupe $G(V)$ a pour éléments les paires (t,v) où t est un nombre complexe de module 1, et v un élément de V ; la multiplication est la suivante

(1) $$(t,v)(t',v') = (tt'\underset{\sim}{e}(\tfrac{1}{2}B(v,v')),v+v')$$

où l'on pose $\underset{\sim}{e}(x) = e^{2\pi ix}$ pour tout nombre complexe x. On identifie t et $(t,0)$, et le tore $\mathbb{T}$ est alors le centre de $G(V)$; on pose $\pi(t,v) = v$ et $\sigma(v) = (1,v)$, d'où la relation de commutation

(2) $$\sigma(v)\sigma(v')\sigma(v)^{-1}\sigma(v')^{-1} = \underset{\sim}{e}(B(v,v')) ,$$

par suite, $\mathbb{T}$ est le groupe des commutateurs de $G(V)$ et l'on a la suite exacte

$$0 \to \mathbf{T} \to G(V) \overset{\pi}{\to} V \to 0 .$$

Définissons certains sous-groupes de $G(V)$:

a) Soit W un sous-espace isotrope de V (i.e. on a $B(w,w') = 0$ pour w, w' dans W). Alors $\sigma(W)$ et $\mathbf{T}.\sigma(W)$ sont des sous-groupes commutatifs de $G(V)$. En particulier, prenons pour W un sous-espace isotrope de dimension g ; il existe un sous-espace isotrope W' tel que $V = W \oplus W'$ et l'on met w et w' en dualité par $\langle w,w'\rangle = B(w,w')$. L'application φ de $\mathbf{T} \times W \times W'$ dans $G(V)$ définie par $\varphi(t,w,w') = t\sigma(w)\sigma(w')$ est bijective ; la multiplication s'exprime par la formule

$$(3) \qquad \varphi(t,w,w')\varphi(t_1,w_1,w_1') = \varphi(tt_1\underset{\sim}{e}(B(w',w_1)),w + w_1,w' + w_1') .$$

b) Soit L un réseau dans V. Pour qu'il existe un <u>relèvement</u> de L dans $G(V)$, c'est-à-dire un sous-groupe Γ tel que $\Gamma \cap \mathbf{T} = (1)$ et $\pi(\Gamma) = L$, il faut et il suffit que B soit entière sur $L \times L$; dans ce cas, les relèvements de L sont les groupes $\Psi_u(L)$ où Ψ_u est un homomorphisme de L dans $G(V)$ de la forme $\Psi_u(\lambda) = u(\lambda)^{-1}.\sigma(\lambda)$, la fonction $u : L \to \mathbf{T}$ satisfaisant à

$$(4) \qquad u(\lambda + \lambda') = u(\lambda)u(\lambda')(-1)^{B(\lambda,\lambda')} .$$

Lorsque B prend des valeurs paires sur $L \times L$, la formule (4) signifie que u est un homomorphisme de L dans $\mathbf{T}$, et en particulier $\sigma(L)$ est un relèvement de L.

On dit que le réseau L est <u>principal</u> lorsque L est égal à l'ensemble des $v \in V$ tels que $B(\lambda,v)$ soit entier pour tout $\lambda \in L$. On fait cette hypothèse pour la fin du numéro. On dit que le relèvement $\Gamma = \Psi_u(L)$ de L est <u>symétrique</u> si l'on a $u(\lambda) = \pm 1$ pour tout $\lambda \in L$; ceci équivaut à la formule $\delta_{-1}\Psi_u(\lambda) = \Psi_u(-\lambda)$, où de manière générale, δ_n est l'endomorphisme

$(t,v) \mapsto (t^{n^2},nv)$ de $G(V)$. Soit $\bar{L}$ l'espace vectoriel $L/2L$ sur le corps $\mathbb{F}_2$ à deux éléments et soit $\bar{\lambda}$ la classe de $\lambda \in L$ modulo $2L$; la forme B induit par passage au quotient une forme bilinéaire alternée $\bar{B}$ (donc symétrique) sur $\bar{L}$ et les relèvements symétriques $\Psi_u(L)$ de L correspondent bijectivement aux formes quadratiques $\bar{q}$ sur $\bar{L}$ associées à la forme bilinéaire symétrique $\bar{B}$: il suffit de poser $u(\lambda) = (-1)^{\bar{q}(\bar{\lambda})}$. On dit que le relèvement symétrique $\Psi_u(L)$ est de <u>première</u> ou de <u>seconde espèce</u> selon que l'invariant d'Arf de la forme quadratique $\bar{q}$ est égal à 0 ou 1 .

