HENRI CARTAN

Travaux de Karoubi sur la K-théorie

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. nº 337, p. 391-415
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__391_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967/68, n° 337 Février 1968

TRAVAUX DE KAROUBI [6] SUR LA K-THÉORIE

par Henri CARTAN

0. Introduction.

La K-théorie classique (Atiyah-Hirzebruch [4]) concerne les fibrés vectoriels réels (KO-théorie), resp. complexes (KU-théorie). Il y a aussi une K-théorie équivariante [5], une KR-théorie ...

Dans chacune de ces théories, on attache à chaque paire (X,Y) d'espaces compacts $Y \subset X$ une suite de groupes abéliens $K^n(X,Y)$ (n entier ≥ 0 ou ≤ 0), foncteurs contravariants de (X,Y), et une suite exacte

$$(0,1) \qquad \ldots \to K^n(X,Y) \to K^n(X) \to K^n(Y) \xrightarrow{\partial} K^{n+1}(X,Y) \to \ldots ,$$

où $K^n(X)$ désigne $K^n(X,\emptyset)$. De plus $K^o(X)$ est le groupe de Grothendieck $K(X)$ de la catégorie envisagée ; par exemple, dans le cas classique, il s'agit de la catégorie des fibrés vectoriels (localement triviaux, de rang fini) de base X. Quant à $K^o(X,Y)$, il est défini à partir du monoïde des classes d'objets

$$(E_o, E_1 ; \alpha)$$

où E_o et E_1 sont des fibrés de base X, et α est un isomorphisme de leurs restrictions à Y.

La suite exacte (0,1) définit une théorie de la cohomologie ("cohomologie extraordinaire") qui satisfait aux axiomes d'Eilenberg-Steenrod sauf l' "axiome de dimension".

En outre, on a un isomorphisme canonique de la suite (0,1) sur elle-même, qui envoie $K^n(X,Y)$ sur $K^{n+2}(X,Y)$ dans le cas des fibrés vectoriels sur $\mathbb{C}$, sur $K^{n+8}(X,Y)$ dans le cas des fibrés vectoriels sur $\mathbb{R}$: périodicité de BOTT, formulée en termes de K-théorie par ATIYAH [2].

Un inconvénient de ces théories est qu'elles ne donnent pas de définition directe de $K^n(X)$ pour $n > 0$; on définit, pour $n \leq 0$, les K^n relatifs au moyen de la suspension :

$$\begin{cases} K^{-n}(X,pt) = K(S^n(X),pt) & \text{pour } n \geq 0 , \\ K^{-n}(X,Y) = K^{-n}(X/Y,pt) , \end{cases}$$

où X/Y désigne le quotient de K par identification en un seul des points de Y . Puis on doit utiliser la périodicité de Bott pour définir K^n pour $n > 0$.

Par ailleurs, le rôle des algèbres de Clifford en K-théorie avait été mis en évidence (ATIYAH, BOTT, SHAPIRO [3]), sans que cela permette pour autant d'éviter de prouver d'abord la périodicité de Bott. Enfin, R. WOOD [7] avait montré que les théorèmes de périodicité sont valables dans un cadre plus général, comme conséquence d'un théorème sur les algèbres de Banach munies d'une involution.

M. KAROUBI reprend toute la question : il définit directement les groupes $K^n(X,Y)$ à l'aide des algèbres de Clifford, aussi bien pour $n \geq 0$ que pour $n \leq 0$; la périodicité est alors immédiate ; il reste alors à définir l'homomorphisme $K^n(Y) \to K^{n+1}(X,Y)$ et à prouver l'exactitude de la suite (0,1). Ceci se fait à l'aide d'un isomorphisme auxiliaire (prouvé grâce au théorème de WOOD), cas particulier d'un isomorphisme plus général qu'on peut considérer comme la vraie généralisation du théorème de Thom-Gysin pour la K-théorie.

En fait, la théorie de Karoubi s'applique dans un cadre plus large que celui des fibrés vectoriels, qui englobe tous les cas connus jusqu'ici, et conduit à de nouveaux résultats. Ce cadre plus large, celui des "catégories de Banach", met en lumière le rôle des algèbres de Banach.

1. Catégories de Banach.

Comme on le sait, une "catégorie additive" est une catégorie $\underline{C}$ dans laquelle l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(E,F)$ des morphismes $E \to F$ est muni d'une structure de groupe commutatif, de telle manière que la composition des morphismes soit bilinéaire. On suppose en outre l'existence des sommes directes finies.

Une catégorie prébanachique $\underline{C}$ sera une catégorie additive dans laquelle $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(E,F)$ est en outre muni d'une structure d'espace de Banach de façon que la composition des morphismes soit bilinéaire continue. Il peut s'agir soit d'espaces de Banach sur $\mathbb{R}$, soit sur $\mathbb{C}$. (On appelle ici espace de Banach un espace "banachisable", c'est-à-dire un EVT complet dont la topologie soit définissable par une norme.) Dans une catégorie prébanachique, $\mathrm{End}(E)$ est une algèbre de Banach, pour tout objet E ; et $\mathrm{Aut}(E)$ est un groupe topologique, à savoir l'ouvert des éléments inversibles de $\mathrm{End}(E)$.

DÉFINITION.- Une <u>catégorie de Banach</u> est une catégorie prébanachique $\underline{C}$ qui satisfait à la condition suivante :

(P) Tout projecteur $p : E \to E$ (c'est-à-dire tout élément de $\mathrm{End}\, E$ tel que $p^2 = p$) possède un noyau (au sens des catégories), donc aussi une image : il définit une décomposition directe de l'objet E.

<u>Exemples</u>.- (0) La catégorie des espaces vectoriels réels (resp. complexes) de dimension finie.

(1) Si A est une algèbre de Banach donnée, la catégorie $\underline{L}(A)$ des A-modules

libres de base finie est prébanachique ; la catégorie $\underline{P}(A)$ des modules projectifs de type fini est une catégorie de Banach. Pour $A = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on retrouve l'exemple (0).

(2) Soit donné un espace compact X . La catégorie $\underline{E}(X)$ des fibrés vectoriels réels (resp. complexes) localement triviaux de base X est une catégorie de Banach : penser que $\mathrm{Hom}(E,F)$ s'identifie à l'espace vectoriel des sections du fibré $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$. D'ailleurs cette catégorie $\underline{E}(X)$ est équivalente à $\underline{P}(A)$, où A désigne l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues réelles (resp. complexes) sur X : ceci est une ancienne remarque due à SERRE. On notera que tout fibré vectoriel de base X est facteur direct dans un fibré trivial.

(3) Soit toujours donné un espace compact X ; soit donné en outre un groupe G opérant dans X (par homéomorphismes). La catégorie $\underline{E}_G(X)$ des fibrés vectoriels E de base X dans lesquels G opère de façon compatible avec les opérations données sur la base X , est une catégorie de Banach : en effet, $\mathrm{Hom}_G(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{Hom}(E,F)$, et le noyau de $p : E \to E$ est bien un G-fibré.

