JEAN-PIERRE KAHANE

Quotients de fonctions définies-négatives

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 315, p. 33-44

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__33_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année, 1966/67, n° 315 Novembre 1966

QUOTIENTS DE FONCTIONS DÉFINIES-NÉGATIVES

par Jean-Pierre KAHANE

(d'après Beurling et Deny)

0. Il s'agit de travaux de Beurling et Deny, qui datent de 1962 et qui n'ont jamais été publiés. On espère que les auteurs s'accorderont à trouver la présente rédaction mauvaise, et à en établir une meilleure sous leur nom.

I - On s'intéresse en théorie du potentiel à deux espaces de Hilbert en dualité, W et W', dont les éléments s'appellent respectivement distributions d'énergie finie et potentiels d'énergie finie (l'énergie est le carré de la norme). On suppose généralement $\mathcal{D} \subset W \subset \mathcal{D}'$, $\mathcal{D} \subset W' \subset \mathcal{D}'$, et que la forme bilinéaire $(.,.)_{W,W'}$ qui définit la dualité satisfait

$$(\theta , u)_{W,W'} = \theta (u) \quad \text{pour} \quad \theta \in W,\ u \in \mathcal{D}.$$

Pour chaque $\theta \in W$, l'élément u de W' tel que

$$(\theta , u)_{W,W'} = (u^{\theta} , \bar{u})_{W'} \quad \text{pour tout} \quad u \in W'$$

(le second nombre étant le produit scalaire dans W') s'appelle le potentiel de θ. L'application

$$K : \quad \theta \to u^{\theta}$$

s'appelle le noyau. Les potentiels d'énergie finie s'appellent aussi des K-potentiels. Les potentiels de mesures positives (d'énergie finie) s'appellent des potentiels purs.

On dit que K satisfait à la synthèse spectrale si toute $\theta \in W$ est approchable dans W par des combinaisons linéaires de mesures positives portées par son support (et d'énergie finie).

On dit que K satisfait au principe classique du maximum si, pour toute $\theta \in \mathcal{D}^{+}$ (c'est-à-dire $\theta \in \mathcal{D}$ et $\theta \geqq 0$), u^{θ} appartient à $\mathcal{D}$ et atteint son maximum sur le support de f.

II - Voici un exemple. Les fonctions et distributions sont définies sur le cercle $\mathbf{T}$. On donne une suite positive $\hat{K} = \{\hat{K}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, telle qu'elle et son inverse $\frac{1}{\hat{K}}$ soient toutes deux à croissance lente. On définit W comme l'ensemble des θ dont les coefficients de Fourier satisfont à

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(n)|^2 \hat{K}(n) = ||\theta||_W^2 < \infty ,$$

W' comme l'ensemble des u satisfaisant à

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}(n)|^2 \frac{1}{\hat{K}(n)} = ||u||_{W'}^2 < \infty ,$$

et l'on pose

$$(\theta , u)_{W,W'} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}(n)\ \hat{u}(-n).$$

Le noyau est alors défini par

$$\widehat{u^\theta}(n) = \hat{K}(n)\ \hat{\theta}(n)$$

ou encore

$$(1) \qquad u^\theta = K * \theta, \quad K \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{K}(n)\, e^{2\pi int} .$$

On identifie la distribution K au noyau.

L'étude de Beurling et Deny concerne essentiellement cet exemple, auquel nous nous tiendrons désormais.

III - On dit que $\psi = \{\psi(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est définie-négative si, pour tout k-uple d'entiers $n_1, n_2, \dots n_k$, la forme hermitienne

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (\psi(n_i) + \overline{\psi(n_j)} - \psi(n_i - n_j))\, \rho_i \overline{\rho_j}$$

est positive. Les suites définies négatives paires sont les suites de la forme

$$(2) \qquad \psi(n) = a\, n^2 + b + \int \sin^2 \pi nt\ d\,\sigma(t),$$

où $a \geq 0$, $b \geq 0$, et σ est une mesure positive sur $\mathbf{T} \setminus \{0\}$, telle que $\int_{-1/2}^{1/2} t^2\, d\,\sigma(t) < \infty$ (formule de Lévy-Khintchine). Dans la suite, nous supposerons toujours les suites définies négatives non identiquement nulles.