Les relèvements symétriques de première espèce Γ de L peuvent aussi se décrire ainsi : on choisit une décomposition $V = W \oplus W'$ avec W et W' isotropes de dimension g telle que $L = P \oplus P'$ avec $P = L \cap W$ et $P' = L \cap W'$, et l'on pose $\Gamma = \sigma(P)\sigma(P')$; on a alors

(5) $$u(p + p') = (-1)^{\langle p,p' \rangle} \quad \text{pour } p \in P \text{ et } p' \in P' .$$

2. <u>Représentations unitaires de</u> $G(V)$.

On a tout d'abord le théorème de von Neumann et Stone : <u>il existe, à une équivalence près, une représentation unitaire irréductible</u> $(U_g, \mathcal{H})$ <u>et une seule de</u> $G(V)$ <u>telle que</u> $U_t = t.I$ <u>pour</u> $t \in \mathbf{T}$. Mais tout l'intérêt du jeu provient de ce qu'on peut donner au moins trois constructions différentes d'une telle représentation.

a) <u>Représentation de Schrödinger</u> :

Soit $V = W \oplus W'$ une décomposition en sous-espaces isotropes de dimension g . On fait opérer le groupe $G(V)$ sur l'espace de Hilbert $L^2(W)$ des fonctions de carré intégrable sur W par

(6) $$(U_g f)(x) = t f(x+w)\underset{\sim}{e}(\langle x,w'\rangle)\underset{\sim}{e}(\langle w,w'\rangle)$$

pour $g = t.\sigma(w).\sigma(w')$.

b) Représentation latticielle :

Choisissons un réseau principal L dans V et un relèvement $\Gamma = \Psi_u(L)$ de L dans $G(V)$. On considère la représentation de $G(V)$ induite par le caractère unitaire $t.\gamma \mapsto t$ de $\mathbf{T}.\Gamma$; la correspondance $f \rightleftarrows \Phi$ exprimée par la formule $f(t.\sigma(v)) = t\Phi(v)$ permet de considérer que la représentation latticielle a lieu dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{D}_{L,u}$ des fonctions Φ sur V de carré intégrable modulo L telles que

(7) $$\Phi(x+\lambda) = u(\lambda)\underset{\sim}{e}(\tfrac{1}{2}B(x,\lambda))\Phi(x) \qquad (x \in V\ ,\ \lambda \in L).$$

Le groupe $G(V)$ agit par

(8) $$(T_g\Phi)(x) = t.\underset{\sim}{e}(\tfrac{1}{2}B(x,v)).\Phi(v+x)$$

pour $g = t.\sigma(v)$.

On peut aussi considérer les distributions sur V solutions de l'équation fonctionnelle (7) et étendre la définition de T_g à ces distributions. On peut montrer qu'il existe, à un scalaire près, une seule distribution Π_u satisfaisant à (7) et telle que $T_\gamma \Pi_u = \Pi_u$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On a $\Pi_u(x) = \sum_{\lambda \in L} u(\lambda).\delta(x-\lambda)$ avec la notation δ de Dirac. Utilisant l'unicité des représentations unitaires irréductibles de $G(V)$, on en déduit que pour une telle représentation $(U_g, \mathcal{H})$ il existe un "vecteur-distribution" Π et un seul tel que $U_\gamma.\Pi = \Pi$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. En particulier, supposons que $\Gamma = \sigma(P)\sigma(P')$ soit un relèvement symétrique de première espèce de L , avec $L = P \oplus P'$, $V = W \oplus W'$, $P \subset W$, $P' \subset W'$ et que la représentation soit la représentation de Schrödinger. Alors Π est la distribution de Poisson sur W , i.e. $\Pi(w) = \sum_{\lambda \in P} \delta(w-\lambda)$.

c) Représentation de Fock :

Soit J un automorphisme de V tel que $J^2 = -I$; on suppose de plus que l'on a

(9) $$B(Jv,Jv') = B(v,v') ,$$

(10) $$B(v,Jv) > 0 \qquad \text{lorsque } v \neq 0 .$$

On note V_J l'espace vectoriel complexe ayant V pour espace réel sous-jacent et J pour opérateur de multiplication par i. On définit sur V_J une forme hermitienne définie positive par