(4) Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre topologique (resp. $\mathbb{C}$-algèbre), et soit $\underline{C}$ une catégorie de Banach réelle (resp. complexe). Un A-objet de $\underline{C}$ (appelé aussi A-module) est un objet E de $\underline{C}$ muni de la donnée d'un homomorphisme continu d'algèbres

$$A \to \mathrm{End}_{\underline{C}}(E) .$$

On définit de manière évidente les A-morphismes. D'où une catégorie $\underline{C}^A$, qui est aussi une catégorie de Banach.

(5) Si $\underline{B}$ est une catégorie prébanachique, on définit aisément une catégorie de Banach $\underline{C}$ associée à $\underline{B}$, ayant une propriété universelle. La construction

"abstraite" ainsi définie est celle qui, si on l'applique aux fibrés vectoriels triviaux, donne les fibrés vectoriels localement triviaux.

(6) Soit $\underline{C}$ une catégorie de Banach, et soit X un espace compact. On définit la catégorie $\underline{C}_o(X)$ des $\underline{C}$-fibrés triviaux, comme suit : un objet de $\underline{C}_o(X)$ est simplement un objet E de $\underline{C}$ (penser à la fibre-type) ; un morphisme $E \to F$ est ici une application continue

$$X \to \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(E,F) ,$$

l'ensemble des morphismes étant muni d'une façon évidente d'une structure d'espace de Banach. Alors on définit $\underline{C}(X)$ comme la catégorie de Banach associée à $\underline{C}_o(X)$; on l'appelle la catégorie des $\underline{C}$-fibrés de base X . On peut dérouler les sorites qu'on imagine. Si X est contractile, les catégories $\underline{C}(X)$ et $\underline{C}_o(X)$ coïncident.

<u>Foncteurs banachiques</u> : Si $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ sont deux catégories de Banach, on appellera foncteur banachique $\varphi : \underline{C} \to \underline{C}'$ un foncteur covariant tel que, pour tout couple d'objets E , F de $\underline{C}$, l'application

$$\varphi \ : \ \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(E,F) \to \mathrm{Hom}_{\underline{C}'}(\varphi(E),\varphi(F))$$

soit <u>linéaire continue</u>. On ne considérera que de tels foncteurs, et on omettra souvent l'épithète "banachique".

Par exemple, si X est un espace compact et Y un sous-espace fermé, le foncteur "restriction"

$$\underline{C}(X) \to \underline{C}(Y) \qquad \text{(restriction d'un fibré)}$$

est un foncteur banachique, pour toute catégorie de Banach $\underline{C}$.

2. Groupe de Grothendieck d'un foncteur banachique.

Soit $\varphi : \underline{C} \to \underline{C}'$. On introduit le monoïde commutatif $M(\varphi)$ comme suit : considérons les triplets $(E_0, E_1; \alpha)$ formés de deux objets E_i de $\underline{C}$, et d'un isomorphisme α :

$$\alpha \in \mathrm{Isom}_{\underline{C}'}(\varphi(E_0), \varphi(E_1)) .$$

Il y a une notion évidente d'isomorphisme pour ces triplets ; alors $M(\varphi)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de triplets, muni de l'addition définie par la somme directe.

De plus, on a une notion d'homotopie : le foncteur φ définit un foncteur $\varphi(I) : \underline{C}(I) \to \underline{C}'(I)$ (où I désigne le segment $[0,1]$), d'où un monoïde $M(\varphi(I))$; on a deux homomorphismes j_0 , $j_1 : M(\varphi(I)) \to M(\varphi)$, définis par les extrémités 0 et 1 du segment I . Les deux images d'un même élément de $M(\varphi(I))$ sont dites homotopes.

Considérons, pour tout groupe abélien G , les homomorphismes $d : M(\varphi) \to G$ qui satisfont aux deux conditions suivantes :

(i) $d(E,E ; \mathrm{id}) = 0$;

(ii) les deux composés $M(\varphi(I)) \to M(\varphi) \xrightarrow{d} G$ sont égaux.

On cherche un objet universel (au sens "initial") pour ces homomorphismes : c'est le groupe de Grothendieck du monoïde $M(\varphi)$, avec relations imposées des types (i) et (ii). Ce groupe universel G existe ; on le notera $K(\varphi)$, et on l'appellera le groupe de Grothendieck du foncteur banachique φ . On prouve la relation

$$(2,1) \qquad d(E_0,E_1;\alpha) + d(E_1,E_2;\beta) = d(E_0,E_2;\beta \circ \alpha) ,$$

pour $\alpha \in \mathrm{Isom}(\varphi(E_0),\varphi(E_1))$ et $\beta \in \mathrm{Isom}(\varphi(E_1),\varphi(E_2))$.

Il est bon de savoir que, en fait, le groupe $K(\varphi)$ est le quotient du monoïde $M(\varphi)$ par la relation d'équivalence que voici : $(E_0,E_1;\alpha)$ est équivalent à $(E'_0,E'_1;\alpha')$ s'il existe des objets E et E' tels que les éléments

$$(E_0,E_1;\alpha) \oplus (E,E;\ \mathrm{id}) \quad \text{et} \quad (E'_0,E'_1;\alpha') \oplus (E',E';\ \mathrm{id})$$

soient "homotopes".

Lorsque $\underline{C}'$ est la catégorie nulle, $K(\varphi)$ se note $K(\underline{C})$: groupe de Grothendieck de la catégorie $\underline{C}$. On voit facilement que ce n'est pas autre chose que le groupe usuel, associé au monoïde des classes d'isomorphisme des objets de $\underline{C}$.

On a des homomorphismes évidents

(2,2) $$K(\varphi) \to K(\underline{C}) \to K(\underline{C}') \ ;$$

le premier associe à $d(E_0,E_1;\alpha)$ la différence $d(E_0) - d(E_1)$, en notant $d(E)$ l'image, dans $K(\underline{C})$, d'un objet E de $\underline{C}$. Il est immédiat que la suite (2,2) est <u>exacte</u>.

<u>Exemple</u>.- Soit $\underline{C}$ une catégorie de Banach, et soit X un espace compact. Le groupe K de la catégorie $\underline{C}(X)$ des $\underline{C}$-fibrés de base X se note $K(X;\underline{C})$, ou simplement $K(X)$ lorsqu'il n'y a pas de doute au sujet de la catégorie $\underline{C}$. Si Y est un sous-espace fermé de X , on note $K(X,Y;\underline{C})$, ou simplement $K(X,Y)$, le groupe $K(\varphi)$, où φ désigne le foncteur restriction $\underline{C}(X) \to \underline{C}(Y)$.