A partir de la définition ou de (2), on vérifie les propositions suivantes :

(i) $e^{-t\psi}$ est définie positive pour chaque $t > 0$, et $\frac{1}{\psi}$ est définie positive si $\psi(0) \neq 0$.

(ii) $\psi \geqq \psi(0)$, et $\psi(1) > \psi(0)$ sauf si ψ est constante

(iii) $\psi(n) \leqq n^2 \, \psi(1)$

(iv) $\lim\limits_{n \to \infty} n^{-2} \, \psi(n) = a$; par conséquent, si $\overline{\lim} \dfrac{\hat{K}(n)\, \psi(n)}{n^2} \geqq c$, la suite $\psi(n) - c\, n^2$ est définie négative.

Voici les théorèmes principaux.

THÉORÈME I. Soient ψ_o et ψ_1 deux suites définies négatives paires, telles que

$$(3) \quad \underline{\lim}_{n \to \infty} \psi_o(n) > 0, \quad \underline{\lim}_{n \to \infty} \psi_1(n) > 0,$$

et $\hat{K}$ une suite strictement positive telle que $\hat{K}\psi_o = \psi_1$. Alors le noyau K défini par (1) satisfait à la synthèse spectrale.

THÉORÈME II.

1. Soient ψ_o et ψ_1 deux suites définies négatives paires, et $\hat{K}$ une suite positive telle que $\hat{K}\psi_o = \psi_1$ et $\hat{K}(n) = 1$ lorsque $\psi_o(n) = \psi_1(n) = 0$; alors le noyau K satisfait au principe classique du maximum.

2. Réciproquement, soit K une mesure positive, symétrique satisfaisant au principe classique du maximum ; alors $\hat{K}\psi_o = \psi_1$, où ψ_o et ψ_1 sont deux suites définies négatives paires, et $\psi_o(n) \neq 0$ pour tout $n \neq 0$.

On renvoie à la fin les commentaires et l'historique, pour donner tout de suite les démonstrations.

IV - On appelle noyau élémentaire tout noyau de la forme

$$K_\sigma = \delta + \sigma + \sigma^{*2} + \ldots = (\delta - \sigma)^{*-1},$$

inverse de convolution de $\delta - \sigma$, où σ est une mesure positive symétrique de masse < 1. Les K_σ-potentiels purs sont les distributions u telles que $u = K_\sigma * \mu$ pour une mesure $\mu \geqq 0$ d'énergie finie, autrement dit telles que $u - \sigma * u$ soit une mesure $\geqq 0$

d'énergie finie. Comme d'ailleurs

$$0 < \underline{\lim}\ \hat{K}_\sigma(n) \leqq \overline{\lim}\ \hat{K}_\sigma(n) < \infty ,$$

les potentiels et les mesures d'énergie finie sont simplement des fonctions de carré sommable. Les K_σ-potentiels purs sont donc les $u \in L^2$ telles que $u \geqq \sigma * u$. On en déduit les propositions qui suivent.

<u>Si</u> u <u>et</u> v <u>sont deux</u> K_σ <u>-potentiels purs</u>, inf(u,v) <u>est un</u> K_σ <u>-potentiel pur</u> (principe de l'enveloppe inférieure).

En effet, $\sigma * \inf(u,v)$ est inférieure à u et à v.

<u>Si</u> $u = K_\sigma * \mu$ <u>et</u> v <u>sont deux</u> K_σ <u>-potentiels purs, tels que</u> $u \leqq v$ <u>p.p. sur le support</u> S_μ <u>de</u> μ, <u>on a</u> $u \leqq v$ <u>p.p.</u> (principe de domination).

En effet, inf(u,v) est un K_σ-potentiel pur, soit $K_\sigma * \nu$, $\nu \geqq 0$. On a $K_\sigma * \nu \leqq K_\sigma * \mu$, avec égalité sur S_μ. Donc $\sigma * K_\sigma * \mu \leqq \sigma * K_\sigma * \nu$, c'est-à-dire (puisque $\sigma * K_\sigma = \delta - K_\sigma$) $K_\sigma * \nu - \nu \leqq K_\sigma * \mu - \mu$. Cette inégalité vaut en particulier sur S_μ, où $K_\sigma * \nu = K_\sigma * \mu$. Donc $\nu \geqq \mu$ (on le vérifie sur S_μ), donc $K_\sigma * \nu \geqq K_\sigma * \mu$, et finalement $\inf(u,v) = u$ p.p. .