(11) $$H(v,v') = B(v,Jv') + iB(v,v') .$$

Soient V_c l'espace vectoriel complexifié de V et B_c l'extension de B à V_c ; le groupe $G_c(V)$ est défini comme $G(V)$, mais les éléments en sont les paires (t,v) avec $t \neq 0$ complexe et v dans V_c ; on plonge le groupe de Lie réel $G(V)$ dans le groupe de Lie complexe $G_c(V)$. Les éléments de la forme $(1,v + iJv)$ (avec $v \in V$) constituent un sous-groupe de Lie complexe H de $G_c(V)$ et l'on définit un caractère complexe χ de $\mathbb{T}.H$ par $\chi(t,v + iJv) = t$. La représentation holomorphe de $G_c(V)$ induite par le caractère χ de H a une restriction unitaire à $G(V)$; c'est la représentation de Fock de $G(V)$. Utilisant la correspondance $f \rightleftarrows \Phi$ définie par $\Phi(v) = e^{\frac{\pi}{2}H(v,v)} f(\sigma(v))$, on identifie l'espace de la représentation de Fock à celui des fonctions holomorphes Φ sur V_J telles que

(12) $$\int_V e^{-\pi H(x,x)} |\Phi(x)|^2 \, dx < \infty$$

et le groupe $G(V)$ agit par

(13) $$S_g\Phi(x) = te^{-\pi[H(v,x) + \frac{1}{2} H(v,v)]}\Phi(x + v)$$

pour $g = t.\sigma(v)$.

3. Fonctions théta et variétés abéliennes.

On suppose maintenant donnés :

- l'espace vectoriel réel V et la forme bilinéaire alternée B ;
- un réseau principal L de V ;
- un opérateur J dans V satisfaisant aux relations (9) et (10).

Le quotient $A_L = V_J/L$ est une variété abélienne et la forme B est une forme de Riemann, définissant une polarisation de la classe principale sur A_L.

Si u est une application de L dans $\mathbb{T}$ satisfaisant à

$$u(\lambda + \lambda') = u(\lambda).u(\lambda')(-1)^{B(\lambda,\lambda')} \tag{4}$$

on lui fait correspondre comme suit un fibré vectoriel D_u sur A_L : tout d'abord on fait agir le groupe $G(V)$ sur la variété complexe $V_J \times \mathbb{C}$ par

$$g.(x,z) = (x + v, zte^{\pi[H(v,x) + \frac{1}{2} H(v,v)]}) , \tag{14}$$

pour $g = t.\sigma(v)$. On pose alors $D_u = (V_J \times \mathbb{C})/\Psi_u(L)$ avec la projection évidente sur $A_L = V_J/L$. De plus, la fonction $h(x,z) = |z|^2 e^{-\pi H(x,x)}$ est une métrique hermitienne sur le fibré trivial $V_J \times \mathbb{C}$ de base V_J, invariante par $G(V)$, et elle définit par passage au quotient une métrique hermitienne η_u sur D_u. La forme de courbure de η_u est la forme différentielle Ω de degré 2 invariante par translations sur A_L qui correspond à B. On obtient ainsi une fois et une seule tous les fibrés vectoriels de rang 1 sur A_L, dont la classe de Chern est égale à Ω.

Si l'on utilise l'unicité d'un vecteur-distribution invariant par $\Psi_u(L)$ dans la représentation de Fock, on aboutit à l'existence et l'unicité, à un scalaire près d'une fonction holomorphe Θ sur V_J satisfaisant aux relations :

a) La fonction $x \mapsto e^{-\pi H(x,x)}|\Theta(x)|^2$ est à croissance polynomiale sur V ;

b) On a l'équation fonctionnelle

$$\Theta(x + \lambda) = \Theta(x)u(\lambda)e^{\pi[H(\lambda,x) + \frac{1}{2} H(\lambda,\lambda)]} \tag{15}$$

pour $x \in V_J$ et $\lambda \in L$.

Il n'est d'ailleurs pas difficile de montrer que (15) entraîne que la fonction continue $x \mapsto e^{-\pi H(x,x)}|\Theta(x)|^2$ est invariante par L, donc bornée sur V, ce qui dispense de postuler a). On peut voir par ailleurs que les solutions holomorphes de l'équation (15) correspondent aux sections holomorphes du fibré D_u.