3. <u>Rôle des algèbres de Clifford</u>.

Soit V un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie ; et soit Q une forme quadratique <u>non dégénérée</u> sur V , de type (p,q) (i.e. : Q s'écrit comme somme de p carrés négatifs et de q carrés positifs). Notons $C_Q(V)$ l'algèbre de Clifford, qui est engendrée par 1 et les vecteurs de V .

Rappelons que si V a une $\mathbb{R}$-base (resp. une $\mathbb{C}$-base) formée de vecteurs $e_1, \dots, e_{p+q}$, tels que

$$\begin{cases} Q(e_i) = -1 & \text{pour } 1 \leq i \leq p , \\ Q(e_i) = +1 & \text{pour } p+1 \leq i \leq p+q , \end{cases}$$

l'algèbre $C_Q(V)$ a une base formée des produits $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ (avec $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $0 \leq k \leq p+q$) ; elle est engendrée par les e_i et 1 , avec les relations

$$(3,1) \qquad (e_i)^2 = -1 \text{ pour } 1 \leq i \leq p , \quad (e_i)^2 = +1 \text{ pour } i > p ,$$

$$(3,2) \qquad e_i e_j + e_j e_i = 0 \text{ pour } i \neq j .$$

On notera $C_{p,q}$ cette algèbre ; s'il le faut, on précisera $C_{p,q}(\mathbb{R})$ ou $C_{p,q}(\mathbb{C})$. Rappelons qu'elle est $\mathbb{Z}_2$-graduée, les éléments e_i étant de degré un ; et on a un isomorphisme canonique

$$(3,3) \qquad C_{p,q} \approx C_{p,o} \hat{\otimes} C_{o,q}$$ (où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel pour les algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées).

On a des isomorphismes

$$(3,4) \qquad C_{o,1}(\mathbb{C}) \approx C_{1,o}(\mathbb{C}) , \qquad C_{o,4}(\mathbb{R}) \approx C_{4,o}(\mathbb{R}) ;$$

le premier envoie le générateur e_1 de $C_{o,1}$ dans i fois le générateur e_1 de $C_{1,o}$ ($i = \sqrt{-1}$). Le second envoie chaque générateur e_j de $C_{o,4}$ dans le produit $e_j e_1 e_2 e_3 e_4$ des générateurs de $C_{4,o}$ (donc e_1 va dans $e_2 e_3 e_4$, e_2 va dans $-e_1 e_3 e_4$, etc...).

En combinant (3,3) et (3,4), on obtient des isomorphismes

$$(3,5) \qquad C_{p+1,q}(\mathbb{C}) \approx C_{p,q+1}(\mathbb{C}) , \qquad C_{p+4,q}(\mathbb{R}) \approx C_{p,q+4}(\mathbb{R}) .$$

DÉFINITION.- Pour toute catégorie de Banach $\underline{C}$, on notera $\underline{C}^{p,q}$ la catégorie $\underline{C}^A$ (cf. § 1, exemple 4), où A désigne l'algèbre $C_{p,q}$. Naturellement, il s'agit de

$C_{p,q}(\mathbb{R})$ si $\underline{C}$ est une catégorie de Banach réelle, resp. ...

Ainsi un objet de $\underline{C}^{p,q}$ est un objet E de $\underline{C}$ dans lequel on s'est donné des opérations $e_i \in \mathrm{Aut}_{\underline{C}}(E)$ qui satisfont à (3,1) et (3,2) : les e_i sont des involutions pour $i > p$, des antiinvolutions pour $i \leq p$; et deux quelconques de ces opérations anticommutent.

<u>Remarque</u>.- La catégorie $\underline{C}(X)^{p,q}$ s'identifie à $\underline{C}^{p,q}(X)$: catégorie des $\underline{C}^{p,q}$-fibrés de base compacte X.

Définissons un foncteur $u : \underline{C}^{p,q} \to \underline{C}^{p+1,q+1}$ comme suit : soit E un $C_{p,q}$-module ; dans $E \oplus E$, faisons opérer les e_i par les matrices $\begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & -e_i \end{pmatrix}$ et faisons aussi opérer $C_{1,1}$ par les deux automorphismes définis par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme ces opérations de $C_{1,1}$ anticommutent avec les e_i de $C_{p,q}$, on a défini sur $E \oplus E$ une structure de $C_{p+1,q+1}$-module ; ce sera par définition l'objet $u(E)$. Si maintenant $f : E \to F$ est un $\underline{C}^{p,q}$-morphisme, $u(f)$ sera, par définition, le $\underline{C}^{p+1,q+1}$-morphisme $E \oplus E \to F \oplus F$ défini par $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$.

THÉORÈME.- <u>Le foncteur</u> $u : \underline{C}^{p,q} \to \underline{C}^{p+1,q+1}$ <u>est une équivalence de catégories</u>.

La démonstration est facile.

De là, on déduit la <u>périodicité</u> : la catégorie $\underline{C}^{p,q}$ ne dépend, à une équivalence près, que de la différence $p - q$. D'après (3,5), elle ne dépend que de la congruence de $p - q$ modulo 2 (cas complexe), resp. que de la congruence de $p - q$ modulo 8 (cas réel).

4. <u>Définition des groupes</u> $K^{p,q}$.

Soit $\underline{C}$ une catégorie de Banach. Considérons le foncteur d'oubli

$$\theta^{p,q} : \underline{C}^{p,q+1} \to \underline{C}^{p,q}$$

(défini par l'injection canonique de l'algèbre de Clifford $C_{p,q}$ dans. $C_{p,q+1}$) ; c'est un foncteur d'oubli, car il consiste à oublier l'opération définie par e_{p+q+1} sur les objets de $\underline{C}^{p,q+1}$.

DÉFINITION.- Le groupe $K^{p,q}(\underline{C})$ est, par définition, le groupe de Grothendieck $K(\theta^{p,q})$.

Plus généralement, soit $\varphi : \underline{C} \to \underline{C}'$ un foncteur banachique. Le diagramme commutatif

$$(D) \qquad \begin{array}{ccc} \underline{C}^{p,q+1} & \xrightarrow{\varphi^{p,q+1}} & \underline{C}'^{p,q+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \theta^{p,q}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{p,q}} \\ \underline{C}^{p,q} & \xrightarrow{\varphi^{p,q}} & \underline{C}'^{p,q} \end{array}$$

où les foncteurs horizontaux sont ceux induits par φ , définit un foncteur à valeurs dans le produit fibré

$$\psi : \underline{C}^{p,q+1} \to \underline{C}^{p,q} \times_{\underline{C}'^{p,q}} \underline{C}'^{p,q+1}$$

(qu'on peut appeler le foncteur du diagramme (D)). Par définition, le groupe $K^{p,q}(\varphi)$ est le groupe de Grothendieck $K(\psi)$ de ce foncteur. [N.B. : ceci est une définition provisoire qui sera modifiée à la fin du § 6.]