V - Sans nous limiter aux noyaux élémentaires, supposons encore

$$0 < \alpha < \hat{K} < \beta < \infty ,$$

de sorte que $W = W' = L^2$ (mais les normes sont différentes). Soit E un compact de mesure positive sur le cercle, v une fonction dans L^2, $v \geqq 0$. Soit μ la fonction dans L_E^{2+} (c'est-à-dire $\mu \in L^2$, $\mu \geqq 0$, μ portée par E) qui minimise l'intégrale de Gauss

$$I(\mu) = ||\mu||_W^2 - 2\int_E \mu v ;$$

μ s'appelle la K-mesure d'équilibre et $K * \mu = u$ le K-potentiel d'équilibre de E par rapport à v. Pour toute $\phi \in L_E^{2+}$, on a

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}(I(\mu + \lambda\phi) - I(\mu)) = 2\int_E (u - v)\phi .$$

Donc

(4) $u \geqq v$ p.p. sur E

(5) $u = v$ p.p. sur S_μ.

On dit que l'équilibre a lieu lorsque $u = v$ p.p. sur E.

Remarquons que

$$0 \geqq I(\mu) \geqq ||\mu||_W^2 - 2||\mu||_W||v||_{W'} \geqq - ||v||_{W'}^2$$

donc en particulier

$$(6) \qquad ||\mu||_W \leqq 2||v||_{W'} .$$

De plus, sous l'hypothèse $v \geqq 1$ sur E, on a

$$I(\mu) \geqq ||\mu||_W^2 - 2\int_E \mu,$$

donc

$$(7) \qquad 2\int_E \mu \leqq ||\mu||_W^2 + ||v||_{W'}^2 \leqq 5||v||_{W'}^2 .$$

VI - Supposons que K soit un quotient de convolution de deux noyaux élémentaires K_σ et K_τ , c'est-à-dire

$$\hat{K} = \frac{1 - \hat{\tau}}{1 - \hat{\sigma}} ,$$

où σ et τ sont deux mesures positives symétriques, de masses < 1.
On a alors le théorème d'équilibre :

<u>Pour tout</u> K_σ-<u>potentiel pur</u> v, <u>l'équilibre a lieu sur tout</u> E, <u>c'est-à-dire que le</u> K-<u>potentiel d'équilibre de</u> E <u>par rapport à</u> v <u>est égal à</u> v <u>p.p. sur</u> E.

Preuve. Soit $v = K_\sigma * \nu$, et $u = K*\mu = K_\sigma *(\delta - \tau)*\mu$ comme au paragraphe précédent. D'après (5),

$$K_\sigma*\mu = K_\sigma*\tau*\mu + K_\sigma*\nu \quad \text{p.p. sur } S_\mu .$$

Donc, d'après le principe de domination,

$$K_\sigma*\mu \leqq K_\sigma*\tau*\mu + K_\sigma*\nu \quad \text{p.p.},$$

soit $u \leqq v$ p.p. Compte tenu de (4), on a bien $u = v$ p.p. sur E.

<u>Corollaire</u>. <u>Pour tout</u> K_σ-<u>potentiel pur</u> v, <u>et tout compact</u> E <u>de mesure positive</u>, <u>la</u> K-<u>mesure d'équilibre</u> μ <u>de</u> E <u>par rapport à</u> v <u>satisfait</u> $(\mu; f)_W = \int_E v \bar{f}$ <u>pour toute</u> $f \in L_E^2$.

