PAUL GÉRARDIN

Représentations du groupe SL_2 d'un corps local

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. nº 332, p. 309-343
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__309_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967/68, n° 332 Novembre 1967

REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SL_2 D'UN CORPS LOCAL
(d'après GEL'FAND, GRAEV et TANAKA)

par Paul GÉRARDIN

Gel'fand et Graev ont déterminé "toutes" les représentations unitaires irréductibles du groupe SL_2 d'un corps local k [3]. A partir de la représentation projective de Weil [9] Tanaka retrouve les séries discrètes [7]. Plus généralement, à chaque sous-groupe de Cartan C de $G = SL_2(k)$ est attachée une algèbre B de dimension 2 sur k dont C est le groupe des éléments de norme 1. La représentation projective de Weil relative au groupe additif de B définit une représentation de G dans $\mathcal{S}(B)$. Le k-automorphisme de conjugaison de B se transmet à $\mathcal{S}(B)$ et commute à la représentation. Celle-ci se décompose à l'aide de la représentation évidente de C dans $\mathcal{S}(B)$. Si B est un corps quadratique sur k on obtient une série discrète ; la série continue provient de l'algèbre déployée.

Tanaka a également résolu ce problème pour les groupes SL_2 des corps finis et des anneaux $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (cf. [7] et [12]).

0. LA REPRÉSENTATION PROJECTIVE DE WEIL [9]

Soit G un groupe abélien localement compact, G' son dual et $\langle x,x'\rangle$ le bicaractère de $G \times G'$ définissant la dualité. On munit G' de la mesure de Haar duale de celle de G. Le groupe symplectique de G, Sp G, est le groupe des automorphismes de $G \times G'$ laissant invariant le bicaractère de $G \times G'$ qui a pour morphisme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Appelons $X_2(G)$ le groupe des caractères quadratiques de G, c'est-à-dire des applications continues q de G dans $\mathbf{T}$ telles que

$$(0.1) \qquad q(x+y)q(x)^{-1}q(y)^{-1} = \langle x, yu_q \rangle \quad \text{pour tous } x,y \text{ dans } G$$

où u_q est un morphisme symétrique de G dans G' dit morphisme de q. Si u_q est inversible, q est dit non dégénéré ; dans ce cas on peut lui définir une transformée de Fourier

$$(0.2) \qquad \hat{q}(x') = \gamma(q)|u_q|^{-\frac{1}{2}}\, q(x'u^{-1})^{-1} \quad \text{où } \gamma(q) \text{ est dans } \mathbf{T} \text{ et } x' \in G'$$

cette formule signifiant qu'associer à f de $\mathcal{S}(G)$ la fonction $q * f$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(G)$ qui vérifie

$$(0.3) \qquad (q * f)^{\wedge} = \hat{q}\hat{f} .$$

Si on prend pour groupes G les groupes additifs des espaces vectoriels $\underline{k}^n$ sur un corps local $\underline{k}$, on montre que l'application γ définie par (0.2) est un caractère du groupe de Witt du corps local $\underline{k}$ (Weil [9], Théorème 2 et Proposition 3).

Soit $H(G)$ le groupe des opérateurs unitaires de $L^2(G)$ définis par

$$(0.4) \qquad U(z,t)f\,(x_1) = tf(x+x_1)\langle x_1, x' \rangle$$

où

$$z = (x,x') \in G \times G' \quad \text{et} \quad t \in \mathbf{T}$$

ce groupe est isomorphe au produit topologique $G \times G' \times \mathbf{T}$ muni de la loi tirée de (0.4) par composition des opérateurs. Appelons $B(G)$ le groupe des automorphismes de $H(G)$ qui sont triviaux sur le centre, et $N(G)$ le normalisateur de

$H(G)$ dans le groupe unitaire de $L^2(G)$. On a alors le résultat

THÉORÈME 0.1 (Segal). Avec les notations précédentes, on a

(a) le centralisateur de $H(G)$ dans le groupe unitaire de $L^2(G)$ est son centre $\mathbf{T}$.

(b) Les éléments de $B(G)$ sont induits par ceux de $N(G)$,

(c) le quotient $N(G)/\mathbf{T}$ est isomorphe à $B(G)$.

(c) fournit une représentation projective du groupe $B(G)$ dans $L^2(G)$ et une projection de $N(G)$ sur $B(G)$ qu'on note $\bar{s}$ pour s dans $N(G)$

$$s^{-1}U(z,t)s = U(z,t)^{\bar{s}} = U(zu_{\bar{s}}, tq_{\bar{s}}) \tag{0.5}$$

$u_{\bar{s}}$ est un automorphisme symplectique de G dit partie symplectique de $\bar{s}$ et $q_{\bar{s}}$ un caractère quadratique de $G \times G'$ dit partie quadratique de $\bar{s}$.

