JEAN-CLAUDE TOUGERON

Stabilité des applications différentiables

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 336, p. 375-390

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__375_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967/68, n° 336 Novembre 1967

STABILITÉ DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES
(d'après J. MATHER)

par Jean-Claude TOUGERON

I. Enoncé du résultat.

Par "variété" nous entendrons une variété C^∞ (de dimension finie) qui peut avoir un bord.

Si M est une variété, on désigne par $C^\infty(M)$ l'algèbre des applications C^∞ de M dans $\mathbb{R}$; par $\tau(M)$, le fibré tangent à M ; par $\Phi(M)$, le module sur $C^\infty(M)$ des sections C^∞ de $\tau(M)$; par $\mathrm{Diff}(M)$ le groupe des difféomorphismes C^∞ de M sur M.

Soient M et N deux variétés : on désigne par $C^\infty(M,N)$ l'espace des applications C^∞ de M dans N, muni de la topologie fine (une base d'ouverts pour cette topologie est formée de tous les ensembles $G(k,X) = \{f \in C^\infty(M,N)\ ;\ j^k(f) \in X\}$ où $k \in \mathbb{N}$ et X décrit l'ensemble des ouverts du fibré des jets $j^k(M,N)$). Si $f \in C^\infty(M,N)$, on note $\Phi(f)$ le module sur $C^\infty(M)$ des sections C^∞ de $f^*\tau(N)$ et $\tau(f)$ l'application linéaire tangente à f. On définit les applications :

$$O_f : (h,g) \in \mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(M) \rightsquigarrow h^{-1} \circ f \circ g \in C^\infty(M,N)$$

$$\alpha_f : \eta \in \Phi(N) \rightsquigarrow \eta \circ f \in \Phi(f)$$

$$\beta_f : \xi \in \Phi(M) \rightsquigarrow \tau(f) \circ \xi \in \Phi(f) .$$

Nous supposerons désormais (dans ce paragraphe) que M <u>et</u> N <u>sont des variétés sans bord</u>.

DÉFINITION 1.- <u>Nous dirons que</u> f <u>est stable s'il existe un voisinage</u> X <u>de</u> f <u>dans</u> $C^\infty(M,N)$ <u>tel que</u>, $\forall$ $f' \in X$, <u>il existe</u> $g \in \mathrm{Diff}(M)$ <u>et</u> $h \in \mathrm{Diff}(N)$ <u>vérifiant</u> :

$$f = h^{-1} \circ f' \circ g .$$

Cela signifie que $\mathrm{Im}(O_f)$ contient un voisinage de f .

Intuitivement, $\Phi(N) \oplus \Phi(M)$ est l'espace tangent à $\mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(M)$ en $(1_N, 1_M)$; $\Phi(f)$ est l'espace tangent à $C^\infty(M,N)$ au point f ; $\alpha_f + \beta_f : \Phi(N) \oplus \Phi(M) \rightsquigarrow \Phi(f)$ est l'application linéaire tangente à O_f en $(1_N, 1_M)$. Cela suggère la définition suivante :

DÉFINITION 2.- Nous dirons que f est infinitésimalement stable si l'application $\alpha_f + \beta_f$ est surjective, i.e. $\alpha_f[\Phi(N)] + \beta_f[\Phi(M)] = \Phi(f)$.

DÉFINITION 3.- Posons $U = M \times [0,1]$, $V = N \times [0,1]$. Soient f , $f' \in C^\infty(M,N)$. Une homotopie stable de f vers f' est la donnée de trois applications C^∞ :

$$F : (x,t) \in U \rightsquigarrow F_t(x) \in N$$

$$G : (x,t) \in U \rightsquigarrow G_t(x) \in M$$

$$H : (y,t) \in V \rightsquigarrow H_t(y) \in N$$

telles que $G_0 = 1_M$; $H_0 = 1_N$; $F_0 = f$, $F_1 = f'$ et $\forall\, t \in [0,1]$, $G_t \in \mathrm{Diff}(M)$, $H_t \in \mathrm{Diff}(N)$ et

$$f = H_t^{-1} \circ F_t \circ G_t . \tag{1}$$

Une telle homotopie est triviale si $\forall\, t \in [0,1]$, $F_t = f$, $G_t = 1_M$, $H_t = 1_N$ (ceci entraîne $f = f'$).

Une C.N.S. pour que la condition (1) soit satisfaite est que :

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_t^{-1} \circ F_t \circ G_t) = \tau(H_t^{-1}) \circ (\tau(F_t) \circ \frac{\partial G_t}{\partial t} \circ G_t^{-1} + \frac{\partial F_t}{\partial t} + \tau(H_t) \circ \frac{\partial H_t^{-1}}{\partial t} \circ F_t) \circ G_t = 0 .$$

Soit, en remarquant que $\dfrac{\partial}{\partial t}(H_t \circ H_t^{-1}) = \tau(H_t) \circ \dfrac{\partial H_t^{-1}}{\partial t} + \dfrac{\partial H_t}{\partial t} \circ H_t^{-1} = 0$,

$$(2) \qquad \frac{\partial F_t}{\partial t} = \alpha_{F_t}(\eta_t) + \beta_{F_t}(\xi_t) \ ,$$

où $\xi_t = - \dfrac{\partial G_t}{\partial t} \circ G_t^{-1}$, $\eta_t = \dfrac{\partial H_t}{\partial t} \circ H_t^{-1}$.