VII - Soit enfin K un noyau satisfaisant l'hypothèse du théorème I. Supposons d'abord

$\psi_o(0) \neq 0$, $\psi_1(0) \neq 0$, et écrivons

$$\hat{K} = \hat{K}_o \hat{K}_1^{-1} \quad , \hat{K}_i = \psi_i^{-1} \quad (i = 0, 1).$$

Par la propriété (i) des suites définies négatives (§3), K_o et K_1 sont deux mesures positives. On définit les mesures approchées

$$\hat{K}_{i,p} = \left(\frac{\psi_i}{1+\frac{\psi_i}{p}}\right)^{-1} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{\psi_i}{p}}\right)^{-1} \qquad (i = 0, 1).$$

Toujours à cause de (i), §3, ce sont, au facteur $\frac{1}{p}$ près, des noyaux élémentaires. Le noyau K_p défini par

$$\hat{K}_p = \hat{K}_{0,p} \hat{K}_{1,p}^{-1}$$

satisfait donc les hypothèses du §6. A l'aide du corollaire qui termine le §6, on va démontrer la proposition suivante.

Pour tout K_o-potentiel indéfiniment dérivable v, $v \geq 1$, et tout ouvert ω sur le cercle, il existe dans W une mesure positive μ, portée par $\bar{\omega}$, telle que

$$(8) \qquad (\mu, \theta)_W = \bar{\theta}(v)$$

pour toute distribution $\theta \in W$, à support dans ω. De plus, l'énergie $||\mu||_W^2$ est majorée indépendamment de ω.

Preuve. Comme $(1 + \frac{\psi_o}{p})^{-1}$ est transformée de Fourier d'une mesure positive ((i) §3), K_o est la convolution de $K_{o,p}$ et d'une mesure positive, donc v est un $K_{o,p}$-potentiel pur. D'après le corollaire du §6, la K_p-mesure d'équilibre de $\bar{\omega}$ par rapport à v, soit μ_p, satisfait à

$$(9) \qquad (\mu_p, f)_{W_p} = \int_\omega v \bar{f}$$

pour toute $f \in \mathcal{D}_\omega$ (indéfiniment dérivable à support dans ω). D'après (7),

$$(10) \qquad 2\int \mu_p \leq 5||v||^2_{W'_p} = 5 \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{v}(n)|^2(\hat{K}_p(n))^{-1} .$$

Or, pour tout p, on a

$$(11) \qquad \inf\left(\frac{\psi_o}{\psi_1}, \frac{\psi_1}{\psi_o}\right) \leq \hat{K}_p \leq \sup\left(\frac{\psi_o}{\psi_1}, \frac{\psi_1}{\psi_o}\right)$$

(inégalités immédiates en distinguant les cas $\psi_o \geq \psi_1$, $\psi_o \leq \psi_1$). D'après les propriétés (ii) et (iii) du §3, et le fait que $\hat{\mathrm{v}}$ est à décroissance rapide, le second membre de (10) est majoré indépendamment de p et de ω. Donc les masses totales des μ_p sont bornées. De même, d'après (6), les $||\mu_p||^2_{W_p}$ sont bornées, indépendamment de p et de ω.

Soit μ une limite faible d'une suite convenable de μ_p ; c'est une mesure positive portée par $\bar{\omega}$. Comme, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $\lim \hat{\mu}_p(n) = \hat{\mu}(n)$ et $\lim \hat{K}_p(n) = \hat{K}(n)$, on a

$$||\mu||^2_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)|^2 \hat{K}(n) \leq \underline{\lim} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}_p(n)|^2 \hat{K}_p(n) = \underline{\lim}||\mu_p||^2_{W_p},$$

donc $\mu \in W$ et son énergie est bornée indépendamment de ω. Si $f \in \mathcal{D}_\omega$,

$$(\mu, f)_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\mu}(n)\, \overline{\hat{f}(n)}\, \hat{K}(n) = \lim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\mu}_p(n)\, \overline{\hat{f}(n)}\, \hat{K}_p(n)$$

en vertu de (11), de la propriété (iii) du §3 et de la décroissance rapide de $\hat{f}$. D'après (9), on a

$$(\mu, f)_W = \int_\omega v\, \bar{f}$$

pour toute $f \in \mathcal{D}_\omega$, et on obtient (8) par régularisation de θ.

VIII. Démontrons le théorème I. Supposons encore $\psi_o(0) \neq 0$, $\psi_1(0) \neq 0$. Etant donné un compact E sur le cercle, désignons par W_E le sous-espace formé par les distributions d'énergie finie portées par E, et par M_E le cône constitué par les mesures positives dans W_E. Il s'agit de montrer que si $\theta \in W'_E$ et $\theta \perp M_E$, $\theta = 0$.