On peut relever par cette projection :

- le monomorphisme de $X_2(G)$ dans $B(G)$ donné pour q dans $X_2(G)$ par

$$\bar{n}(q) = \left(\begin{pmatrix} 1 & u_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right) \quad \text{en} \quad n(q)f\,(x_1) = q(x_1)f(x_1) \tag{0.6}$$

- le monomorphisme de Aut G dans $B(G)$ donné sur l'automorphisme t par

$$\bar{a}(t) = \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t' \end{pmatrix}, -1\right) \quad \text{en} \quad a(t)f\,(x_1) = |t|^{\frac{1}{2}}\, f(x_1 t) \tag{0.7}$$

(on a noté par un accent le passage d'un morphisme à son morphisme dual)

- le sous-ensemble, vide si G n'est pas isomorphe à son dual, image dans $B(G)$ de Isom (G',G) par l'application $\bar{w}$:

$$\bar{w}(v) = \left(\begin{pmatrix} 0 & -v'^{-1} \\ v & 0 \end{pmatrix}, \langle x, -x' \rangle\right) \quad \text{en} \quad w(v)f\,(x_1) = |v|^{-\frac{1}{2}}\, \hat{f}(-x_1 v'^{-1}) \,. \tag{0.8}$$

Appelons "troisième élément" d'un endomorphisme g de $G \times G'$ le morphisme v_g de G' dans G défini par $(0,x')g = (x'v_g,\ldots)$ pour x' dans G'.

THÉORÈME 0.2 (Weil [9], Théorème 3). <u>Soit</u> $\Omega(G)$ <u>la partie de</u> $B(G)$ <u>faite de ceux des automorphismes dont la partie symplectique a son troisième élément inversible.</u> <u>Alors</u> :

(a) <u>tout élément</u> s <u>de</u> $\Omega(G)$ <u>admet la décomposition unique</u>

$$s = \bar{n}(q_s^1)\bar{w}(v_s)\bar{n}(q_s^2) \tag{0.9}$$

<u>où</u> v_s <u>est le troisième élément de</u> u_s

(b) <u>pour</u> s <u>dans</u> $\Omega(G)$ <u>on définit l'opérateur unitaire</u> $W(s)$ <u>par</u>

$$W(s) = n(q_s^1)w(v_s)n(q_s^2)\ . \tag{0.10}$$

<u>Alors</u> W <u>est un relèvement de</u> $\Omega(G)$ <u>à</u> $N(G)$, <u>et si</u> s_1, s_2, $s_3 = s_1s_2$ <u>sont trois éléments de</u> $\Omega(G)$ <u>on a</u>

$$W(s_1)W(s_2) = \gamma(q)W(s_3) \tag{0.11}$$

<u>où</u> q <u>est le caractère quadratique de</u> G :

$$q(x) = q_{s_1}(0,xv_{s_1}^{-1})q_{s_2}(x,-xt_{s_2}v_{s_2}^{-1})$$

(t_s <u>est le "premier élément" de</u> u_s).

Enfin, $Sp(G)$ se plonge homomorphiquement dans $B(G)$ lorsque $x \longmapsto 2x$ est un automorphisme de G, en associant (s,q_s) à $s = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$ de $Sp\,G$, où

$$q_s(x,x') = \langle xu, 2^{-1}xt\rangle \langle 2^{-1}x'v, x'w\rangle \langle x'v, xu\rangle\ .$$

Dans ce cas le caractère quadratique q de (0.11) est

$$q(x) = \langle 2^{-1}x, xv_{s_1}^{-1}\, v_{s_3}\, v_{s_2}^{-1}\rangle\ .$$

1. CORPS LOCAUX

Le corps de base k est un corps local, c'est-à-dire un corps commutatif localement compact non discret. La valeur absolue est définie à l'aide d'une mesure de Haar sur son groupe additif. Si k est à valuation discrète, on prend les notations usuelles : $\mathfrak{O}, \mathfrak{P} = (\pi), \mathfrak{O}^{\times} = \mathfrak{U}, q = \text{Card } \mathfrak{O}/\mathfrak{P}$, val $t = \text{Card } \mathfrak{O}/t\mathfrak{O}$ pour t entier (on supposera toujours q impair, i.e. $|2| = 1$) le groupe multiplicatif de k, $k^{\times}$, est isomorphe au produit $(1+\mathfrak{P}) \times \mathfrak{U}/(1+\mathfrak{P}) \times \mathbb{Z}$, le second facteur correspond au groupe fini des racines $(q-1)$ mes de l'unité, on en appellera ε un générateur (lemme de Hensel) ([3] chap. II § 1).

La décomposition polaire de $k^{\times}$ permet de munir le groupe $X(k^{\times})$ de ses caractères généralisés d'une structure de variété analytique, produit du groupe (discret) dual du groupe des éléments de norme 1 par le groupe des caractères généralisés non ramifiés (i.e. qui ne dépendent que de la valeur absolue). On notera $\lambda(t) = t^{\lambda}$ pour $\lambda \in X(k^{\times})$ et $t \in k^{\times}$; l'exposant de λ est le réel $e = \text{Ex}\lambda$ défini par $|t^{\lambda}| = |t|^{e}$. On écrira aussi $t^{\underline{s}} = |t|^{s}$, $s \in \mathbb{C}$ ([8]).

Le dual du groupe additif de k s'identifie à k par le bicaractère $\tau(xy)$, où τ est un caractère additif non trivial de k. Si k est à valuation discrète, on choisit un caractère τ qui identifie $\mathfrak{O}$ à son orthogonal ; sinon on prend $\tau(x) = e^{2\pi i x}$ si $k = \mathbb{R}$, et le composé de celui-ci avec la forme linéaire $\text{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ si $k = \mathbb{C}$. On définit alors la transformation de Fourier en prenant la mesure de Haar autoduale de k. A chaque vectoriel E de dimension finie sur k est associé l'espace de ses fonctions standard $\mathcal{S}(E)$: si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ce sont les fonctions "indéfiniment dérivables à décroissance rapide", sinon ce sont les fonctions localement constantes à support compact. $\mathcal{S}(E)$ est muni de sa topologie usuelle ; les distributions qu'on utilisera seront les formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(E)$, et on les écrira sous forme intégrale ([1]).