On obtient facilement un développement en série de Θ dans le cas où $L = P \oplus P'$, $V = W \oplus W'$ et $u(p + p') = (-1)^{\langle p,p'\rangle}$ sont comme à la fin du n° 1. Soient W_c le complexifié de W et φ la bijection de W_c sur V définie par $\varphi(w + iw_1) = w + Jw_1$. On note $\tau : W' \to W_c$ la restriction de φ^{-1} à W' ; on pose ensuite $\tau(w') = \tau_1(w') + i\tau_2(w')$ où τ_1 et τ_2 sont des applications linéaires réelles de W' dans W, et $\beta : W \to W'$ est l'inverse de τ_2 ; l'accouplement de W et W' défini par $\langle w,w'\rangle = B(w,w')$ est étendu par linéarité en une forme bilinéaire complexe sur $W_c \times W'_c$. Avec ces notations, on a

$$\Theta(\varphi(z)) = e^{\frac{\pi}{2}\langle z,\beta z\rangle} \sum_{n'\in P'} \underline{e}(\tfrac{1}{2}\langle \tau n',n'\rangle + \langle z,n'\rangle) . \tag{16}$$

Enfin, on a la <u>relation quartique de Riemann</u> qui jouera un rôle important dans la suite

$$\prod_{i=1}^{4} \Theta(x_i) = 2^{-g} \sum_{\eta\in L \bmod 2L} e^{-\pi[H(\frac{\eta}{2},y) + \frac{1}{2}H(\frac{\eta}{2},\frac{\eta}{2})]} \prod_{i=1}^{4} \Theta(x_i + y + \tfrac{\eta}{2}) \tag{17}$$

avec $y = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Cette formule s'obtient en démontrant que le second membre $Z(x_1,x_2,x_3,x_4)$ est une fonction thêta sur $V_J \times V_J \times V_J \times V_J$ par rapport au réseau $L \times L \times L \times L$ et en utilisant l'unicité des fonctions thêta.

§ 2. Fonctions thêta ℓ-adiques.

On note ℓ un nombre premier, $\mathbf{Q}_\ell$ le corps des nombres ℓ-adiques et $\mathbf{Z}_\ell$ l'anneau des entiers ℓ-adiques. Par ailleurs, k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq \ell$; il existe une fonction $\underset{\sim}{e}_\ell$ sur $\mathbf{Q}_\ell$ à valeurs dans k, telle que $\underset{\sim}{e}_\ell(a+b) = \underset{\sim}{e}_\ell(a)\underset{\sim}{e}_\ell(b)$ et $\underset{\sim}{e}_\ell(a) = 1 \Longleftrightarrow a \in \mathbf{Z}_\ell$.

4. Définition des fonctions thêta.

On considère un espace vectoriel $V_\ell = V$ de dimension finie $2g$ sur $\mathbf{Q}_\ell$, et une forme bilinéaire alternée $B_\ell = B$ sur V_ℓ . On peut reprendre les constructions du n° 1 dans le cas ℓ-adique ; notons seulement que $G_\ell(V)$ se compose des paires (t,v) avec $t \neq 0$ dans k et $v \in V$ et que la multiplication est donnée par

$$(t,v)(t',v') = (tt'.\underset{\sim}{e}_\ell(\tfrac{1}{2}B(v,v')), v+v') .$$

On définit de manière évidente un réseau $L_\ell = L$ dans V , un relèvement, etc...

Soit L un réseau principal dans V et soit u une application de L dans $\{1,-1\}$ telle que

$$u(\lambda+\lambda') = u(\lambda)u(\lambda')\underset{\sim}{e}_\ell(\tfrac{1}{2}B(\lambda,\lambda')) ,$$

définissant un relèvement $\Gamma = \Psi_u(L)$ de première espèce de L .

DÉFINITION 1.- On appelle fonction thêta sur V (par rapport à B et L) une application $\Theta : V \to k$ satisfaisant aux relations :

(18) $$\Theta(x+\lambda) = u(\lambda)\underset{\sim}{e}_\ell(\tfrac{1}{2}B(\lambda,x))\Theta(x) \qquad \text{pour } x \in V ,\ \lambda \in L$$

(19) $$\Theta(-x) = \Theta(x)$$

(20) $$\prod_{i=1}^{4} \Theta(x_i) = 2^{-g} \sum_{\eta \in L \bmod 2L} \underset{\sim}{e}_\ell(\tfrac{1}{2}B(y,\eta)) \prod_{i=1}^{4} \Theta(x_i + y + \eta)$$

avec $y = -\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4)$.