On a des homomorphismes évidents

$$(4,1) \qquad K^{p,q}(\varphi) \to K^{p,q}(\underline{C}) \to K^{p,q}(\underline{C}') .$$

Si maintenant on a un espace compact X et un sous-espace fermé Y , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}^{p,q+1}(X) & \longrightarrow & \underline{C}^{p,q+1}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{C}^{p,q}(X) & \longrightarrow & \underline{C}^{p,q}(Y) \end{array}$$

où les foncteurs verticaux sont les foncteurs d'oubli, les foncteurs horizontaux les foncteurs de restriction. Par définition, le groupe K de ce diagramme est noté

$K^{p,q}(X,Y;\underline{C})$, ou simplement $K^{p,q}(X,Y)$ si aucun doute n'existe quant à la catégorie $\underline{C}$. Lorsque Y est vide, on obtient $K^{p,q}(X;\underline{C})$, groupe K du foncteur d'oubli $\underline{C}^{p,q+1}(X) \to \underline{C}^{p,q}(X)$. On voit que si, dans la suite (4,1), on remplace $\underline{C}$ par $\underline{C}(X)$, $\underline{C}'$ par $\underline{C}(Y)$, φ étant alors le foncteur restriction $\underline{C}(X) \to \underline{C}(Y)$, on obtient la suite

(4,2) $\qquad K^{p,q}(X,Y;\underline{C}) \to K^{p,q}(X;\underline{C}) \to K^{p,q}(Y;\underline{C})$.

Naturellement, la propriété de périodicité de la fin du § 3 entraîne ceci : les groupes $K^{p,q}$ ne dépendent (à un isomorphisme près) que de la congruence de $p - q$ modulo 2 dans le cas complexe ; ils ne dépendent que de la congruence de $p - q$ modulo 8 dans le cas réel. On peut convenir de poser

(4,3) $\qquad K^n = K^{n,o}$ pour $n \geq 0$, $\qquad K^n = K^{o,-n}$ pour $n \leq 0$.

Alors $K^{p,q} \approx K^{p-q}$, et de plus $K^n \approx K^{n+2}$ dans le cas complexe, $K^n \approx K^{n+8}$ dans le cas réel.

On démontre facilement que $K^o(\underline{C}) = K^{o,o}(\underline{C})$ s'identifie au groupe de Grothendieck $K(\underline{C})$ défini au § 2. D'une façon précise, on définit un <u>isomorphisme</u> $K^{o,o}(\underline{C}) \to K(\underline{C})$ comme suit : un élément de $K^{o,o}(\underline{C})$ est de la forme $d((E_o,\varepsilon_o),(E_1,\varepsilon_1);\omega)$, où E_o et E_1 sont des objets de $\underline{C}$, ε_o et ε_1 des involutions de ces objets, et $\omega : E_o \to E_1$ un $\underline{C}$-isomorphisme tel que $\omega\varepsilon_o = \varepsilon_1\omega$. On lui associe la différence $d(\mathrm{Ker}\,\dfrac{1+\varepsilon_o}{2}) - d(\mathrm{Ker}\,\dfrac{1+\varepsilon_1}{2})$ dans $K(\underline{C})$.

Quant au groupe $K^{o,o}(\varphi)$, il ne s'identifie à $K(\varphi)$ que sous certaines hypothèses relativement au foncteur φ . C'est ce qu'on verra plus loin.

5. Foncteurs quasi-surjectifs, foncteurs de Serre.

DÉFINITION : $\varphi : \underline{C} \to \underline{C}'$ est quasi-surjectif si tout objet E' de $\underline{C}'$ est facteur direct dans un objet de la forme $\varphi(E)$, où E est un objet de $\underline{C}$.

DÉFINITION : $\varphi : \underline{C} \to \underline{C}'$ est un foncteur de Serre si, pour tout couple d'objets E , F de $\underline{C}$, l'application linéaire continue

(5,1) $$\varphi : \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(E,F) \to \mathrm{Hom}_{\underline{C}'}(\varphi(E),\varphi(F))$$

est surjective. Ceci entraîne que l'application

(5,2) $$\mathrm{Aut}_{\underline{C}}(E) \to \mathrm{Aut}_{\underline{C}'}(\varphi(E))$$

définie par φ est une <u>fibration de Serre</u> (d'où la terminologie) ; et réciproquement, si (5,2) est une fibration de Serre pour tout objet E , alors (5,1) est surjective quels que soient E et F .

<u>Exemple</u>.- Si X est un espace compact et Y un sous-espace fermé, le foncteur restriction $\underline{C}(X) \to \underline{C}(Y)$ est quasi-surjectif et de Serre.

On aura à faire usage plusieurs fois d'un lemme technique (dont la démonstration ne présente pas de difficulté essentielle) :

LEMME.- <u>Considérons un diagramme commutatif</u>

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \underline{C}' \arrow[d, "\theta'"] \\ \underline{C}_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & \underline{C}'_1 \end{tikzcd}$$

<u>et soit</u> $D : \underline{C} \to \underline{C}_1 \times_{\underline{C}'_1} \underline{C}'$ <u>le foncteur de ce diagramme</u>. <u>Si</u> φ <u>est quasi-</u>

<u>surjectif, et si</u> φ_1 <u>est un foncteur de Serre, on a une suite exacte</u>

$$K(D^1,S^o;\theta) \to K(D^1,S^o;\theta') \xrightarrow{\partial} K(D) \to K(\theta) \to K(\theta')\ , \tag{5,3}$$

où D^1 désigne la boule unité de dimension un (c'est la même chose que le segment I), et S^o son bord.

Dans la suite (5,3), tous les homomorphismes sont évidents, sauf ∂ , qu'on va expliciter maintenant. On voit sans peine que les éléments de $K(D^1,S^o;\theta')$ sont de la forme $d(E',\omega,\alpha)$, où $E' \in \mathrm{Ob}\ \underline{C}'$, $\omega \in \mathrm{Aut}_{\underline{C}'}(E')$, et α est un chemin joignant l'identité à $\theta'(\omega)$ dans le groupe $\mathrm{Aut}_{\underline{C}'_1}(\theta'(E'))$. Puisque φ est quasi-surjectif, on peut supposer que E' est de la forme $\varphi(E)$, avec $E \in \mathrm{Ob}\ \underline{C}$. Puisque φ_1 est de Serre, on peut relever le chemin α en un chemin joignant l'identité à un certain élément $\omega_1 \in \mathrm{Aut}_{\underline{C}_1}(\theta(E))$ dans ce groupe. Alors le couple (ω_1,ω) est un automorphisme de l'objet E_1 , image de E par le foncteur D . Par définition, le transformé de $d(E',\omega,\alpha)$ par l'homomorphisme ∂ à définir est l'élément $d(E,E,(\omega_1,\omega))$, qui ne dépend pas des choix que l'on a faits en cours de route.