Une distribution T sur k est dite de type λ, $\lambda \in X(k^x)$ si

$$dT(tx) = t^{\lambda} dT(x)$$

quel que soit t dans k^x, c'est-à-dire

$$(1.1) \qquad \int_k f(tx)dT(x) = t^{-\lambda} \int_k f(x)dT(x) \qquad f \in \mathcal{S}(k) \ , \quad t \in k^x \ .$$

Les distributions de type λ forment un espace de dimension 1. Soit $Z(k)$ l'ensemble des λ associés aux solutions de support d'origine : si k est à valuation discrète, $Z(k)$ est réduit au caractère trivial 0 associé à la distribution δ ; $Z(\mathbb{R})$ est fait des caractères t^{-n}, $n \in \mathbb{N}$ associés aux solutions $\delta^{(n)}$; $Z(\mathbb{C})$ est formé des caractères $t^{-p}\bar{t}^{-q}$ associés aux solutions $\delta^{(p,q)}$. Les autres solutions s'obtiennent comme prolongement analytique de l'intégrale

$$(1.2) \qquad Z_\lambda(f) = \int_k f(x)d^x x^{\lambda} \qquad d^x x^{\lambda} = x^{\lambda} dx/|x| \ , \quad f \in \mathcal{S}(k), \quad \mathrm{E}x\lambda > 0$$

dont les résidus aux pôles, simples, redonnent les solutions de support 0. La transformée de Fourier d'une distribution de type λ est une distribution de type $\underline{1}-\lambda$: on définit la fonction gamma de k (pour le τ choisi) par

$$(1.3) \qquad Z_\lambda(f) = \Gamma(\lambda) Z_{\underline{1}-\lambda}(\hat{f}) \qquad f \in \mathcal{S}(k) \ , \quad \lambda \text{ et } \underline{1}-\lambda \notin Z(k)$$

ses pôles sont ceux de la fonction zeta (1.2) et ses zéros les pôles de $Z_{\underline{1}-\lambda}$. La fonction gamma vérifie les deux relations (la première est la formule des compléments)

$$(1.4) \qquad \Gamma(\lambda)\Gamma(\underline{1}-\lambda) = \lambda(-1) \, , \, \Gamma(\bar{\lambda}) = \lambda(-1)\overline{\Gamma(\lambda)} \quad \text{où} \quad \bar{\lambda}(t) = \overline{\lambda(t)} \ .$$

Si k est à valuation discrète, sa fonction Γ est donnée pour λ ramifié ou d'exposant > 0 par

(1.5)
$$\Gamma(\lambda) = \lim_{N\, \infty} \int_{|x| \leq N} \tau(-x) d^x x^\lambda$$

[6], [8] et [10].

2. LES GROUPES SL_2

Les matrices d'ordre deux sur k forment une algèbre simple et de rang fini sur k. Le groupe $SL_2(k)$ est formé des matrices de norme réduite 1 ; comme on a pris le corps commutatif, la norme réduite est le déterminant. L'espace vectoriel $V = k \times k$ est muni de la norme $\max(|x|,|y|)$, $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, $x\bar{x}+y\bar{y}$ suivant que k est à valuation discrète, est le corps des réels, ou est le corps des complexes. Les éléments de $G = SL_2(k)$ qui laissent invariante cette norme forment un sous-groupe compact maximal K ; c'est respectivement $SL_2(\mathcal{O})$, $SO(2)$, $SU(2)$. Le stabilisateur N de $e_1 = (1,0)$ est le groupe des matrices unipotentes supérieures. Le sous-groupe A des matrices diagonales de G normalise N. La décomposition d'Iwasawa de G s'écrit

(2.1)
$$G = KAN \quad \text{avec} \quad K \cap AN = K \cap A.K \cap N \; .$$

Les deux matrices scalaires I et $-I$ forment le centre de G ; le centralisateur M de A dans K est la partie compacte $K \cap A$ de A ; le normalisateur M' de A dans K est engendré par M et $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le groupe de Weyl M'/M opère, comme M', sur A et les applications définies sur A. La décomposition de Bruhat s'écrit ici

(2.2)
$$G = AN \cup ANwAN = w^{-1}AN \cup N_-AN, \; N_- = w^{-1}Nw$$

est le nilpotent opposé. On identifie G/AN à la droite projective du corps k.

Le groupe G est unimodulaire ; si da et dn sont des mesures de Haar des groupes A et N, $dadn$ est une mesure de Haar à gauche sur AN, $|a|^2 da\, dn$ en est une à droite. L'isomorphisme $K\backslash G = K \cap AN\backslash AN$ déduit de (2.2) donne la mesure sur G

$$dg = dk\, d_r an = |a|^2 dk\, da\, dn \quad \text{si} \quad g = kan,\ |a| = \|ge_1\| \tag{2.3}$$

où dk est la mesure de Haar de K normalisée, $dn = dx$ si $n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et, si la valuation de k est discrète da donne à l'ouvert M de A la mesure 1 de façon que dk soit la mesure dg induite sur l'ouvert K de G, sinon on pose $da = dt/|t|$ pour $a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$.