DÉFINITION 4.- Nous dirons que f est homotopiquement stable s'il existe un voisinage X de f dans $C^\infty(M,N)$ et une application continue :

$$f' \in X \rightsquigarrow (F_{f'} , G_{f'} , H_{f'}) \in C^\infty(U,N) \times C^\infty(U,M) \times C^\infty(V,N)$$ telle que, $\forall f' \in X$, le triple $(F_{f'} , G_{f'} , H_{f'})$ soit une homotopie stable de f vers f' , triviale si $f' = f$.

Le théorème fondamental démontré par J. Mather est le suivant :

THÉORÈME 1.- Soient M et N deux variétés sans bord. Supposons que M est compacte et soit $f : M \to N$ une application C^∞ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) l'application f est infinitésimalement stable ;

b) l'application f est homotopiquement stable ;

c) l'application f est stable (*).

L'outil algébrique essentiel à la démonstration du théorème 1 est le théorème de préparation différentiable.

(*) Mather démontre plus généralement l'équivalence des conditions a), b), c) sans hypothèse de compacité sur M , lorsque f est une application propre. Cette dernière hypothèse est essentielle : si f n'est pas propre, la stabilité infinitésimale n'implique pas nécessairement la stabilité et réciproquement.

II. Le théorème de préparation différentiable.

Soient $\varphi : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs et unitaires ; I et J deux idéaux de R et S respectivement tels que $\varphi(I) \subset J$, $\varphi' : R/I \to S/J$ l'homomorphisme évident induit par φ .

DÉFINITION 5.- Nous dirons que φ' est une contraction adéquate de φ si pour tout R-module de type fini A , tous S-modules B et C (C de type fini), tout φ-homomorphisme $\alpha : A \to C$ et tout S-homomorphisme $\beta : B \to C$, l'hypothèse :

$$(3) \qquad \alpha[A] + \beta[B] + J.C = C$$

implique :

$$(4) \qquad \alpha[A] + \beta[B] = C$$

$$(5) \qquad \alpha[I.A] + \beta[J.B] = J.C \quad .$$

Remarques.- Si $r(R)$ désigne le radical de R , i.e. l'intersection de tous les idéaux maximaux, rappelons qu'un idéal I est contenu dans $r(R)$ si et seulement si $\forall a \in I$, $1 + a$ est inversible dans R . Si K est un fermé d'une variété M et si l'on note $C^\infty_K(M)$ l'anneau des germes en K de fonctions réelles C^∞ sur M , le radical de $C^\infty_K(M)$ est formé de tous les germes nuls sur K .

a) Supposons que $I \subset r(R)$. Alors la contraction $\varphi' : R/I \to S/\varphi(I).S$ est adéquate si et seulement si tout module C de type fini sur S et tel que $C \otimes_\varphi R/I$ soit de type fini sur R/I , est de type fini sur R .

b) Supposons que R est un anneau local et que $r(S)$ est un idéal de type fini. Soit $\varphi : R \to S$ un homomorphisme tel que la contraction $\varphi' : \underline{k} \simeq R/r(R) \to S/\varphi[r(R)].S$ soit adéquate. Soient A un module engendré sur R par n éléments ; B et C deux modules sur S (C de type fini) ; $\alpha : A \to C$ un φ-homomorphisme ; $\beta : B \to C$ un S-homomorphisme. L'hypothèse :

$$(3') \qquad \alpha[A] + \beta[B] + \varphi[r(R)].C + [r(S)]^{n+1}.C = C$$

entraîne :

(4) $$\alpha[A] + \beta[B] = C .$$

Démonstration.- En effet, posons $C' = C/\beta[B] \otimes_R \underline{k}$; d'après (3'), $C'/[r(S)]^{n+1}.C'$ est un $\underline{k}$-espace vectoriel de dimension $\leq n$. Donc $[r(S)]^{n+1}.C' = 0$, car sinon, par le lemme de Nakayama, on aurait des inclusions strictes : $C' \supset r(S).C' \supset \ldots \supset [r(S)]^{n+1}.C'$ et donc $\dim_{\underline{k}} C'/[r(S)]^{n+1}.C' \geq n+1$, contradiction. On déduit de là :

$$\alpha[A] + \beta[B] + \varphi[r(R)].C = C$$

d'où (4), puisque la contraction φ' est adéquate.

DÉFINITION 6.- Soit $t \in S$. Nous dirons que le triple (φ,φ',t) vérifie (D) (propriété de division) si :

$\forall p \in \mathbb{N}^+$, $\forall u_1,\ldots,u_p \in R$; $\forall s \in J$ et $\forall f \in S$ (resp. J), il existe $q \in S$ (resp. J) et $h_1,\ldots,h_p \in R$ (resp. I) tels que :

(6) $$f = \Lambda q + \sum_{i=1}^{p} \varphi(h_i)t^{p-i}$$

où $\Lambda = t^p + \sum_{i=1}^{p} \varphi(u_i)\, t^{p-i} + s$.