Soit v un K_o-potentiel pur indéfiniment dérivable, $v \geq 1$ sur E. Soit ω_m une suite d'ouverts décroissants dont l'intersection soit E, tels que $v \geq 1$ sur ω_m. En appliquant la proposition du §7, on a pour chaque m une mesure positive μ_m, portée par $\bar{\omega}_m$, telle que

$$(\mu_m, \theta)_W = \bar{\theta}(v)$$

et $\sup_m ||\mu_m||_W < \infty$. Quitte à restreindre la suite μ_m à une sous suite, μ_m tend faiblement dans W vers une limite μ. On a $\mu \in M_E$, donc $(\mu, \theta)_W = 0$, donc $\bar{\theta}(v) = 0$.

Or toute $g \in \mathcal{D}$ est combinaison linéaire de fonctions telles que v. En effet, en désignant par Δ_0 la distribution telle que $\hat{\Delta}_0 = \psi_0$ (cf. (iii) §3), on a $g = K_0 * \Delta_0 * g$, et $\Delta_0 * g$ est une combinaison linéaire de fonctions $\in \mathcal{D}^+$ minorées par $(\hat{K}_0(0))^{-1}$ (de façon que leur K_0-potentiels soient minorées par 1).

On a donc $\bar{\theta}(g) = 0$ pour toute $g \in \mathcal{D}$, et $\theta = 0$, ce qui prouve le théorème sous l'hypothèse additionnelle $\psi_0(0) \neq 0$, $\psi_1(0) \neq 0$.

Remarquons que la condition du théorème ne change pas si l'on change $\hat{K}$ en une suite équivalente $\hat{K}_1$ (c'est-à-dire telle que $\frac{\hat{K}}{\hat{K}_1}$ soit compris entre deux nombres > 0). Si $\psi_0(0) = \psi_1(0) = 0$, l'hypothèse (3) entraîne que $\hat{K}_1 = \frac{1+\psi_1}{1+\psi_0}$ est équivalente à $\hat{K}$. Le théorème I se trouve donc démontré sans restriction.

IX - La première partie du théorème II se démontre à l'aide des mêmes étapes, mais elle est beaucoup plus facile.

1ère étape : $K = K_\sigma * (\delta - \tau)$, où K_σ est un noyau élémentaire, et τ une mesure positive de masse < 1. Si l'on a $f \in \mathcal{D}^+$ et $K * f \leq a$ sur S_f, on a

$$K_\sigma * f \leq a + K_\sigma * \tau * f = K_\sigma * \nu \quad (\nu \geq 0) \text{ sur } S_f, \text{ donc partout}$$

d'après le principe de domination (§4). Donc $K * f$ atteint bien son maximum sur S_f.

2ème étape : On suppose $\psi_0(0) \neq 0$, $\psi_1(0) \neq 0$, et on approche K par des noyaux K_p du §7.

Chaque $K_p * f$ atteint son maximum sur S_f, et $K_p * f$ tend vers $K * f$ dans $\mathcal{D}$.

3ème étape : On suppose $\psi_0(0) = 0$, $\psi_1(0) = 0$, et (ce qui n'est pas une restriction) $\hat{K}(0) = 1$. On approche K par des noyaux K_ε tels que

$$\hat{K}_\varepsilon = \frac{\varepsilon+\psi_1}{\varepsilon+\psi_0} \ .$$

Chaque $K_\varepsilon * f$ atteint son maximum sur S_f et, comme $\hat{K}_\varepsilon$ est compris entre 1 et $\hat{K}$, $K_\varepsilon * f$ tend vers $K * f$ dans $\mathcal{D}$ quand $\varepsilon \to 0$.

X - La seconde partie du théorème II sera démontrée à l'aide de la proposition suivante, dont on trouvera un énoncé plus général, et la démonstration, dans [5] (théorème 3).

<u>Soit</u> K <u>une mesure positive. Dire que</u> K <u>satisfait au principe classique du maximum</u>,

c'est dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une mesure positive σ_ε de masse totale 1, ne chargeant pas l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$, et telle que $K*\sigma_\varepsilon \geq K$ hors de cet intervalle (principe du pseudo-balayage).