<u>Remarques</u>.- 1) Lorsque $\ell \neq 2$, on a nécessairement $u = 1$ et la formule (20) se simplifie en $\prod_{i=1}^{4} \Theta(x_i) = \prod_{i=1}^{4} \Theta(x_i + y)$. En fait, les fonctions théta sont surtout intéressantes dans le cas 2-adique, ou alors il conviendrait de les définir dans le cas adélique.

2) Reprenons les notations du n° 3 et désignons par T le sous-espace rationnel de V engendré par L ; on pose $V_\ell = T \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ et l'on note L_ℓ l'adhérence de L dans V_ℓ ; enfin on pose $\Lambda = \bigcup_{i \geq 0} \ell^{-i} L$. On considérera Λ comme plongé à la fois dans V et dans V_ℓ . La relation $e^{-\frac{\pi}{2} H(\xi,\xi)} \Theta_h(\xi) = \Theta_a(\xi)$ pour tout $\xi \in \Lambda$ établit une bijection de l'ensemble des fonctions théta holomorphes Θ_h sur V_J sur celui des fonctions théta ℓ-adiques Θ_a sur V_ℓ . Cette correspondance est encore plus simple à décrire dans le cadre adélique.

3) Supposons $\ell = 2$. Soit Θ une fonction théta et soit Σ l'ensemble des points où ne s'annule pas Θ . Il existe un sous-espace vectoriel V' de V tel que $\Sigma + \frac{1}{2} L = V' + \frac{1}{2} L$ (assez difficile). On dit que Θ est <u>non dégénérée</u> si $V' = V$, i.e. $V = \Sigma + \frac{1}{2} L$. Comme deux sous-groupes de torsion divisibles de même socle fini sont égaux, Θ est non dégénérée si et seulement si pour tout λ dans L , il existe $\mu \in L$ avec $\Theta(\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{2}) \neq 0$.

5. <u>Mesures gaussiennes</u>.

DÉFINITION 2.- <u>Soit</u> G <u>un groupe topologique commutatif</u>. <u>On dit qu'une mesure</u> μ <u>sur</u> G <u>est gaussienne si elle est non nulle</u>, <u>invariante par la symétrie</u> $x \mapsto -x$ <u>et s'il existe une mesure</u> ν <u>sur</u> G <u>telle que l'application</u> $\xi : (x,y) \mapsto (x + y, x - y)$ <u>transforme</u> $\mu \otimes \mu$ <u>en</u> $\nu \otimes \nu$.

Lorsque $G = \mathbb{R}$, un théorème classique du calcul des probabilités (cf. Feller, t. II, p. 77) assure qu'une mesure gaussienne est, soit ponctuelle, soit définie par une densité e^{ax^2+c} . Dans le cas qui nous occupe, il faut définir une mesure sur V à coefficients dans k : c'est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions localement constantes à support compact $f : V \to k$.

Nous considérons le cas des mesures gaussiennes sur un espace vectoriel W de dimension finie g sur le corps 2-adique. Choisissons un réseau P dans W . La donnée d'une mesure μ sur W équivaut à celle des éléments $x_{n,\alpha} = \mu(2^{-n}\alpha)$ de k pour $n \geq 0$ et α dans $P/2^{2n}P$, assujettis aux relations de compatibilité

$$(21)_n \qquad x_{n,\bar{\alpha}} = \sum_{\eta \in P/2P} x_{n+1,2\alpha+2^{2n+1}\eta} \qquad (\alpha \in P/2^{2n+1}P \ , \ \bar{\alpha} = \alpha + 2^{2n}P) \ .$$

Soient α et β dans $P/2^{2n}P$; on note $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ les images canoniques de α et β dans $P/2^{2n-1}P$; alors la mesure $\mu \otimes \mu$ associe à l'ensemble $\xi^{-1}(\bar{\alpha} \times \bar{\beta})$ la masse

$$(22)_n \qquad z_{n,\alpha,\beta} = \sum_{\eta \in P/2P} x_{n,\alpha+\beta+2^{2n-1}\eta} \cdot x_{n,\alpha-\beta+2^{2n-1}\eta} \ .$$