Nous admettrons le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 2.(Malgrange [1], Mather [2]).- Soient M une variété, t la projection canonique : $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Π la projection canonique : $M \times \mathbb{R} \to M$. Soient $u_1,\ldots,u_p \in C^\infty(M)$; posons $\Gamma = t^p + \sum_{i=1}^{p} (u_i \circ \Pi)t^{p-i}$. Il existe des applications :

$$f \in C^\infty(M \times \mathbb{R}) \rightsquigarrow q_f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$$

$$f \in C^\infty(M \times \mathbb{R}) \rightsquigarrow h_{i,f} \in C^\infty(M)$$

telles que : $f = q_f.\Gamma + \sum_{i=1}^{p} (h_{i,f} \circ \Pi)t^{p-i}$.

En outre, si K est un sous-ensemble de M et si $f = 0$ sur $K \times \mathbb{R}$, on a $q_f = 0$ sur $K \times \mathbb{R}$ et $\forall i \in [1,p]$, $h_{i,f} = 0$ sur K .

Remarquons qu'en général, les fonctions $f \rightsquigarrow q_f$ et $f \rightsquigarrow h_{i,f}$ ne sont pas uniques. Par exemple, si $\Gamma = t^2 + 1$, on peut choisir arbitrairement $f \rightsquigarrow h_{1,f}$ et $f \rightsquigarrow h_{2,f}$, puisque Γ est inversible dans $C^\infty(M \times \mathbb{R})$. B. Malgrange énonçait le théorème sous sa forme locale (mais il est facile de passer du local au global) et la démonstration s'appuyait sur le dévissage des ensembles analytiques. La démonstration de J. Mather, très différente, utilise la transformation de Fourier et ne suppose pas que M est de dimension finie (i.e. M peut être une variété banachique). En outre, pour toute sous-variété N de $M \times R$ telle que $\Pi|N$ est est propre, les applications $f \rightsquigarrow h_{i,f}$ et $f \rightsquigarrow q_f|N \in C^\infty(N)$ sont linéaires, continues pour les topologies fines.

LEMME 1.- Avec les notations précédentes, soit K un fermé de M. Posons

$$R = C^\infty_K(M) \quad , \quad S = C^\infty_{K\times\mathbb{R}}(M \times \mathbb{R}) \quad , \quad \varphi = \pi^* .$$

Soit $\varphi' : R/r(R) \to S/r(S)$ l'homomorphisme induit par φ. Alors le triple (φ, φ', t) vérifie (D).

Démonstration.- Rapportons l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$ à un système de coordonnées $y = (y_1, \ldots, y_p)$. Les projections canoniques permettent d'identifier $C^\infty(M)$, $C^\infty(M \times \mathbb{R})$, etc... à des sous-anneaux de $C^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)$ et de même $C^\infty_K(M)$, $C^\infty_{K\times\mathbb{R}}(M \times \mathbb{R})$ etc... à des sous-anneaux de $C^\infty_{K\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)$. Soient $u_1, \ldots, u_p \in R$ et $s \in r(S)$; désignons par $\tilde{u}_1(x), \ldots, \tilde{u}_p(x) \in C^\infty(M)$ des représentants de $u_1, \ldots, u_p$ respectivement et par $\tilde{s}(x,t) \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ un représentant de s nul sur $K \times \mathbb{R}$.

Posons $\Gamma = t^p + \sum_{i=1}^{p} y_i t^{p-i}$. D'après le théorème 2, il existe $\tilde{q}(x,t,y) \in C^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)$ et des $\tilde{h}_i(x,y) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^p)$, nuls sur $K \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, tels que

$$\tilde{s} = \tilde{q}.\Gamma + \sum_{i=1}^{p} \tilde{h}_i . t^{p-i} .$$

D'où

$$\tilde{\Lambda} = t^p + \sum_{i=1}^{p} \tilde{u}_i(x) t^{p-i} + \tilde{s} = (1 + \tilde{q}).\Gamma + \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}_i(x,y) t^{p-i}$$

avec $\tilde{v}_i(x,y) = \tilde{u}_i(x) - y_i + \tilde{h}_i(x,y)$.

Or, si $x \in K$, $\dfrac{\partial \tilde{v}_i(x,y)}{\partial y_j} = \delta_{ij}$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une application $C^\infty : x \in M \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^p$, telle que, au voisinage de K : $\tilde{v}_i(x,y(x)) = 0$. Donc, si Λ et q sont les germes induits respectivement par $\tilde{\Lambda}$ et $\tilde{q}$ au voisinage de $K \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$: $\Lambda = [1 + q(x,t,y(x))]\Gamma(t,y(x))$.

Or $1 + q(x,t,y(x))$ est inversible dans $C^\infty_{K\times\mathbb{R}}(M \times \mathbb{R})$. On est ramené à démontrer (6) avec $\Gamma(t,y(x))$ au lieu de Λ : mais ceci résulte immédiatement du théorème 2.

LEMME 2.- Soient $\varphi : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs et unitaires et $\varphi' : R/I \to S/J$ une contraction de φ. Si $I \subset r(R)$ et s'il existe $t \in S$ tel que le triple (φ,φ',t) vérifie (D), alors φ' est une contraction adéquate de φ.