3. TRANSFORMATION DE LAPLACE-MELLIN SUR LE PLAN

La décomposition (2.2) montre qu'à des ensembles négligeables près, on a

$$G/N = NwA = Ge_1 = A \times N = V \tag{3.1}$$

et donc que $|a|da\, dn$ est une mesure invariante sur G/N. On identifiera systématiquement une fonction sur V privé de 0 à une fonction sur G invariante à droite par N. Le corps k étant commutatif, G est le groupe linéaire qui conserve la forme bilinéaire de matrice w

$$[z,z'] = xy' - x'y \quad \text{si} \quad z = (x,y) \quad \text{et} \quad s' = (x',y') . \tag{3.2}$$

On définit alors la transformation de Fourier sur V à l'aide du bicaractère $\tau([z,z''])$ et de la mesure autoduale correspondante. Celle-ci se lit sur $A \times N$ par (3.1) en $|a|d^+a\, dn$, où $d^+a = dt$ si $a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$; on pose

$$[g,g'] = [ge_1, g'e_1]$$

si g et g' sont dans G ; c'est le premier coefficient de la matrice ${}^t g' w g$. Si f est une fonction continue sur G à support compact modulo N, sa transformée de Fourier est

$$f^*(g) = \int_{G/N} f(g')\tau([g,g'])d\dot{g}' = \int_{A\times N} f(nwa)\tau([g,nwa])\,|a|d^+a\,dn\,. \tag{3.3}$$

En procédant de façon analogue avec les fonctions continues à support compact sur A on écrira

$$\hat{f}(a) = \int_A f(a')\tau(aa')\,d^+a' \qquad \text{où} \qquad \tau(a) = \tau(t) \qquad \text{si} \qquad a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}\,. \tag{3.4}$$

PROPOSITION 3.1. Décomposition de la transformation de Fourier sur le plan. A f dans $\mathcal{S}(V)$ on associe pour chaque g de G la fonction f'_g de $\mathcal{S}(A)$

$$f'_g(a) = |a| \int_N f(gnwa)\,dn\,. \tag{3.5}$$

Alors, pour tout a dans A, on a l'égalité

$$f^*(ga) = \widehat{f'_g}(a)\,. \tag{3.6}$$

Il suffit d'écrire (3.3) au point ga, puis de changer de variable.

PROPOSITION 3.2. Transformation de Laplace-Mellin sur le plan.

Si K_1 est un compact de G, et K_2 une bande de caractères généralisés de A $-1 < r_1 \leqq \mathrm{Ex}\,\lambda \leqq r_2 < \infty$, alors, pour f dans $\mathcal{S}(V)$ l'intégrale

$$L^f_\lambda(g) = \int_A f(ga)a^\lambda d^+a \tag{3.7}$$

(a) converge normalement sur $K_1 \times K_2$

(b) se prolonge à $X(k^*)$ en une fonction analytique de pôles simples les λ tels que $1 + \lambda \in Z(k)$

(c) vérifie l'équation fonctionnelle

$$\int_N L^f_\lambda(gnw)\,dn = \Gamma(\lambda)L^{f^*}_{-\lambda}(g)\,. \tag{3.8}$$

Le (a) résulte de ce que t^λ est sommable au voisinage de 0 pour la mesure dt si $\operatorname{Re}\lambda > -1$. Le (b) est le prolongement analytique de la fonction zeta. L'intégrale de (3.8) se fait sur un horicycle ; elle est convergente si $f(gnwa)a^\lambda$ est sommable sur $A \times N$, c'est-à-dire si $f(g\binom{u}{t})t^{\lambda-1}$ est sommable sur le plan, ce qui a lieu pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$. L'intégrale est alors $Z_\lambda(f_g')$, où f_g' est donnée par (3.5), et (c) est l'équation fonctionnelle (1.3) en vertu de la proposition précédente.

Remarques. (3.8) est aussi le prolongement de l'équation fonctionnelle des fonctions de Whittaker [5] : $W^f_{\lambda,n} = n^\lambda W^{f^*}_{-\lambda,n}$ où, pour $f \in \mathcal{S}(V)$, on a posé

$$W^f_{\lambda,n}(g) = \int_N L^f_\lambda(gn'w)\tau(n' * n)dn' \qquad n\in N,\ n \neq I \text{ dans l'équation fonctionnelle,}$$

et où l'on a transporté la structure de corps de k sur N à l'aide de l'isomorphisme de N avec le groupe additif de k, l'étoile sur N correspondant au produit sur k.

(3.8) est également l'écriture locale de la relation (3.16) de [4] obtenue à l'aide des équations fonctionnelles des séries d'Eisenstein.

4. SOUS-GROUPES DE CARTAN

A un sous-groupe de Cartan C de $G = SL_2(k)$, on associe la sous-algèbre B qu'il engendre dans l'algèbre des matrices d'ordre 2 sur k ; elle est commutative et semi-simple. Inversement, les éléments de norme 1 dans une telle sous-algèbre forment un sous-groupe de Cartan de G. Ces sous-algèbres sont les extensions quadratiques de k et l'algèbre déployée de dimension 2. Elles s'écrivent $k(d^{\frac{1}{2}})$

où l'élément non nul d de k ne compte que modulo le sous-groupe des carrés k^{x^2} ; on les ramène à la forme suivante

(4.1) $\qquad k(d^{\frac{1}{2}})$ est formé des matrices $z = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}$.