On va appliquer ce lemme dans le cas suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}^{p,q+1} & \xrightarrow{\varphi^{p,q+1}} & \underline{C}'^{p,q+1} \\ {\scriptstyle \theta^{p,q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{p,q}} \\ \underline{C}^{p,q} & \xrightarrow{\varphi^{p,q}} & \underline{C}'^{p,q} \end{array}$$

lorsque $\varphi : \underline{C} \to \underline{C}'$ est un <u>foncteur de Serre quasi-surjectif</u> (il en résulte que $\varphi^{p,q}$ est aussi de Serre et quasi-surjectif). On obtient ainsi une suite exacte

$$K^{p,q}(D^1,S^o;\underline{C}) \to K^{p,q}(D^1,S^o;\underline{C}') \xrightarrow{\partial^{p,q}} K^{p,q}(\varphi) \to K^{p,q}(\underline{C}) \to K^{p,q}(\underline{C}') \tag{5,4}$$

qui va jouer un rôle fondamental.

D'autre part, en supposant que, dans le lemme, les catégories $\underline{C}_1$ et $\underline{C}'_1$ sont nulles, on voit que la suite

(5,5) $\quad K(D^1,S^o;\underline{C}) \to K(D^1,S^o;\underline{C}') \to K(\varphi) \to K(\underline{C}) \to K(\underline{C}')$

est exacte. On peut alors envoyer la suite (5,4) (pour $p = 0$, $q = 0$) dans la suite (5,5), de manière que les applications $K^{o,o}(\underline{C}) \to K(\underline{C})$ et $K^{o,o}(\underline{C}') \to K(\underline{C}')$ soient les isomorphismes définis à la fin du § 4 ; et ceci permet de conclure, sans trop de peine, qu'<u>on a un isomorphisme</u>

$$K^{o,o}(\varphi) \approx K(\varphi)$$

<u>chaque fois que</u> φ <u>est un foncteur de Serre quasi-surjectif</u>.

6. <u>La suite exacte fondamentale</u>.

On va, à l'aide de la suite exacte (5,4), définir, pour tout foncteur de Serre quasi-surjectif $\varphi : \underline{C} \to \underline{C}'$, une suite exacte

(6,1) $\quad K^{p,q+1}(\underline{C}) \to K^{p,q+1}(\underline{C}') \xrightarrow{\delta^{p,q}} K^{p,q}(\varphi) \to K^{p,q}(\underline{C}) \to K^{p,q}(\underline{C}')$.

Compte tenu de la définition des groupes K^n (cf. § 4), cette suite s'écrira

(6,2) $\quad K^{n-1}(\underline{C}) \to K^{n-1}(\underline{C}') \to K^n(\varphi) \to K^n(\underline{C}) \to K^n(\underline{C}')$,

et elle fera donc partie d'une suite exacte illimitée, pour n variant de $-\infty$ à $+\infty$. En outre, cette suite sera périodique de période 2 dans le cas complexe, de période 8 dans le cas réel.

Dans (6,1), les homomorphismes sont déjà définis, sauf $\delta^{p,q}$. On va définir un isomorphisme

$$\tau(\underline{C}) : K^{p,q+1}(\underline{C}) \to K^{p,q}(D^1,S^o;\underline{C})$$

fonctoriel en $\underline{C}$. Alors on définira l'application $\delta^{p,q}$ de la suite (6,1) par la formule :

$$\delta^{p,q} = \partial^{p,q} \circ \tau(\underline{C}') \quad ;$$

et l'exactitude de la suite (6,1) résultera de celle de la suite (5,4).

Reste à définir $\tau(\underline{C})$. Signalons tout de suite que c'est un cas particulier de "l'isomorphisme de Thom", défini en toute généralité par Karoubi en K-théorie des $\underline{C}$-fibrés (cf. plus loin).

On va d'abord définir un homomorphisme $\tau(\underline{C})$, puis le théorème de Wood permettra de prouver que c'est un isomorphisme.

La définition de τ est très simple, et quasiment géométrique. Un élément de $K^{p,q+1}(\underline{C})$ est de la forme $d(E,\xi,\varepsilon_0,\varepsilon_1)$, où E est un objet de $\underline{C}^{p,q}$, ξ une involution de E qui anticommute avec les générateurs e_i de l'algèbre de Clifford $C_{p,q}$ (et définit donc sur E une structure de $C_{p,q+1}$-module), et où ε_0 et ε_1 sont deux involutions de E qui anticommutent avec les e_i et avec ξ .
Pour $0 \leq t \leq \pi$, les fonctions de t :

$$\varepsilon_0(t) = \xi \cos t + \varepsilon_0 \sin t , \qquad \varepsilon_1(t) = \xi \cos t + \varepsilon_1 \sin t$$

sont deux involutions qui anticommutent avec les e_i . Soit $\alpha(t) \in \mathrm{Aut}_{\underline{C}^{p,q}}(E)$ un chemin tel que $\alpha(0) = \mathrm{id.}$ et que, pour tout t , on ait

$$\alpha(t)\varepsilon_0(t)(\alpha(t))^{-1} = \varepsilon_1(t)$$

(on va voir qu'un tel chemin existe) ; alors $\alpha(\pi)$ commute avec ξ , donc est un automorphisme de E comme $C_{p,q+1}$-module. D'après ce qu'on a vu au § 5, ce chemin définit un élément de $K^{p,q}(D^1,S^0;\underline{C})$, d'ailleurs indépendant du choix du chemin $\alpha(t)$. C'est celui que l'homomorphisme τ (qu'on voulait définir) associe à $d(E,\xi,\varepsilon_0,\varepsilon_1) \in K^{p,q+1}(\underline{C})$.

Or on peut prendre tout simplement

$$\alpha(t) = (\cos \tfrac{t}{2} + \varepsilon_1\xi \sin \tfrac{t}{2})(\cos \tfrac{t}{2} - \varepsilon_0\xi \sin \tfrac{t}{2}) \ . \tag{6,3}$$

Ce chemin part de l'identité et aboutit à $\epsilon_1\epsilon_o$, qui est un $C_{p,q+1}$-automorphisme de (E,ξ) .