Démonstration.- Nous conservons les notations de la définition 5. Montrons que l'égalité (3) entraîne (4) et (5). Soient A_o une famille finie de générateurs de A sur R et C'_o une famille finie de générateurs de C sur S. Posons $C_o = \alpha[A_o] \cup C'_o = \{c_1,\dots,c_p\} \subset C$. D'après (3), il existe des $r_{ij} \in R$, $v_{ij} \in J$ et $b_i \in \beta[B]$, tels que

(7) $$\forall\, i \in [1,p] \ , \quad tc_i = \sum_{j=1}^{p} (\varphi(r_{ij}) + v_{ij})c_j + b_i \ .$$

Posons $\Lambda = \det|t.\delta_{ij} - \varphi(r_{ij}) - v_{ij}| = t^p + \sum_{i=1}^{p} \varphi(u_i)t^{p-i} + s$, avec $u_1,\dots,u_p \in R$ et $s \in J$. D'après (7)

(8) $$\forall\, i \in [1,p] \ , \quad \Lambda c_i \in \beta[B] \ .$$

D'après (3) et puisque C_o est une famille de générateurs de C sur S :

(9) $$t^{p-j}c_i = \alpha(a_{ij}) + \beta(b_{ij}) + \sum_{k=1}^{p} f_{ijk}c_k$$

où $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$, $f_{ijk} \in J$. Puisque le triple (φ,φ',t) vérifie (D)

(10) $$f_{ijk} = \Lambda.q_{ijk} + \sum_{\ell=1}^{p} \varphi(h_{ijk\ell})t^{p-\ell}$$

avec $q_{ijk} \in J$ et $h_{ijk\ell} \in I$. D'après (8), (9) et (10)

$$\sum_{k,\ell=1}^{p} \varphi(\delta_{ik}.\delta_{j\ell} - h_{ijk\ell})t^{p-\ell}.c_k \in \alpha[A] + \beta[B] .$$

Puisque $I \subset r(R)$, $\det|\delta_{ik}.\delta_{j\ell} - h_{ijk\ell}|$ est inversible dans R . Il en résulte que, $\forall\, i , j \in [1,p]$:

(11) $$t^{p-j}.c_i \in \alpha[A] + \beta[B] .$$

Les égalités (4) et (5) résultent alors facilement de (8), (11) et de l'hypothèse que (φ,φ',t) vérifie (D).

Les démonstrations des deux lemmes suivants sont laissées au lecteur.

LEMME 3.- <u>Soient</u> $\varphi : R \to S$, $\psi : S \to T$ <u>des homomorphismes d'anneaux commutatifs et unitaires et</u> $\varphi' : R/I \to S/J$, $\psi' : S/J \to T/K$ <u>des contractions adéquates de</u> φ <u>et</u> ψ <u>respectivement. Alors</u> $\psi' \circ \varphi'$ <u>est une contraction adéquate de</u> $\psi \circ \varphi$.

LEMME 4.- <u>Soit</u> $\varphi : R \to S$ <u>un homomorphisme surjectif d'anneaux commutatifs et unitaires. Si</u> $I \subset r(R)$, <u>la contraction</u> $\varphi' : R/I \to S/\varphi(I)$ <u>est adéquate.</u>

En utilisant le théorème de division et les lemmes précédents, on montre facilement que certaines contractions sont adéquates. En voici quelques exemples :

THÉORÈME 3.- <u>Soient</u> U <u>et</u> V <u>deux variétés</u> , N <u>une sous-variété fermée de</u> V , $\underline{f} : U \to V$ <u>une application</u> C^∞ <u>transverse sur</u> N <u>et telle que</u> $M = \underline{f}^{-1}(N) \neq \emptyset$. <u>Posons</u> $R = C^\infty_N(V)$, $S = C^\infty_M(U)$. <u>Soit</u> $\varphi : R \to S$ <u>l'application induite par</u> $\underline{f}^* : C^\infty(V) \to C^\infty(U)$. <u>Alors</u> $\varphi' : R/r(R) \to S/r(S)$ <u>est une contraction adéquate de</u> φ .

<u>Démonstration</u>.- Par le théorème du plongement de Whitney, nous pouvons supposer que U est une sous-variété fermée d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, rapporté à un système de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$. Soient f_{n+1} l'immersion : $x \in U \rightsquigarrow (x,\underline{f}(x)) \in \mathbb{R}^n \times V$ et, pour $i \in [1,n]$, f_i la projection :

$(x_1,\dots,x_i\ ;\ y) \in \mathbb{R}^i \times V = U_i \rightsquigarrow (x_1,\dots,x_{i-1}\ ;\ y) \in \mathbb{R}^{i-1} \times V = U_{i-1}$. Posons $U_o = V$, $U_{n+1} = U$, $M_o = N$, $M_{n+1} = M$, et pour $i \in [1,n]$, $M_i = (f_1 \circ \dots \circ f_i)^{-1} M_o$. Enfin, soit $\varphi_i : S_{i-1} = C^\infty_{M_{i-1}}(U_{i-1}) \to S_i = C^\infty_{M_i}(U_i)$ l'application induite par f_i^* .