Pour $d = 1$, on a l'algèbre déployée, associée au sous-groupe de Cartan

(4.2) $$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, x^2 - y^2 = 1$$

conjugué au sous-groupe A de G. Si d n'est pas un carré, $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ est un corps et l'inégalité

(4.3) $$|d|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|N_{B/k}(z)|^{\frac{1}{2}}}{\|z\|} \leq 1$$

montre que le sous-groupe de Cartan est alors compact (la norme est celle de l'espace vectoriel sous-jacent dans l'isomorphisme qui associe (x,y) à $x + d^{\frac{1}{2}}y$; elle a été définie au § 2).

Le nombre de ces algèbres est égal au nombre de classes des carrés dans k^x. C'est $4/|2|$. En effet, pour un corps à valuation discrète, le lemme de Hensel montre que le passage au carré est un automorphisme de $1 + \wp$; la décomposition de k^x (§ 1) donne alors 4 classes, de représentants $1, \varepsilon, \pi, \varepsilon\pi$.

Si $B = k(d^{\frac{1}{2}})$, appelons $\underline{n}$ son groupe des normes, image par $N_{B/k}$ du groupe multiplicatif de B. C'est k^x si $d = 1$; sinon $\underline{n}$ est d'indice 2 dans k^x comme le montre un examen détaillé de la situation, ou bien parce que les extensions abéliennes de degré 2 sur $\underline{k}$ sont classées par leur groupe des normes ([11], p. 230, Cor. 2). On appelle s le caractère k^x trivial sur $\underline{n}$. Les différents caractères s forment le groupe des caractères de k^x/k^{x^2} ([11], p. 261).

5. TRANSFORMATION DE FOURIER SUR LES ALGÈBRES $k(d^{\frac{1}{2}})$

Soit $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ une algèbre de dimension 2 sur k, prise sous la forme (4.1). L'automorphisme de conjugaison $\bar{z} = \begin{pmatrix} x & -dy \\ -y & x \end{pmatrix}$ si $z = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}$ se lit sur le sous-groupe C des éléments de norme 1 comme le passage à l'inverse. Soit τ' un caractère additif non trivial de k. Le bicaractère

(5.1) $$\langle z,z'\rangle = \tau' \circ \mathrm{Tr}_{B/k}(z\bar{z}') \qquad z,\ z'\in B$$

définit l'autodualité sur B et la mesure autoduale associée. De même k est muni de la mesure de Haar autoduale pour le bicaractère $\tau'(xx')$. La représentation évidente de C dans $L^2(B)$ commute à la transformation de Fourier puisque

(5.2) $$\langle cz,cz'\rangle = \langle z,z'\rangle \quad \text{quel que soit } c\in C\ .$$

Soit dc une mesure de Haar sur C, normalisée si C est compact, et sinon, on prend la mesure de Haar transportée de celle de $k^\times$ dans l'isomorphisme de C avec $k^\times = Ce_1$. Si $B^\times$ désigne alors le groupe multiplicatif des éléments inversibles de B, l'isomorphisme $B^\times/C = \underline{n}$ donne une décomposition des mesures de Haar multiplicatives, et donc des mesures de Haar additives

(5.3) $$\int_B f(z)dz = a \int_{\underline{n}} dN_{B/k}z \int_C f(cz)dc \qquad f\in \mathcal{S}(B)$$

où a est une constante qui dépend de l'extension et du caractère τ' .

LEMME 5.1. *Soient* K_1 *un compact de* $B^\times$, K_2 *une bande* $r_1 \leq \mathrm{Ex}\,\lambda \leq r_2$ *de caractères généralisés de* C, K_3 *une partie bornée de* $\mathcal{S}(B)$. *Alors l'intégrale*

(5.4) $$\int_C f(c^{-1}z)dc^\lambda \qquad f\in \mathcal{S}(B),\ \ z\in B^\times,\ \ \lambda\in X(C)$$

converge normalement sur $K_1 \times K_2 \times K_3$.

La difficulté pourrait venir lorsque C n'est pas compact, aux points à l'infini de C. Mais alors on intègre sur une "hyperbole" $z\bar{z} = C^{te} \neq 0$, et f est "à décroissance rapide" sur ses branches. (5.4) définit ainsi une distribution tempérée.

On appelle distribution de Bessel d'espèce C et d'indice λ la transformée de Fourier de la distribution (5.4). Lorsque C est compact elle est donnée par la fonction de Bessel d'indice "entier" λ

$$J_\lambda^C(z\bar{z}') = \int_C \langle -c^{-1}z, z'\rangle \, dc^\lambda \ . \tag{5.5}$$

Si C n'est pas compact, on retrouve les fonctions de Bessel-Hankel lorsque k est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si le corps est à valuation discrète, la formule (5.5) a un sens si l'intégrale est prise en valeur principale, car elle ne dépend pas du compact assez grand sur lequel on intègre ; si $N_{B/k}z$ est assez petit, non nul, alors([6])

$$J_\lambda^C(z) = (x+y)^\lambda \Gamma'(-\lambda) + (x-y)^{-\lambda}\Gamma'(\lambda) \quad \text{si} \quad z = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \neq 0 \tag{5.6}$$

$$J_0^C \ \text{est une fonction affine, non constante, de } \operatorname{val} N_{B/k}z \ . \tag{5.7}$$

Par ailleurs, on a toujours la formule

$$J_\lambda^C(z) = (z/\bar{z})^\lambda J_\lambda^C(\bar{z}) = (z/\bar{z})^\lambda J_{-\lambda}^C(z) \ . \tag{5.8}$$

Si B est un corps, la représentation évidente de C dans $L^2(B)$ le décompose en somme directe hilbertienne des sous-espaces $L_m^2(B)$, m caractère de C, formés des fonctions de type m : $f(cz) = c^m f(z)$ quel que soit $c \in C$. Comme tout caractère m de C se prolonge en un caractère du groupe B^x noté encore m (mais pas de façon canonique : en valuation discrète $k^x C$ est d'indice 2 dans B^x), on envoie les fonctions de $L_m^2(B)$ sur celles de $L_0^2(B)$ en les multipliant par z^m.