Dans la suite, on désigne par α_ε et β_ε les parties positive et négative de $K*(\delta-\sigma_\varepsilon)$. Ainsi

$$(12) \quad K*(\delta-\sigma_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon .$$

Supposons que K satisfait à l'hypothèse de théorème II; comme K est symétrique, on peut choisir les mesures σ_ε, α_ε, β_ε symétriques. Comme $\hat{\sigma}_\varepsilon(0) = 1$, on a $\hat{\alpha}_\varepsilon(0) = \hat{\beta}_\varepsilon(0)$. De plus, K majorant le premier membre de (12), on a $\hat{\alpha}_\varepsilon(0) \leq \hat{K}(0)$.

Comme $\hat{\sigma}_\varepsilon$ n'est pas constante, on a $\hat{\sigma}_\varepsilon(1) < 1$ ((ii), §3). Ecrivons (12) sous la forme

$$\hat{K}\,\frac{1-\hat{\sigma}_\varepsilon}{1-\hat{\sigma}_\varepsilon(1)} = \frac{\hat{\beta}_\varepsilon(0)-\hat{\beta}_\varepsilon}{1-\hat{\sigma}_\varepsilon(1)} - \frac{\hat{\alpha}_\varepsilon(0)-\hat{\alpha}_\varepsilon}{1-\hat{\sigma}_\varepsilon(1)} ,$$

soit

$$(13) \quad \hat{K}\psi_\varepsilon = \zeta_\varepsilon - \eta_\varepsilon ,$$

et observons que ψ_ε, ζ_ε, η_ε sont des suites définies négatives. En vertu de (iii), §3, $\psi_\varepsilon(n) \leq n^2$, donc ψ_ε tend vers une limite ψ_0 quand $\varepsilon \to 0$ suivant une suite (ε) convenable. Comme

$$\hat{\alpha}_\varepsilon(0) - \hat{\alpha}_\varepsilon(1) = \int_{|t|\leq \varepsilon} (1-\cos 2\pi t)\,d\alpha_\varepsilon(t) \leq 2\sin^2\pi\varepsilon\ \hat{\alpha}_\varepsilon(0)$$

et

$$1 - \hat{\sigma}_\varepsilon(1) = \int_{|t|\geq \varepsilon} (1-\cos 2\pi t)\,d\sigma_\varepsilon(t) \geq 2\sin^2\pi\varepsilon ,$$

on a $\eta_\varepsilon(1) \leq \hat{\alpha}_\varepsilon(0) \leq \hat{K}(0)$, et, d'après (iii), §3, de nouveau, η_ε tend vers une limite η_0 quand $\varepsilon \to 0$ suivant une sous-suite convenable de (ε). D'après (13), ζ_ε tend alors aussi vers une limite, ζ_0.

Les trois suites ψ_0, ζ_0, η_0 sont définies négatives et paires. De plus, η_0 est transformée de Fourier d'une distribution portée par 0, et $\hat{\eta}_0(0) = 0$; donc $\eta_0(n) = a\,n^2$. On a

$$\hat{K}\,\psi_0 = \zeta_0 - \eta_0$$

Or $\overline{\lim}\ \hat{K}(n) \geq 0$ (on le vérifie en appliquant K à un noyau de Feyer d'ordre arbitrairement grand), donc

$$\overline{\lim}\ \frac{\hat{K}(n)\ \psi_{o1}(n)}{n^2} \geq 0 .$$

D'après la propriété (iv) du §3, $\zeta_o - \eta_o$ est définie négative, ce qui achève la démonstration.

XI - Voici quelques commentaires.

(i) Le théorème I, joint à la remarque que K et K_1 satisfont en même temps la synthèse spectrale si $\hat{K}$ et $\hat{K}_1$ sont deux suites équivalentes, semble actuellement le meilleur résultat concernant la synthèse pour les espaces W considérés au §2. Il comprend comme cas particuliers

a) $\hat{K} = \frac{1}{\psi}$ (cas où W' est un espace de Dirichlet), déjà traité, par de toutes autres méthodes, par Beurling et Deny. ([3], théorèmes 8 et 10 ; pour une rédaction plus détaillée, voir les exposés de Deny au Séminaire d'Orsay, 1961-62).

b) K fonction sommable, convexe sur $]0,1[$, cas qui peut aussi se traiter par d'autres méthodes, développées par Beurling [2].

c) $\hat{K}(n) = (1+n^2)^{\alpha}$, $-1 \leq \alpha \leq 1$.
Le cas $-1 < \alpha < 0$, qui est un cas particulier de a) et b) , avait été étudié par Beurling en 1947 dans [1] , qu'on peut tenir pour la source principale des études dans ce domaine.