Visiblement, $\varphi = \varphi_{n+1} \circ \dots \circ \varphi_1$. D'après le lemme 3, il suffit de montrer que, $\forall\, i \in [1,n+1]$, $\varphi_i' : S_{i-1}/r(S_{i-1}) \to S_i/r(S_i)$ est une contraction adéquate de φ_i . Or, pour $i \in [1,n]$, ceci résulte des lemmes 1 et 2 ; pour $i = n+1$, il suffit de montrer (lemme 4) que φ_{n+1} est surjectif et que $\varphi_{n+1}(r(S_n)) = r(S_{n+1})$. Nous devons montrer que toute fonction réelle et C^∞ sur la variété $f_{n+1}(U)$ se prolonge en une fonction C^∞ sur la variété $\mathbb{R}^n \times V$ (évident) et que toute fonction réelle et C^∞ sur $f_{n+1}(U)$, nulle sur $f_{n+1}(M)$, se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times V$, nulle sur $\mathbb{R}^n \times N$ (on remarque que $f_{n+1}(U) \cap (\mathbb{R}^n \times N) = f_{n+1}(M)$ et que, par hypothèse, $f_{n+1}(U)$ et $\mathbb{R}^n \times N$ se coupent transversalement. On prolonge localement et on utilise une partition de l'unité).

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> U <u>et</u> N <u>deux variétés et</u> $\underline{f} : U \to V = N \times \mathbb{R}$ <u>une application</u> C^∞ <u>et propre</u>. <u>Posons</u> $N_t = N \times \{t\}$; $M_t = \underline{f}^{-1}(N_t)$ <u>et supposons que</u> $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\underline{f}$ <u>soit transverse sur</u> N_t . <u>Soit</u> J_t (resp. I_t) <u>l'idéal de</u> $S = C^\infty(U)$ (resp. $R = C^\infty(V)$) <u>formé des fonctions nulles sur</u> M_t (resp. N_t). <u>Soient</u> A <u>un module de type fini sur</u> R , B <u>et</u> C <u>deux modules de type fini sur</u> S , $\alpha : A \to C$ <u>un</u> $\underline{f}$<u>*-homomorphisme et</u> $\beta : B \to C$ <u>un</u> S-<u>homomorphisme</u>. <u>Alors</u>, <u>si</u> $\forall\, t \in \mathbb{R} : \alpha[A] + \beta[B] + J_t.C = C$, <u>on a</u> $\alpha[A] + \beta[B] = C$.

<u>Démonstration</u>.- Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $M_t \neq \emptyset$. Posons $S_t = C^\infty_{M_t}(U)$, $R_t = C^\infty_{N_t}(V)$; $A_t = A \otimes_R R_t$, $B_t = B \otimes_S S_t$, $C_t = C \otimes_S S_t$. Soient $\alpha_t : A_t \to C_t$; $\beta_t : B_t \to C_t$ les homomorphismes induits par α et β respectivement. Par hypothèse $\alpha_t[A_t] + \beta_t[B_t] + r(S_t).C_t = C_t$. D'après le théorème 3 : $\alpha_t[A_t] + \beta_t[B_t] = C_t$. D'où le résultat à l'aide d'une partition de l'unité convenable sur V .

THÉORÈME 4.- Soient M et N deux variétés ; $f : M \to N$ une application C^∞, K et L deux fermés de M et N respectivement tels que $f(K) \subset L$. Soit $\varphi : R = C^\infty_L(N) \to S = C^\infty_K(M)$ l'homomorphisme induit par f^* et soit I un idéal de R contenu dans le radical. Alors la contraction $\varphi' : R/I \to S/\varphi(I).S$ est adéquate.

La démonstration, semblable à celle du théorème 3, est laissée au lecteur. En particulier, soit $\varphi : \mathcal{E}_n = C^\infty_o(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}_m = C^\infty_o(\mathbb{R}^m)$ un morphisme différentiable et soient $\underline{n}$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}_n (\mathcal{E}_n/\underline{n} \simeq \mathbb{R})$; J un idéal de $\mathcal{E}_m$: si $[\mathcal{E}_m/J] \otimes_\varphi \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{E}_m/J$ est un module de type fini sur $\mathcal{E}_n$. On retrouve le théorème de préparation de B. Malgrange [1].

Soit (X,x_o) un espace topologique pointé. Si Y est un espace topologique, on désignera simplement par Y^X l'ensemble des germes en x_o d'applications de X dans Y, continues au voisinage de x_o. Soient U et V deux variétés (on suppose U compacte) et soit $\underline{F}$ une application continue de X dans $C^\infty(U,V)$: $\underline{F}$ définit naturellement un homomorphisme $\underline{F}^* : C^\infty(V)^X \to C^\infty(U)^X$. Considérons les projections $\Pi_V : f \in C^\infty(V)^X \rightsquigarrow f(x_o) \in C^\infty(V)$, $\Pi_U : g \in C^\infty(U)^X \rightsquigarrow g(x_o) \in C^\infty(U)$. Visiblement $\underline{F}(x_o)^* \circ \Pi_V = \Pi_U \circ \underline{F}^*$.

THÉORÈME 5.- L'homomorphisme $\underline{F}(x_o)^* : C^\infty(V) \to C^\infty(U)$ est une contraction adéquate de $\underline{F}^* : C^\infty(V)^X \to C^\infty(U)^X$.

La démonstration utilise le théorème 2 et un dévissage analogue à celui de la démonstration du théorème 3. Nous admettrons ce résultat.