Ces dernières ne dépendent que de la norme $N_{B/k}$, et elles s'envoient sur les fonctions de carré sommable sur $\underline{n}$ pour la mesure induite par la mesure additive de k ; si on écrit $F^f \circ N_{B/k} z = z^{-m} f(z)$ pour $f \in L^2_m(B)$, (5.3) donne

$$(5.9) \qquad \int_B |f(z)|^2 dz = a \int_{\underline{n}} |F^f(x)|^2 dx \; .$$

Enfin, la transformée de Fourier d'une fonction de type m est aussi de type m d'après (5.2), et on a la formule

$$(5.10) \qquad \hat{F^f}(x) = a \int_{\underline{n}} F^f(y) dy \int_{c\bar{c}=yx^{-1}} \tau'(cx + c^{-1}y)\, dc^m \;, \qquad dc^m = c^m dc \; .$$

6. LES REPRÉSENTATIONS DE WEIL DES GROUPES SL_2

On va appliquer le § 0 en prenant pour groupe abélien localement compact le groupe additif d'une algèbre B de dimension 2 sur k : $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ (4.1). L'autodualité est donnée par le bicaractère (5.1). Chaque élément u de k définit un morphisme (symétrique) de B, à savoir la multiplication par cet élément ; c'est le morphisme associé (0.1) au caractère quadratique

$$(6.1) \qquad q_u(z) = \langle z, 2^{-1} z u \rangle = \tau'(u N_{B/k} z)$$

q_u est un caractère quadratique non dégénéré si u est inversible dans k, et sa transformée de Fourier est alors (0.2)

$$(6.2) \qquad \hat{q}_u = \gamma(u) |u|^{-1} q_{-u^{-1}} \qquad \text{où } \gamma(u) = \gamma(q_u) \; .$$

Le groupe symplectique de B se plonge dans $B(B)$; chaque matrice de $G = SL_2(k)$ définit naturellement un automorphisme symplectique de B. Par restriction à G, on a donc une représentation projective de ce groupe dans $\mathcal{S}(B)$:

(6.3) $$n\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}f\,(z) = q_u(z)f(z)$$

(6.4) $$a\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}f\,(z) = |t|\,f(zt)$$

(6.5) $$W\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}f\,(z) = \hat{f}(-z)\ .$$

On pose $\Omega(G) = NwAN$; le théorème 0.2 définit W sur $\Omega(G)$, et (0.11) s'écrit

(6.6) $$W(g_1)W(g_2) = \gamma(v_3/v_1v_2)W(g_3) \qquad \text{si} \quad g_1,\ g_2,\ g_3 = g_1g_2\in\Omega(G),\quad g_i = \begin{pmatrix}\cdot & \cdot\\ v_i & \cdot\end{pmatrix}.$$

L'unicité de la décomposition (0.9) implique

(6.7) $$W(g)W(g^{-1}) = I \qquad \text{si} \quad g\in\Omega(G)\ .$$

THÉORÈME 6.1. Cas déployé. Si l'algèbre B est déployée sur k, on définit une représentation W^B de G par

(6.8) $$W^B = n \ \text{sur}\ N, \qquad W^B = a\ \text{sur}\ A, \qquad W^B = W\ \text{sur}\ \Omega(G)$$

et cette représentation est unitairement équivalente à la représentation évidente de G dans $\mathcal{S}(B)$.

Preuve. Montrons d'abord que $\gamma(u) = 1$ quel que soit u dans k^x. Si $z = \begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}$, le caractère quadratique (6.1) est associé à la forme quadratique $ux^2 - uy^2$. $\gamma(u)$ est donc produit des γ associés aux formes quadratiques ux^2 et $-ux^2$ sur k. Les caractères quadratiques associés sont imaginaires conjugués, leur γ aussi, et le produit de ceux-ci est donc 1.

(6.6) est ainsi une relation d'homomorphisme, et W^B est une représentation unitaire de G dans $\mathcal{S}(B)$. Pour prouver la seconde partie du théorème, on prend B sous la forme diagonalisée. (5.1) s'écrit $\langle z,z'\rangle = \tau'(x'y+xy')$ si $z = (x,y)$ et $z' = (x',y')$. La représentation évidente de G dans $\mathcal{S}(B)$ est

(6.9) $$T(g)f\binom{x}{y} = f(g^{-1}\binom{x}{y}) .$$

Montrons que l'opérateur qui échange W et T est la transformation de Fourier sur la première variable

(6.10) $$f'\binom{x}{y} = \int_k f\binom{x'}{y}\tau'(-xx')dx'$$

qui est bien un automorphisme de $\mathcal{S}(B)$. Sur N et A, on voit aisément la commutation par (6.3) et (6.4). Enfin, pour w :

$$(W^B(w)f)'\binom{x}{y} = \int_k \hat{f}\binom{-x'}{-y}\tau'(-xx')\ dx'$$

mais on a la formule $f'\binom{u}{v} = \widehat{f'}\binom{-v}{u}$: l'expression ci-dessus est aussi $f'\binom{y}{-x}$: c'est $T(w)f'$ au point (x,y).