THÉORÈME.- L'homomorphisme

$$\tau : K^{p,q+1}(\underline{C}) \to K^{p,q}(D^1,S^o;\underline{C})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On va d'abord prouver que τ est surjectif. Notons A l'algèbre de Banach $\mathrm{End}_{\underline{C}^{p,q}}(E)$, G l'ouvert des éléments inversibles, et soit σ l'involution de A définie par

$$\sigma(a) = \xi a\xi .$$

Tout élément de $K^{p,q}(D^1,S^o;\underline{C})$ est défini par un chemin de G , partant de 1 , aboutissant en un point du sous-ensemble G^σ des éléments de G invariants par σ . On note $\Omega(G,G^\sigma)$ l'espace de ces chemins. Posant $g_o = \epsilon_o\xi \in G$, on constate que g_o fait partie de l'ensemble des g satisfaisant à

$$(6,4) \qquad g^2 = -1 , \qquad \sigma(g) = -g ;$$

réciproquement, si à un tel g on associe $\epsilon = g\xi$, ϵ est de carré un et anticommute avec ξ . Appelons chemin spécial tout élément $\alpha \in \Omega(G,G^\sigma)$ de la forme

$$(6,5) \qquad \alpha(t) = (\cos\frac{t}{2} + g \sin\frac{t}{2})(\cos\frac{t}{2} - g_o \sin\frac{t}{2}) , \qquad 0 \leq t \leq \pi ,$$

où g satisfait à (6,4). D'après la définition de τ , l'image de l'homomorphisme τ contient les classes, dans $K^{p,q}(D^1,S^o;\underline{C})$, des chemins spéciaux ; et tout revient à prouver que si α est un élément quelconque de $\Omega(G,G^\sigma)$, la classe de α dans $K^{p,q}(D^1,S^o;\underline{C})$ contient un chemin spécial.

Or c'est justement ce que permet de conclure le théorème de WOOD [7] (qui, rappelons-le, utilise la théorie spectrale des algèbres de Banach). Ce théorème dit ceci : étant donné $\alpha \in \Omega(G,G^\sigma)$, il existe un entier n tel que, si l'on pose

$$G^n = G \times \dots \times G \text{ (n fois)}, \quad \sigma^n = (\sigma,\dots,\sigma) \;, \quad (g_o)^n = (g_o,\dots,g_o) \;,$$

le produit $\alpha \times e \times \dots \times e$ de α par des chemins triviaux soit un élément de $\Omega(G^n,(G^n)^{\sigma^n})$ dont la composante connexe contient un chemin spécial. C.Q.F.D.

Maintenant que l'on sait que τ est surjectif, il est facile de prouver qu'il est injectif, en utilisant la surjectivité de

$$\tau(\underline{C}(I)) \; : \; K^{p+q+1}(\underline{C}(I)) \; \rightarrow \; K^{p,q}(D^1,S^o;\underline{C}(I)) \; .$$

<u>Un cas particulier</u> de la suite exacte (6,2) : Soient X un espace compact, Y un sous-espace fermé ; dans (6,2), remplaçons $\underline{C}$ par $\underline{C}(X)$, $\underline{C}'$ par $\underline{C}(Y)$, φ étant le foncteur restriction (qui est de Serre et quasi-surjectif). On obtient la suite exacte

$$(6,6) \qquad \dots \rightarrow K^{n-1}(X;\underline{C}) \rightarrow K^{n-1}(Y;\underline{C}) \rightarrow K^n(X,Y;\underline{C}) \rightarrow K^n(X;\underline{C}) \rightarrow K^n(Y;\underline{C})) \rightarrow \dots$$

qui est valable pour toute catégorie de Banach. Lorsque $\underline{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie, on retrouve la suite exacte de la K-théorie classique.

La suite (6,6) est fonctorielle en $\underline{C}$. D'autre part, pour une catégorie $\underline{C}$ donnée, c'est un foncteur contravariant du couple (X,Y) , qui donne une théorie de la cohomologie : l'axiome d'excision résulte du fait (facile à prouver) que l'application naturelle

$$K^n(X/Y,pt;\underline{C}) \;\rightarrow\; K^n(X,Y;\underline{C})$$

est un isomorphisme. Puisqu'on a une théorie de la cohomologie, on a un isomorphisme de suspension :

$$K^n(X,pt;\underline{C}) \;\approx\; K^{n+q}(S^q(X),pt;\underline{C}) \quad ;$$

pour $q = 2$ (cas complexe) ou $q = 8$ (cas réel), on obtient

$$K^n(S^o,pt;\underline{C}) \;\approx\; K^n(S^q,pt;\underline{C}) \;,$$

ce qui redonne la périodicité des groupes d'homotopie de l'espace classifiant correspondant.

Cas où le foncteur $\varphi : \underline{C} \to \underline{C}'$ n'est pas un foncteur de Serre.

On suppose que φ est quasi-surjectif. Pour que la suite exacte fondamentale (6,2) subsiste, il faut modifier la définition de $K^n(\varphi)$. Pour cela, on introduit une catégorie $\tilde{\underline{C}}$ (cylindre d'application de φ), et une factorisation de φ en

$$\underline{C} \xrightarrow{i} \tilde{\underline{C}} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \underline{C}' ,$$

où $\tilde{\varphi}$ est quasi-surjectif et de Serre, et où i est une équivalence de catégories. Alors les $K^n(\tilde{\underline{C}})$ s'identifient aux $K^n(\underline{C})$, et on a donc une suite exacte

$$\ldots \to K^{n-1}(\underline{C}) \to K^{n-1}(\underline{C}') \to K^n(\tilde{\varphi}) \to K^n(\underline{C}) \to K^n(\underline{C}') \to \ldots .$$

Ceci conduit à modifier la définition de $K^n(\varphi)$ lorsque φ (quasi-surjectif) n'est pas un foncteur de Serre : on doit lui substituer $K^n(\tilde{\varphi})$. On notera que $K(\tilde{\varphi}) = K(\varphi)$.

Désormais, nous écrirons $K^n(\varphi)$ au lieu de $K^n(\tilde{\varphi})$, ce qui revient à changer la définition de $K^n(\varphi)$ donnée au § 4. Avec cette nouvelle définition, la suite exacte (6,2) est valable pour tout foncteur φ quasi-surjectif. Le nouveau $K^o(\varphi)$ coïncide bien avec $K(\varphi)$.

7. La K-théorie tordue.

Soit X un espace compact. Au lieu de faire opérer l'algèbre de Clifford $C_{p,q}$ dans un $\underline{C}$-fibré E de base X, on peut considérer un fibré vectoriel V de base X, muni d'une forme quadratique Q non-dégénérée dans chaque fibre de V ;

on a alors un fibré $C_Q(V)$ en algèbres de Clifford. Faire opérer $C_Q(V)$ dans le $\underline{C}$-fibré E , c'est se donner un morphisme de fibrés de base X :

$$\mu : V \to \underline{\mathrm{End}}\, E$$

(où $\underline{\mathrm{End}}\, E$ désigne le fibré en algèbres de Banach dont l'algèbre des sections est $\mathrm{End}\, E$), de manière que soit satisfaite la condition suivante : l'application composée

$$V \xrightarrow{\text{diag.}} V \oplus V \xrightarrow{\mu \oplus \mu} \underline{\mathrm{End}}\, E \oplus \underline{\mathrm{End}}\, E \xrightarrow{\text{mult.}} \underline{\mathrm{End}}\, E$$

associe à chaque vecteur $\xi \in V$ au-dessus de $x \in X$ la multiplication par $Q(\xi)$ dans la fibre E_x .