III. La stabilité infinitésimale entraîne la stabilité homotopique.

Soient M et N deux variétés sans bord. Supposons que M est compacte et soit $f : M \to N$ une application C^∞, infinitésimalement stable. Par hypothèse

$$\Phi(f) = \alpha_f[\Phi(N)] + \beta_f[\Phi(M)] . \tag{12}$$

Nous devons montrer que f est homotopiquement stable, c'est-à-dire (définition 4) construire une famille continue d'homotopies stables $(F_{f'}, G_{f'}, H_{f'})$. Nous construirons d'abord la famille $F_{f'}$ puis nous la "stabiliserons" à l'aide du théorème de préparation.

Construction de $F_{f'}$.

Posons $U = M \times [0,1]$, $V = N \times [0,1]$. Nous cherchons un voisinage X de f dans $C^\infty(M,N)$ et une application continue $F : f' \in X \rightsquigarrow F_{f'} \in C^\infty(U,N)$ telle que $\forall f' \in X$, $\forall x \in M$, $\forall t \in [0,1]$, $F_{f'}(x,0) = F_f(x,t) = f(x)$ et $F_{f'}(x,1) = f'(x)$.

Pour cela, on remarque qu'il existe un voisinage W de la diagonale Δ_N de $N \times N$ et une application C^∞, $\gamma : W \times [0.1] \to N$ telle que

$$\forall (u,v) \in W , \quad \gamma(u,v,0) = u \quad \text{et} \quad \gamma(u,v,1) = v$$

$$\forall\ t \in [0,1] \ \text{et} \ \forall u \in N , \quad \gamma(u,u,t) = u .$$

On choisit $X = \{f' \in C^\infty(M,N) ; \forall x \in M , (f(x),f'(x)) \in W\}$ et, si $f' \in X$, $F_{f'}(x,t) \equiv \gamma(f(x),f'(x),t)$.

Visiblement, X est un voisinage ouvert de f ; l'application F est continue et vérifie les conditions demandées.

Construction de $G_{f'}$ et $H_{f'}$.

a) Soient $\Pi_M : U \to M$, $\Pi_N : V \to N$ les projections canoniques et désignons par $\underline{f}$ l'application $(x,t) \in U \to (f(x),t) \in V$. Posons $R_1 = C^\infty(V)$, $S_1 = C^\infty(U)$, $A_1 = \Phi(\Pi_N) = \{\eta \in C^\infty(V,\tau(N)) ; p_N \circ \eta = \Pi_N\}$, $B_1 = \Phi(\Pi_M) = \{\xi \in C^\infty(U,\tau(M)) ; p_M \circ \xi = \Pi_M\}$, $C_1 = \Phi(\Pi_N \circ \underline{f}) = \{\zeta \in C^\infty(U,\tau(N)) ; p_N \circ \zeta = \Pi_N \circ \underline{f}\}$
[$p_M : \tau(M) \to M$ et $p_N : \tau(N) \to N$ désignent les projections canoniques].

Visiblement, A_1 est un module de type fini sur R_1 ; B_1 et C_1 sont des modules de type fini sur S_1. On définit un $\underline{f}^*$-homomorphisme $\alpha_1 : \eta \in A_1 \rightsquigarrow \eta \circ \underline{f} \in C_1$ et un S_1-homomorphisme $\beta_1 : \xi \in B_1 \rightsquigarrow \tau(f) \circ \xi \in C_1$. Si $J_{1,t}$ est l'idéal de S_1 formé des fonctions nulles sur $M \times \{t\} = \underline{f}^{-1}(N \times \{t\})$, l'hypothèse (12) équivaut à $\forall\, t \in [0,1]$, $\alpha_1[A_1] + \beta_1[B_1] + J_{1,t}.C_1 = C_1$.

D'après le corollaire du théorème 3 :

$$\alpha_1[A_1] + \beta_1[B_1] = C_1 \,. \tag{13}$$

b) Nous employons les notations du théorème 5. Considérons X comme un espace topologique pointé par $x_o = f$ et soit $\underline{F}$ l'application continue $f' \in X \rightsquigarrow \underline{F}_{f'} \in C^\infty(U,V)$, définie par $\underline{F}_{f'}(x,t) \equiv (F_{f'}(x,t),t)$; on a $\underline{F}(x_o) = \underline{f}$.

Posons $R_2 = R_1^X$, $S_2 = S_1^X$, $A_2 = A_1^X$, $B_2 = B_1^X$, $C_2 = \{\zeta \in C^\infty(U,\tau(N))^X$; ζ admet un représentant $\tilde{\zeta}$ sur un voisinage Y de f tel que, $\forall f' \in Y$, $p_N \circ \tilde{\zeta}_{f'} = \Pi_N \circ \underline{F}_{f'}\}$ (les espaces R_1, S_1, ... sont munis de la topologie fine). On voit facilement que A_2 est un module de type fini sur R_2 ; B_2 et C_2 sont des modules de type fini sur S_2.

On définit un $\underline{F}^*$-homomorphisme $\alpha_2 : A_2 \to C_2$ comme suit : si $\tilde{\eta}$ est un représentant de $\eta \in A_2$ sur un voisinage Y de $x_o = f$, $\alpha_2(\eta)$ sera le germe en x_o de l'application $f' \in Y \rightsquigarrow \tilde{\eta}_{f'} \circ \underline{F}_{f'} \in C^\infty(U,\tau(N))$. De même, on définit un S_2-homomorphisme $\beta_2 : B_2 \to C_2$; si $\tilde{\xi}$ est un représentant de $\xi \in B_2$ sur un voisinage Y de x_o, $\beta_2(\xi)$ sera le germe en x_o de l'application $f' \in Y \rightsquigarrow \beta_2(\tilde{\xi})_{f'} \in C^\infty(U,\tau(N))$ où, $\forall t \in [0,1]$, $\beta_2(\tilde{\xi})_{f',t} = \tau(F_{f',t}) \circ \tilde{\xi}_{f',t}$.