Pour qu'il existe une mesure ν sur W telle que $\xi(\mu \otimes \mu) = \nu \otimes \nu$, il faut et il suffit qu'il existe des éléments $y_{n,\alpha}$ de k tels que $z_{n,\alpha,\beta} = y_{n,\alpha} \cdot y_{n,\beta}$, ce qui équivaut aux relations quadratiques

$$(23)_n \qquad z_{n,\alpha,\beta} \cdot z_{n,\gamma,\delta} = z_{n,\alpha,\gamma} \, z_{n,\beta,\delta} \ .$$

Enfin μ est symétrique si et seulement si l'on a

$$(24)_n \qquad x_{n,\alpha} = x_{n,-\alpha} \ .$$

Faisons $W = \mathbb{Q}_2^g$ et $P = \mathbb{Z}_2^g$. Dans l'espace projectif de dimension $2^{2ng} - 1$, les équations homogènes $(23)_n$ et $(24)_n$ définissent un schéma fermé $\bar{\mathcal{A}}_n$ et les relations $(21)_n$ définissent des morphismes <u>finis</u> $h_n : \bar{\mathcal{A}}_{n+1} \to \bar{\mathcal{A}}_n$. On a donc un système projectif de schémas

$$\bar{\mathcal{A}}_1 \xleftarrow{h_1} \bar{\mathcal{A}}_2 \xleftarrow{h_2} \bar{\mathcal{A}}_3 \xleftarrow{h_3} \cdots \leftarrow \bar{\mathcal{A}}_n \xleftarrow{h_n} \bar{\mathcal{A}}_{n+1} \leftarrow \cdots$$

dont la limite projective sera notée $\bar{\mathcal{A}}_\infty$. Les points rationnels de $\bar{\mathcal{A}}_\infty$ sur un corps k sont les mesures gaussiennes sur $\mathbb{Q}_2^g$, à multiplication près par un scalaire.

Exemple : $W = \mathbb{Q}_2$, $n = 1$, le corps k est de caractéristique $\neq 2$; avec $x = x_{1,0}$, $y = x_{1,2}$ et $z = x_{1,1} = x_{1,-1}$, le schéma $\bar{\mathcal{A}}_1$ est défini dans le plan projectif par l'équation $2z^4 = xy(x^2 + y^2)$. Si l'on introduit les nouvelles coordonnées $\theta_{00} = x + y$, $\theta_{01} = 2z$, $\theta_{10} = x - y$, l'équation prend la forme de Jacobi $\theta_{00}^4 = \theta_{01}^4 + \theta_{10}^4$.

6. Représentations de $G_\ell(V)$.

Soit $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions localement constantes sur V (les valeurs sont dans k). Pour $v \in V$ et $f \in \mathcal{D}$, on pose

$$f_{[v]}(x) = e_\ell(\tfrac{1}{2} B(x,v)) f(x + v) .$$

On définit une représentation de $G_\ell(V)$ dans $\mathcal{D}$ par $T_{(t,v)} f = t . f_{[v]}$. Les notations étant celles du n° 4, l'équation (18) s'écrit $T_\gamma \Theta = \Theta$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, condition que nous postulons désormais. On peut alors montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_\Theta$ de $\mathcal{D}$ engendré par les fonctions $\Theta_{[v]}$ est le siège d'une représentation irréductible de $G_\ell(V)$.

Par ailleurs, on peut définir la représentation de Schrödinger $(U_g, \mathcal{S}(W))$ pour toute décomposition $V = W \oplus W'$ avec W et W' isotropes ; elle opère dans l'espace des fonctions localement constantes à support compact dans W par la formule (6) où l'on remplace e par e_ℓ. Elle est aussi irréductible.

Les deux représentations (algébriquement) irréductibles $(T_g, \mathcal{D}_\Theta)$ et $(U_g, \mathcal{S}(W))$ ont en commun les propriétés :

a) Pour tout $t \in k$ non nul, $(t,0)$ agit par l'homothétie de rapport t .

b) Le stabilisateur de tout vecteur de l'espace de la représentation est un sous-groupe ouvert de $G_\ell(V)$.