Soit $\underline{C}^V(X)$ la catégorie des $\underline{C}$-fibrés de base X où opère $C_Q(V)$. Si on note $T^{p,q}$ le fibré trivial de base X , muni de l'algèbre de Clifford $C_{p,q}$, on a évidemment $\underline{C}^V(X) = \underline{C}^{p,q}(X)$ lorsque $V = T^{p,q}$.

DEFINITION.- Si $\varphi : \underline{C}^{V \oplus T^{0,1}}(X) \to \underline{C}^V(X)$ est le foncteur d'oubli évident, on note $K^V(X;\underline{C})$ le groupe de Grothendieck $K(\varphi)$. Pour $V = T^{p,q}$, on retrouve $K^{p,q}(X)$. Le groupe $K^V(X)$ est donc un groupe $K^{p,q}(X)$ "tordu", si (p,q) est la signature de la forme quadratique donnée sur V .

Un fibré V muni d'une forme quadratique de signature (p,q) provient d'un fibré principal ayant pour groupe structural le groupe orthogonal $O(p,q)$. On dit que V est <u>spinoriel</u> s'il provient d'un fibré principal P ayant pour groupe structural le groupe $\mathrm{Spin}(p,q)$. Dans ce cas, si $\underline{C}$ est une catégorie de Banach <u>réelle</u>, la construction classique du fibré associé définit ici un foncteur

$$\underline{C}^{p,q+1}(X) \to \underline{C}^{V \oplus T^{0,1}}(X)$$

qui est une <u>équivalence de catégories</u>. On en déduit un <u>isomorphisme</u>

(7,1) $$K^{p,q}(X;\underline{C}) \approx K^V(X;\underline{C})$$

lorsque le fibré V est spinoriel et la catégorie de Banach $\underline{C}$ réelle. On a un isomorphisme analogue lorsque V un fibré (réel) ^{U}spinoriel, et $\underline{C}$ une catégorie de Banach complexe.

8. L'isomorphisme de Thom.

Supposons que la forme quadratique Q du fibré V soit définie positive. On définit alors un foncteur

$$(8,1) \qquad \underline{C}^{V \oplus T^{0,1}}(X) \to \underline{C}^{0,1}(B(V)) \ ,$$

où $B(V)$ désigne le fibré en boules-unité défini par V. Bornons-nous à expliciter ce foncteur sur les objets : un objet de $\underline{C}^{V \oplus T^{0,1}}(X)$ est défini par un $\underline{C}$-fibré E de base X, un morphisme

$$\mu : V \to \underline{\mathrm{End}}\ E$$

(satisfaisant à la condition voulue pour qu'il définisse une action de $C_Q(V)$ sur E), et un

$$\varepsilon \in \mathrm{End}\ E \ ,$$

tel que $\varepsilon^2 = 1$, de façon que, pour tout $v \in V$ de projection $x \in X$, $\mu(v)$ et $\varepsilon(x)$ anticommutent dans $\mathrm{End}\ E_x$. Définissons alors, pour $v \in B(V)$ de projection $x \in X$:

$$(8,2) \qquad \varepsilon'(v) = \mu(v) + \varepsilon(x)\sqrt{1 - Q(v)} \ .$$

ε' est une involution du fibré E' de base $B(V)$, image réciproque de E par l'application $B(V) \to X$. Le fibré E', muni de cette involution ε', est un objet de $\underline{C}^{0,1}(B(V))$. Ceci définit (8,1).

Plus généralement, si W est un autre fibré vectoriel de base X, muni d'une forme quadratique non-dégénérée (non nécessairement positive), le procédé précédent définit un foncteur

(8,3) $$\underline{C}^{W \oplus V \oplus T^{o,1}}(X) \to \underline{C}^{W' \oplus T^{o,1}}(B(V)) ,$$

en notant W' l'image réciproque de W pour l'application $B(V) \to X$. On en déduit aussitôt un homomorphisme

(8,4) $$\tau : (K^{W \oplus V}(X);\underline{C}) \to K^{W'}(B(V),S(V);\underline{C})$$

qui est fondamental ; on peut l'appeler l'<u>homomorphisme de Thom</u>.

THÉORÈME.- <u>L'homomorphisme précédent est un isomorphisme</u>.

Lorsque W est trivial, et V trivial de rang un, ce théorème n'est autre que le théorème du § 6. Lorsque W et V sont triviaux, le théorème se prouve par récurrence sur le rang de V, à partir du cas où ce rang est un. Enfin, dans le cas général, le théorème se prouve par localisation, en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris.

Considérons en particulier le cas où le fibré W est trivial de rang p, avec une forme quadratique définie négative. L'isomorphisme de Thom devient alors :

(8,5) $$\tau : K^{T^{p,o} \oplus V}(X;\underline{C}) \approx K^{p,o}(B(V),S(V);\underline{C}) .$$

Compte tenu de l'isomorphisme (7,1), on obtient :

COROLLAIRE.- <u>Si le fibré</u> V <u>est spinoriel</u> (la catégorie $\underline{C}$ étant <u>réelle</u>), resp. <u>si</u> V <u>est</u> <u>^{U}spinoriel</u> (la catégorie $\underline{C}$ étant <u>complexe</u>), <u>l'isomorphisme de Thom est</u> (en notant q la dimension des fibres de V) :

$$\tau : K^{p,q}(X;\underline{C}) \approx K^{p,o}(B(V),S(V);\underline{C}) ,$$

c'est-à-dire finalement

(8,6) $$\tau : K^{p-q}(X;\underline{C}) \approx K^{p}(B(V),S(V);\underline{C}) .$$

On voit bien ici l'analogie avec l'isomorphisme de Thom-Gysin en cohomologie ordinaire. Il resterait à avoir ici une bonne théorie multiplicative pour interpréter (8,6) à l'aide d'un cup-produit.