Soient I_2, J_2 les noyaux respectifs des projections canoniques $R_2 \to R_1$; $S_2 \to S_1$. Visiblement, $A_2/I_2.A_2 = A_1$; $B_2/J_2.B_2 = B_1$; $C_2/J_2.C_2 = C_1$ et α_1, β_1 sont les applications induites canoniquement par α_2, β_2. Donc d'après (13), $\alpha_2[A_2] + \beta_2[B_2] + J_2.C_2 = C_2$.

Puisque (théorème 5), $\underline{f}^* : R_1 \to S_1$ est une contraction adéquate de $\underline{F}^* : R_2 \to S_2$:

$$\alpha_2[I_2.A_2] + \beta_2[J_2.B_2] = J_2.C_2 \,. \tag{14}$$

c) Soit $\frac{dF}{dt}$ l'application de X dans $C^\infty(U,\tau(N))$ définie, si $f' \in X$ et $t \in [0,1]$, par $(\frac{dF}{dt})_{f',t} = \frac{\partial F_{f',t}}{\partial t}$. Puisque $F_f(x,t) \equiv f(x), (\frac{dF}{dt})(f) = 0$. On voit donc que le germe de $\frac{dF}{dt}$ en $x_o = f$, appartient à $J_2.C_2$. D'après (14) et en diminuant si nécessaire le voisinage X de f

$$\frac{\partial F_{f',t}}{\partial t} = \tilde{\eta}_{f',t} \circ F_{f',t} + \tau(F_{f',t}) \circ \tilde{\xi}_{f',t} = \alpha_{F_{f',t}}(\tilde{\eta}_{f',t}) + \beta_{F_{f',t}}(\tilde{\xi}_{f',t}) \tag{15}$$

où $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\eta}$ sont des applications continues de X dans $C^\infty(U,\tau(M))$ et $C^\infty(V,\tau(N))$ respectivement, telles que :

$$\tilde{\eta}_f = 0 \quad ; \quad \tilde{\xi}_f = 0 . \tag{16}$$

D'après (16) et le théorème d'existence et d'unicité pour les courbes intégrales d'un champ de vecteurs dépendant du temps, on voit qu'il existe (en diminuant X si nécessaire) des applications continues $G : f' \in X \rightsquigarrow G_{f'} \in C^\infty(U,M)$, $H : f' \in X \rightsquigarrow H_{f'} \in C^\infty(V,N)$ telles que, $\forall t \in [0,1]$ et $\forall f' \in X$:

$$\begin{aligned} &G_{f',o} = G_{f,t} = 1_M \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_{f',t}}{\partial t} = -\tilde{\xi}_{f',t} \circ G_{f',t} \\ &H_{f',o} = H_{f,t} = 1_N \quad \text{et} \quad \frac{\partial H_{f',t}}{\partial t} = \tilde{\eta}_{f',t} \circ H_{f',t} \\ &G_{f',t} \in \mathrm{Diff}(M) \quad \text{et} \quad H_{f',t} \in \mathrm{Diff}(N) . \end{aligned} \tag{17}$$

D'après (15), (17) et l'équivalence de (1) et (2), $\forall\, t \in [0,1]$ et $\forall\, f' \in X$

$$f = H^{-1}_{f',t} \circ F_{f',t} \circ G_{f',t} .$$

Nous avons démontré que f est homotopiquement stable, et donc <u>a fortiori</u> stable.

IV. La stabilité entraîne la stabilité infinitésimale.

Soient M et N deux variétés sans bord. Supposons que M est compacte et soit n la dimension de N. Si $f : M \to N$ est une application stable, démontrons que :

$$\Phi(f) = \alpha_f[\Phi(N)] + \beta_f[\Phi(M)] \,. \tag{18}$$

Soit y un point de N et soit P un sous-ensemble fermé non vide de la fibre $Y = f^{-1}(y)$ supposée elle-même non vide. Posons $R = C^\infty(N)$, $S = C^\infty(M)$, $R_y = C^\infty_{\{y\}}(N)$, $S_P = C^\infty_P(M)$, $\underline{m}_y = r(R_y)$, $\underline{m}_P = r(S_P)$, $\Phi_P(f) = \Phi(f)\otimes_S S_P$, $\Phi_P(M) = \Phi(M)\otimes_S S_P$, $\Phi_y(N) = \Phi(N)\otimes_R R_y$. Soient $\varphi_P : R_y \to S_P$, $\alpha_P : \Phi_y(N) \to \Phi_P(f)$, $\beta_P : \Phi_P(M) \to \Phi_P(f)$ les homomorphismes induits par f^*, α_f et β_f respectivement.