D'après une variante du théorème de Stone-von Neumann, il existe alors un isomorphisme $h : \mathcal{S}(W) \to \mathcal{D}_\Theta$ tel que $T_g \circ h = h \circ U_g$ pour tout $g \in G_\ell(V)$. Choisissons W et W' de sorte que l'on ait $L = P \oplus P'$ avec $P \subset W$, $P' \subset W'$ et que u soit égale à 1 sur P et P' . La fonction caractéristique φ_P de P est à un scalaire près l'unique élément de $\mathcal{S}(W)$ invariant par U_γ pour $\gamma \in \Gamma$ et l'on peut normaliser h par $h(\varphi_P) = \Theta$. Si μ est la mesure sur W définie par $\mu(f) = h(f)(0)$, on a $h(f)(x) = h(f)_{[x]}(0) = \mu(U_{\sigma(x)}(f))$, soit explicitement

$$h(f)(w + w') = \underset{\sim}{e}_\ell(\tfrac{1}{2} B(w,w')) \int_W f(w_1 + w)\underset{\sim}{e}_\ell(B(w_1,w'))\, d\mu(w_1) . \tag{25}$$

On en déduit

$$\Theta(w + w') = \underset{\sim}{e}_\ell(\tfrac{1}{2} B(w,w')) \int_{w+P} \underset{\sim}{e}_\ell(B(w,n))\, d\mu(n) . \tag{26}$$

Ceci étant, on peut montrer que la formule (26) définit une bijection de l'ensemble des fonctions théta sur V (par rapport à B et L) sur l'ensemble des mesures gaussiennes sur W .

Remarque.- 4) Avec les notations de la fin du n° 3 et de la remarque 2) du n° 4, la mesure gaussienne associée à la fonction théta 2-adique Θ_a est la mesure discrète attribuant la masse $\underset{\sim}{e}(\tfrac{1}{2} \langle \tau n,n\rangle)$ à tout point n de $\bigcup_{i\geq 0} 2^{-i}L$.

Les valeurs de Θ aux points du réseau $\frac{1}{4} L$ sont des combinaisons linéaires des mesures $\mu(\frac{1}{4}\alpha)$ avec $\alpha \in P/16P$. Compte tenu de la remarque 3) du n° 4, on peut définir explicitement un ouvert de Zariski $\mathcal{A}_2$ du schéma $\overline{\mathcal{A}}_2$, l'image réciproque $\mathcal{A}_n$ de $\mathcal{A}_2$ dans $\overline{\mathcal{A}}_n$ et(*) $\mathcal{A}_\infty$ de $\mathcal{A}_2$ dans $\overline{\mathcal{A}}_\infty$, de sorte que la formule (26) définisse une <u>bijection de l'ensemble des fonctions thêta non dégénérées sur</u> V (pour B et L) (à un scalaire près) <u>sur l'ensemble des points de</u> $\mathcal{A}_\infty$ <u>rationnels sur</u> k.

7. <u>Modules des variétés abéliennes</u>.

Pour achever de décrire la construction du schéma des modules des variétés abéliennes, il reste à montrer comment les fonctions thêta 2-adiques se relient aux variétés abéliennes polarisées. Nous nous placerons sur un corps k de caractéristique $p \neq 2$, mais Mumford montre que l'on obtient un schéma de modules sur l'anneau engendré sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ par les racines de l'unité d'ordre une puissance de 2. Il n'est pas question de montrer ici que la construction donnée a les propriétés universelles requises.

a) Supposons $\ell = 2$; soit Θ une fonction thêta non dégénérée sur V. Soit M_Θ l'espace vectoriel de dimension 2^{2g} engendré par les fonctions $\Theta_{[\alpha/2]}$ pour $\alpha \in L$, et soit $\mathcal{S}_n(M_\Theta) = \mathcal{S}_n$ l'espace engendré par les produits de n éléments de M_Θ ; la formule $T_{(t,0)}\Theta = t.\Theta$ permet de montrer par un argument de valeurs propres que la somme $\mathcal{S}_\Theta$ des $\mathcal{S}_n$ pour $n \geq 0$ est directe. L'algèbre graduée de type fini $\mathcal{S}_\Theta$ définit un schéma projectif A_Θ, et comme les éléments de $\mathcal{S}$ sont des fonctions sur V, on définit facilement une application de V dans l'ensemble des points de A_Θ rationnels sur k.