(ii) Naturellement, la synthèse n'a pas lieu si W contient δ', c'est-à-dire $\sum n^2 \hat{K}(n) < \infty$. D'autre part, il est faux que si K_1 et K_2 satisfont la synthèse, et si $\hat{K}_1 < \hat{K} < \hat{K}_2$, K satisfasse nécessairement la synthèse ; par exemple, pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{6}$ et $\gamma > 3\alpha$, il existe une fonction sommable K de type positif, telle $(1+n^2)^{-\gamma} \leq \hat{K}(n) \leq (1+n^2)^{-\alpha}$, et qui ne satisfait pas la synthèse (on le voit, à l'aide de séries de Fourier gaussiennes, en adaptant la preuve du théorème de Malliavin).

(iii) Dans la 2e partie du théorème II, l'hypothèse que K est une mesure est essentielle. Tout opérateur de dérivation satisfait le principe classique du maximum.

(iv) En ce qui concerne les méthodes, l'introduction des noyaux élémentaires et l'application du balayage à la synthèse sont dus à Deny (thèse) [4]. Le principe du pseudo-balayage semble dû à Frostman. Surtout, l'introduction des fonctions définies négatives en analyse harmonique et en théorie du potentiel semble revenir à Beurling (renommée publique).(*).
A qui qu'elles soient dues, ces méthodes sont très jolies, habilement utilisées, et dignes d'être connues (telle est la raison d'être de cet exposé).

(v) Les théorèmes I et II s'étendent au tore à plusieurs dimensions, mais pas entièrement à $\mathbb{R}^n$.

RÉFÉRENCES

[1] A. BEURLING, Sur les spectres des fonction, Colloque d'Analyse Harmonique, CNRS, Nancy 1947, 9-29.

[2] A. BEURLING, Analyse spectrale de pseudo-mesures, CRAS - Paris 258 (1964), 406-409, 782-785, 1380-1382, 1984-1987, 2959-2962, 3423-3425.

[3] A. BEURLING, J. DENY, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. 45 (1959), 208-215.

[4] J. DENY, Les potentiels d'énergie finie, Acta Mathematica 82 (1950) 107-183

[5] J. DENY, Les principes du maximum en théorie du potentiel, Séminaire Brelot-Choquet-Deny 1962, n°9.

(*) M. Beurling m'a fait savoir, après cet expose, que:
1°) il a introduit la notion de pseudo-balayage vers 1951;
2°) il a considéré les fonctions définies-négatives au moins dans trois articles (deux dans Acta Mathematics, un dans Ann. Inst. Fourier) et que personne avant lui n'a considéré ces fonctions en théorie du potentiel. Sur ce dernier point, il rejoint l'opinion oralement exprimée par M. Deny.

ERRATUM

Page 315-10 - lignes 4 et 5, supprimer "ce qui achève la démonstration." et lire : " donc $\hat{K}\psi_{o1} = \psi_{11}$, où ψ_{o1} et ψ_{11} sont définies négatives et paires, avec $\psi_{o1}(1) = 1$. Or, si K satisfait au principe classique du maximum, il en est de même de $K_p \sim \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{K}(pn)e^{2\pi int}$ $(p = 1,2,\dots)$. Donc $\hat{K}\psi_{op} = \psi_{1p}$, où ψ_{op} et ψ_{1p} sont définies négatives et paires, avec $\psi_{op}(p) = 1$. En choisissant une suite strictement positive a_p tendant assez vite vers zéro, $\psi_o = \sum_1^\infty a_p \psi_{op}$ et $\psi_1 = \sum_1^\infty a_p \psi_{1p}$ vérifient bien la conclusion du théorème II (2e partie). "