Ce théorème montre que, dans le cas où l'algèbre B est déployée, on est ramené aux représentations induites par le sous-groupe triangulaire AN : on les retrouve en effectuant une transformation de Laplace-Mellin (§ 3).

THÉORÈME 6.2. <u>Cas des sous-groupes de Cartan compacts</u>. <u>Si l'algèbre</u> B <u>est le corps quadratique</u> $k(d^{\frac{1}{2}})$, <u>on définit une représentation de</u> G <u>dans</u> $\mathcal{S}(B)$ <u>en posant</u>

(6.11) $$W^B = n \quad \text{sur } N, \qquad W^B(h) = s(h)a(h) \quad \text{sur } A$$

<u>où</u> s <u>est le caractère de</u> $k^\times \simeq A$ <u>attaché à l'extension</u> B, <u>et</u> $W^B(w) = r\,W(w)$ <u>où</u> $r = \overline{\gamma(1)}$.

<u>Preuve</u>. Montrons d'abord que $\gamma(u) = \gamma(1)s(u)$. Si $k = \mathbb{R}$, on prend $d = -1$; la norme de $z = x+iy$ est x^2+y^2 ; $\gamma(u)$ est donc le carré du γ associé à la forme quadratique ux^2 sur $\mathbb{R}$; celui-ci résulte par exemple de

l'identité de Jacobi sur la série θ ; si $\tau'(x) = e^{2\pi ibx}$, on a donc

$$\gamma(u) = i^{s(bu)} = is(b)s(u) = \gamma(1)s(u) \ . \tag{6.12}$$

Soit maintenant un corps k à valuation discrète. Le caractère additif τ' est trivial sur un voisinage de 0 dans k, et donc q_u vaut 1 sur tout réseau R assez petit de B. La formule (0.3) prise en 0 avec pour f la fonction caractéristique du réseau R s'écrit (u est différent de 0)

$$\int_B q_u(z)\,dz \int_R \langle z',zu\rangle\,dz' = \gamma(u)|u|^{-1} \int_R dz \ .$$

D'après les relations d'orthogonalité des caractères la seconde intégrale du premier membre est égale à la fonction caractéristique du réseau $R'u^{-1}$ (R' est l'orthogonal du réseau R), à la mesure de R près. On a donc

$$\gamma(u)|u|^{-1} = \int_{R'u^{-1}} q_u(z)\,dz = a \int_{N_{B/k}(R'u^{-1})} \tau'(ux)\,dx$$

la décomposition des mesures venant de (5.3). La fonction caractéristique du groupe des normes $\underline{n}$ de B se décompose à l'aide du caractère s en $\frac{1}{2}+s(x)/2$: l'intégrale précédente se décompose en deux et pour n assez grand il ne reste que

$$2\gamma(u)|u|^{-1}/a = \int_{\mathcal{P}^{-n}} \tau'(ux)s(x)dx = s(u)|u|^{-1}\,\overline{\Gamma'(\underline{1}+s)} = s(u)|u|^{-1}s(-1)\Gamma'(\underline{1}+s) \ .$$

On a bien $\gamma(u) = \gamma(1)s(u) = s(u)/r$ avec même $r^2 = s(-1)$.

(6.6) devient une relation d'homomorphisme si on remplace $W(g_i)$ par $W(g_i)/\gamma(v_i)$. Ceci définit W^B sur $\Omega(G)$, ouvert dense de G, donc partout. (6.11) fait de W^B une représentation unitaire de G dans $\mathcal{S}(B)$.

THÉORÈME 6.3. La représentation évidente du sous-groupe C des éléments de norme 1 de l'algèbre B dans $\mathcal{S}(B)$ commute à la représentation W^B.

Soit E l'opérateur qui à $f \in \mathcal{S}(B)$ associe la fonction $f(\bar{z})$; alors E est un automorphisme de $\mathcal{S}(B)$ qui commute à la représentation W^B.

Preuve. La première partie du théorème résulte de ce que la norme $N_{B/k}$ est invariante par C, et de (5.2) qui exprime la commutation à $W^B(w)$: les formules (6.3), (6.4), (6.5) montrent l'interversion.

La seconde partie est tout aussi claire; on prend les formules (6.3)-(6.5), sachant que la conjugaison laisse k fixe, et que le bicaractère d'autodualité est (5.1).

On est ainsi ramené à étudier les fonctions qui se transforment à gauche suivant un caractère de C

(6.13) $$f(cz) = \lambda(c)f(z) \qquad \text{quel que soit } c \in C, \quad z \neq 0$$

les caractères λ et $-\lambda$ donnant des représentations équivalentes. Les paragraphes suivants précisent le sens qu'il faut accorder à cette remarque si C est déployé.