Il est immédiat que l'algèbre $\mathcal{S}$ est sans éléments nilpotents, moins clair qu'elle est intègre. On démontre ensuite que $\mathcal{S}_{2^n}$ est l'espace engendré par les

(*) l'image réciproque

fonctions de la forme $\Theta_{[\alpha/2^{n+1}]}(2^n x)$ pour $\alpha \in L$. Ceci permet de démontrer facilement que $\mathcal{f}_{2^n}$ est de dimension $2^{2g(n+1)}$. De là, on déduit que le polynôme de Hilbert du schéma projectif A_Θ est égal à $(4t)^g$, puis que A_Θ est une variété abélienne de dimension g . Le fibré en droites canonique sur le schéma projectif A_Θ définit une polarisation de la série principale.

b) Inversement, soit A une variété abélienne munie d'une polarisation de la classe principale. On choisit dans la polarisation un fibré symétrique D (i.e. invariant par l'application $x \mapsto -x$ de A). On définit ensuite le schéma en groupes $\hat{A}_\ell$ limite projective du système (A_n, d_n) avec $A_n = A$ et $d_n(x) = \ell x$ pour tout entier $n \geq 0$. On note $\hat{D}$ le fibré sur $\hat{A}_\ell$ image réciproque de D par la projection de $\hat{A}_\ell$ sur $A_0 = A$. Le caractère symétrique de D permet de définir un automorphisme ρ du schéma $\hat{D}$ compatible avec la symétrie $x \mapsto -x$ de $\hat{A}_\ell$.

D'après les théorèmes connus de Weil, la composante ℓ-primaire de torsion de $\hat{A}_\ell$ est un espace vectoriel ℓ-adique V de dimension $2g$. On note ensuite $\mathcal{G}_\ell(\hat{D})$ le groupe des automorphismes φ du schéma $\hat{D}$ pour lesquels il existe $v \in V$ tel que φ soit un isomorphisme de $\hat{D}$ avec l'image réciproque $T_v^*(\hat{D})$ de $\hat{D}$ (on note T_v la translation $x \mapsto x + v$). L'application $\pi : \mathcal{G}(\hat{D}) \to V$ définie par $\pi(\varphi) = v$ est un homomorphisme. Il existe alors sur V une forme bilinéaire non dégénérée B et un relèvement $\hat{\sigma}$ de V dans $\mathcal{G}(\hat{D})$ caractérisés par $\hat{\sigma}(-v) = \rho\hat{\sigma}(v)\rho^{-1}$ et le fait que $(t,v) \mapsto t.\hat{\sigma}(v)$ soit un isomorphisme de $G_\ell(V)$ sur $\mathcal{G}_\ell(\hat{D})$. On choisit un isomorphisme de la fibre de $\hat{D}$ au-dessus de 0 avec k et à toute section s de $\hat{D}$ sur $\hat{A}_\ell$ on fait correspondre la fonction Θ_s sur V définie par $\Theta_s(v) =$ valeur en 0 de la section transformée de s par $\hat{\sigma}(v)$. En particulier l'unique section de D définit une section de $\hat{D}$ sur $\hat{A}_\ell$, puis une fonction Θ sur V (à un scalaire près).

Lorsque $\ell = 2$, cette construction est inverse de la précédente.

En conclusion, on a indiqué une construction explicite de schémas $\mathcal{A}_n$ quasi-projectifs, les points de $\mathcal{A}_n$ rationnels sur k classant les variétés abéliennes polarisées de la série principale convenablement rigidifiées (par exemple $\mathcal{M}_\infty$ correspond à la rigidification obtenue en choisissant une base du module de Tate).

RÉFÉRENCES

La première partie est basée sur le travail

P. CARTIER - Quantum mechanical commutation relations and theta functions, Symposium on Algebraic groups and discontinuous subgroups, p. 361-383, A. M. S. 1966,

qui explicite un certain nombre de constructions faites par

A. WEIL - Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math. 113 (1964), p. 143-211.

La deuxième partie est basée sur le mémoire très riche :

D. MUMFORD - On the equations defining abelian varieties, Inventiones Math. I, vol. 1 (1966), p. 287-354 ; II, vol. 3 (1967), p. 75-135 et III, vol. 3 (1967), p. 215-244.

En particulier, Mumford fait une étude approfondie des "niveaux finis" de la variété des modules. Dans le cas complexe, ces niveaux correspondent aux quotients $\mathfrak{H}_g/\Gamma$

où $\mathcal{H}_g$ est le domaine de Siegel et Γ un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire de Siegel. Les résultats de Mumford sont une généralisation, une précision et une algébrisation des théorèmes que l'on trouve dans

J. I. IGUSA - On the graded ring of theta constants, Amer. Journ. of Maths, 86 (1964), p. 219-245.

Samuel a exposé ce dernier travail au Séminaire Bourbaki de février 1964.