Il suffit de démontrer l'égalité (18) au voisinage de chaque fibre Y (on globalise à l'aide d'une partition de l'unité dans N), c'est-à-dire de démontrer que

$$\Phi_Y(f) = \alpha_Y[\Phi_y(N)] + \beta_Y[\Phi_Y(M)] \,. \tag{19}$$

Soit P un sous-ensemble fini (non vide) de Y. Par des arguments de transversalité (commentés succintement à la fin du paragraphe), on démontre d'abord que

$$\Phi_P(f) = \alpha_P[\Phi_y(N)] + \beta_P[\Phi_P(M)] + \varphi_P(\underline{m}_y).\Phi_P(f) + (\underline{m}_P)^{n+1}.\Phi_P(f) \,. \tag{20}$$

Or d'après le théorème 4, la contraction $\varphi'_P : \mathbb{R}_y = R_y/\underline{m}_y \to S_P/\varphi_P(\underline{m}_y).S_P$ est adéquate. Puisque $\underline{m}_P$ est un idéal de type fini de S_P et $\Phi_y(N)$ un module libre de dimension n sur R_y, d'après la remarque b) du § II :

$$\Phi_P(f) = \alpha_P[\Phi_y(N)] + \beta_P[\Phi_P(M)] \,. \tag{21}$$

Soit P_y l'ensemble des points $x \in f^{-1}(y)$ tels que :

$$\Phi_x(f) \supsetneq \beta_x[\Phi_x(M)] \,.$$

On a $\operatorname{card}(P_y) \leq n$. Sinon, soit P un sous-ensemble de P_y tel que $\operatorname{card}(P) = n + 1$. Visiblement, $d_P = \dim_{\mathbb{R}_y} \{\Phi_P(f)/\beta_P[\Phi_P(M)]\} \otimes_{R_y} \mathbb{R}_y \geq n + 1$. Mais, d'après (21) et puisque $\Phi_y(N)$ est un module libre de dimension n

sur R_y , $d_P \leq n$. On aboutit à une contradiction.

Soit $\zeta \in \Phi_y(f)$, désignons par $\tilde{\zeta} \in \Phi(f)$ un représentant de ζ . D'après l'égalité (21) appliquée à P_y au lieu de P , on voit qu'il existe $\tilde{\eta} \in \Phi(N)$ et $\tilde{\xi} \in \Phi(M)$ tels que $\tilde{\zeta}_1 = \tilde{\zeta} - \alpha_f(\tilde{\eta}) - \beta_f(\tilde{\xi}) = 0$ au voisinage de P_y . Donc $\tilde{\zeta}_1$ appartient localement au module $\beta_f[\Phi(M)]$ en tout point de la fibre Y ; désignons par ζ_1 et ξ les germes induits en Y par $\tilde{\zeta}_1$ et $\tilde{\xi}$ respectivement, par η le germe induit en y par $\tilde{\eta}$. Une partition de l'unité montre immédiatement que $\zeta_1 \in \beta_Y[\Phi_Y(M)]$. Ainsi

$$\zeta = \alpha_Y(\eta) + \beta_Y(\xi) + \zeta_1 \in \alpha_Y[\Phi_y(N)] + \beta_Y[\Phi_Y(M)] ,$$

C.Q.F.D.

<u>Démonstration de (20)</u>.

Pour simplifier, nous suggérons la démonstration lorsque P est réduit à un point x . Si f , $f' \in C^\infty(M,N)$, x , $x' \in M$, $y = f(x)$, $y' = f'(x')$, nous dirons que le germe de f en x est <u>algébriquement équivalent</u> au germe de f' en x' (on écrira $f_x \simeq f'_{x'}$) si les algèbres $C^\infty_x(M)/f^*(\underline{m}_y).C^\infty_x(M)$ et $C^\infty_{x'}(M)/f'^*(\underline{m}_{y'}).C^\infty_{x'}(M)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres différentiables. Un sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $J^n(M,N)$ est <u>algébriquement invariant</u> si, $\forall f$, $f' \in C^\infty(M,N)$ et $\forall x$, $x' \in M$ tels que $f_x \simeq f'_{x'}$, l'hypothèse $J^n(f)(x) \in \mathcal{V}$ implique $J^n(f')(x') \in \mathcal{V}$.

Soit $O_x(f)$ le plus petit sous-ensemble algébriquement invariant de $J^n(M,N)$ contenant $J^n(f)(x)$. On vérifie facilement que $O_x(f)$ est un sous-fibré de $J^n(M,N)$ dont la fibre type est l'orbite d'un point de $J^n(m,n)$ (fibre type de $J^n(M,N)$) sous l'action d'un groupe de Lie (qui contient comme sous-groupe le groupe structural de $J^n(M,N)$). On en déduit de façon classique que $O_x(f)$ est un fibré lisse. Puisque f est stable et d'après le théorème de transversalité [3], il existe $f' \in C^\infty(M,N)$, $h \in \mathrm{Diff}(N)$ et $g \in \mathrm{Diff}(M)$, tels que $J^n(f')$ soit transverse sur $O_x(f)$ et $f = h^{-1} \circ f' \circ g$. On en déduit que $J^n(f)$ est transverse en x à $O_x(f)$: l'égalité (20) est la traduction de cette transversalité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. MALGRANGE - Le théorème de préparation en géométrie différentiable. Séminaire Cartan (1962/1963).

[2] J. MATHER - Thèse. Princeton, N. J., à paraître aux Ann. Maths.

[3] R. THOM et H. LEVINE - Singularities of differentiable mappings. Bonner mathematische Schriften 6, Bonn.