9. Groupes K des espaces projectifs.

On utilise ici une construction "géométrique" analogue à celle qui a servi à définir (8,1). Soit V un fibré vectoriel réel de base X, muni d'une forme quadratique Q définie positive. Soit $P(V)$ le fibré associé dont les fibres sont les espaces projectifs des fibres de V ; $P(V)$ est quotient de $S(V)$ par l'action du groupe $\mathbb{Z}_2$ à deux éléments. Comme au § 8, un objet de $\underline{C}^{V \oplus T^{0,1}}(X)$ est défini par un $\underline{C}$-fibré E muni d'opérations μ et ε ; utilisant l'action de $\mathbb{Z}_2$ sur $S(V)$, et l'action de $\mathbb{Z}_2$ sur E définie par ε, on introduit le quotient E' du produit fibré de E et $S(V)$ au-dessus de X, par l'action diagonale de $\mathbb{Z}_2$; c'est un fibré vectoriel de base $P(V)$ muni d'une involution ε'. Quant à l'action de μ, elle définit une autre involution de E' qui anti-commute avec ε'. D'où un foncteur

$$\underline{C}^{V \oplus T^{0,1}}(X) \to \underline{C}^{0,2}(P(V)) .$$

Ce foncteur induit, lorsque W est un sous-fibré vectoriel de V, un homomorphisme

$$(9,1) \qquad K^{V,W}(X;\underline{C}) \to K^{0,1}(P(V),P(W);\underline{C}) ,$$

en notant $K^{V,W}(X;\underline{C})$ le groupe de Grothendieck du foncteur "restriction"

$$\varphi_{V,W}(X;\underline{C}) : \underline{C}^{V \oplus T^{0,1}}(X) \to \underline{C}^{W \oplus T^{0,1}}(X) .$$

On en déduit, par suspension :

THÉORÈME.- <u>Le groupe</u> $K^n(P(V),P(W);\underline{C})$ <u>est isomorphe au groupe</u> $K^{n+1}(\varphi_{V,W}(X;\underline{C}))$.

Le cas particulier le plus simple est celui où X est réduit à un point, V et W étant des espaces vectoriels de dimensions $r+1$ et $s+1$ $(s < r)$. Alors le groupe $K^n(P_r,P_s;\underline{C})$ est isomorphe au groupe K^{n+1} du foncteur d'oubli

$$\varphi : \underline{C}^{o,r+2} \to \underline{C}^{o,s+2} .$$

Dans le cas plus particulier où la catégorie $\underline{C}$ est <u>de dimension finie</u> (ce qui signifie que $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(E,F)$ est un espace vectoriel de dimension finie pour tous objets E et F), on a $K^1(\underline{C}) = 0$; ici, $K^1(\underline{C}^{o,r+2}) = 0$, et la suite exacte

$$K(\underline{C}^{o,r+2}) \to K(\underline{C}^{o,s+2}) \to K^1(\varphi) \to K^1(\underline{C}^{o,r+2})$$

montre que $K^1(\varphi) \approx \mathrm{Coker}\ K(\underline{C}^{o,r+2}) \to K(\underline{C}^{o,s+2})$. En appliquant le théorème précédent pour $n = 0$, on obtient :

COROLLAIRE.- <u>Lorsque la catégorie</u> $\underline{C}$ <u>est de dimension finie</u>, <u>on a un isomorphisme</u>

$$K(P_r,P_s) \approx \mathrm{Coker}\ K(\underline{C}^{o,s+2}) \to K(\underline{C}^{o,r+2}) .$$

Or les $K(\underline{C}^{o,t})$ se calculent aisément à partir de la table des algèbres de Clifford, ainsi que leurs applications les uns dans les autres. Un simple calcul algébrique donne donc les $K(P_r,P_s)$ des espaces projectifs réels, et on retrouve ainsi les résultats d'ADAMS :

(1) si $\underline{C}$ est <u>réelle</u>, soit $b_{r,s}$ le nombre des entiers m qui sont congrus à 0 , 1 , 2 ou 4 (mod 8) et satisfont à $s < m \leq r$; et soit $a_{r,s} = 2^{b_{r,s}}$. Alors :

$$\begin{aligned} K(P_r,P_s) &= \mathbb{Z}/a_{r,s}\mathbb{Z} && \text{si } s \not\equiv -1 \pmod 4) \\ &= \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/a_{r,s+1}\mathbb{Z} && \text{si } s \equiv -1 \pmod 4) . \end{aligned}$$

(2) si $\underline{C}$ est <u>complexe</u>, soit $b'_{r,s}$ le nombre des entiers pairs m tels que $s < m \leq r$; et soit $a'_{r,s} = 2^{b'_{r,s}}$. Alors :

$$\begin{aligned} K(P_r,P_s) &= \mathbb{Z}/a'_{r,s}\mathbb{Z} && \text{si } s \text{ est impair,} \\ &= \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/a'_{r,s+1}\mathbb{Z} && \text{si } s \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Pour $s = r - 1$, on retrouve les $K(S^r, pt)$, c'est-à-dire les groupes d'homotopie des classifiants, dont le calcul est ainsi devenu purement algébrique.

Karoubi peut aussi, par les mêmes méthodes, calculer les $K^n(P_r, P_s)$ pour une catégorie $\underline{C}$ de dimension finie. On a d'ailleurs

$$K^n(P_r, P_s) \approx K^{n+4}(P_{r+4}, P_{s+4}) ,$$

même si $\underline{C}$ n'est pas de dimension finie ; il y a même un théorème de ce type pour des fibrés projectifs $P(V)$ et $P(W)$.

Faute de place, nous renonçons à parler des résultats de Karoubi sur la théorie équivariante (voir le Chap. 3, § 5 de sa Thèse).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. ADAMS - Vector fields on spheres, Ann. Math. 75, 1962, p. 603-632.

[2] M. F. ATIYAH et R. BOTT - On the periodicity theorem for complex vector bundles, Acta Math. 112, 1964, p. 229-247.

[3] M. F. ATIYAH, R. BOTT et A. SHAPIRO - Clifford modules, Topology 3, Suppl. 1, 1964, p. 3-38.

[4] M. F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH - Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Symp. on Pure Math., vol. 3, 1961 (A.M.S.).

[5] M. F. ATIYAH et G. B. SEGAL - Equivariant K-Theory (Lecture Notes, Oxford 1965).

[6] M. KAROUBI - Thèse (à paraître aux Annales E. N. S. 1968).

[7] R. WOOD - Banach algebras and Bott periodicity, Topology 4, 1966, p. 371-389.

ERRATA

Page 337-07 - Avant la ligne 5 du bas, ajouter ce qui suit :

Plus généralement, soit $\varphi : \underline{C} \to \underline{C}'$ un foncteur banachique ; le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & \underline{C}'(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{C}(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & \underline{C}'(Y) \end{array}$$

définit un foncteur D de $\underline{C}(X)$ dans le "produit fibré" $\underline{C}(Y) \times_{\underline{C}'(Y)} \underline{C}'(X)$; on note $K(X,Y;\varphi)$ le groupe $K(D)$ de ce foncteur.

Page 337-22 - Remplacer les lignes 5 et 4 du bas par ce qui suit :

THÉORÈME.- (9,1) <u>est un isomorphisme</u>.

On en déduit, par suspension :

COROLLAIRE.- <u>Le groupe</u> $K^n(P(V),P(W);\underline{C})$ <u>est isomorphe au groupe</u> $K^{n+1}(\varphi_{V,W}(X;\underline{C}))$.