7. REPRÉSENTATIONS DE LA SÉRIE CONTINUE : ESPACES DES REPRÉSENTATIONS

Le théorème 6.1 ramène la représentation de Weil attachée à l'algèbre déployée à la représentation naturelle de G dans l'espace $\mathcal{S}(V)$, $V = k \times k$. Les représentations de la série continue sont les représentations induites par une représentation de dimension 1 du sous-groupe AN ; N étant le groupe des commutateurs de AN, on se donne donc un caractère généralisé λ de A, et on considère l'espace $C_\lambda(G)$ des fonctions sur G telles que

(7.1) f est régulière sur G, c'est-à-dire localement constante si k est à valuation discrète, indéfiniment dérivable sinon, ([1])

(7.2) $f(gan) = a^{-\lambda} f(g)|a|^{-1} = a^{-\lambda-\underline{1}} f(g)$ quels que soient $g \in G$, $a \in A$, $n \in N$.

Le groupe G opère sur cet espace par translations à gauche

(7.3) $$T_\lambda(s)f\,(g) = f(s^{-1}g) \ .$$

L'invariance à droite par N permet de réaliser la représentation en fonctions sur V privé de l'origine : on retrouve les fonctions L_λ^F du § 3. La décomposition d'Iwasawa (2.1) montre qu'une fonction vérifiant (7.2) est déterminée par sa restriction au groupe compact K. La décomposition de Bruhat (2.2) permet de réaliser l'espace C (G) en fonctions sur $N_- \cup w^{-1} = G/AN = K/K \cap AN$, la droite projective de k. On utilisera cette réalisation, N_- ayant l'avantage d'être un groupe abélien isomorphe au groupe additif de k : à x de k on associe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$ de N_- . Le groupe G opère par

(7.4) $$T_\lambda(n)f\,(x) = f(n^{-1}x) \qquad n \in N_-$$

(7.5) $$T_\lambda(a)f\,(x) = f(a^{-1}xa)a^{\lambda+\underline{1}} \qquad a \in A \quad (A \text{ normalise } N_-)$$

(7.6) $$T_\lambda(w)f\,(x) = f(w^{-1}n_+(x)w)a(x)^{-\lambda-\underline{1}} \quad \text{si} \quad x \neq I$$

$$T_\lambda(w)f\,(1) = f(w^{-1})$$

où l'on a utilisé la décomposition de Bruhat de N_- privé de I sur NwAN

(7.7) $$x = n_+(x)wa(x)n_+(x) \ .$$

Enfin (7.1) se traduit par

(7.8) $$f \text{ et } T_\lambda(w)f \text{ sont régulières sur } N_- \ .$$

L'isomorphisme $N_- \cup w^{-1} = K/K \cap AN$ permet de munir N_- d'une mesure invariante à gauche par K : c'est $\|x(e_1)\|^{-2}\, dx$, et on montre aisément que

$$(7.9) \qquad \int_K |f(k)|^2\, dk = \int_{N_-} |f(x)|^2 \|x(e_1)\|^{2\mathrm{Ex}\lambda}\, dx$$

ce qui montre que pour λ d'exposant positif ou nul, f est dans $L^2(N_-)$.

8. SÉRIE PRINCIPALE DE REPRÉSENTATIONS

La série principale de G est formée des représentations unitaires induites par les caractères de A. La formule (7.9) montre qu'elle est réalisée dans $L^2(N_-)$, ou encore, pour chaque caractère λ de A, dans le sous-espace fermé de $L^2(K)$ formé des fonctions f telles que $f(kan) = a^{-\lambda} f(k)$ quel que soit $an \in AN$.

On sait alors [1] que la représentation $C_\lambda(G)$ est irréductible si λ n'est pas invariant par le groupe de Weyl de G ; or l'élément non trivial de celui-ci change λ en $-\lambda$: λ est invariant s'il est trivial sur les carrés.

THÉORÈME 8.1. Irréductibilité des représentations de la série principale. Si λ est un caractère non trivial de A/A^2, la représentation $C_\lambda(G)$ est somme directe de deux représentations irréductibles.

Les autres représentations de la série principale sont irréductibles.

Preuve. On revient à la réalisation de Weil en effectuant une transformation de Fourier sur N_- . Les formules (7.4)-(7.6) se lisent alors

$$(8.1) \qquad \hat{T}_\lambda(n)\hat{f}\,(x) = \tau(ux)\hat{f}(x) \qquad \text{si } n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix},\ \hat{f}(x) = \hat{f}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

$$(8.2) \qquad \hat{T}_\lambda(a)\hat{f}\,(x) = t^{\lambda-1}\, \hat{f}(t^{-2}x) \quad \text{si } a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(8.3) \qquad \hat{T}_\lambda(w) \text{ a pour noyau } J^A_{-\lambda}(x,y)\ .$$

Si un opérateur commute à la représentation, (8.1) montre que c'est la multiplication par une fonction mesurable bornée h. (8.2) montre alors que h est constante sur les classes des carrés. Le théorème est prouvé pour $k = \mathbb{C}$. Pour le corps des réels, $h(x)$ ne dépend que du signe de x ; si on revient à la réalisation du § 7, on voit que l'action de w commute à la transformation de Hilbert, et donc si $h \neq 0$, que λ est le caractère signe. Si le corps est à valuation discrète, la commutation à l'action de w s'écrit

$$(8.4) \qquad (h(x) - h(y))J^A_{-\lambda}(x,y) = 0 \quad \text{pour presque tout} \quad (x,y) \in k^x \times k^x .$$

(5.7) permet de conclure à l'irréductibilité si $\lambda = 0$. Sinon, on utilise (5.6) : $J^A_{-\lambda}(x,y)$ ne peut être nul lorsque x et y parcourent deux classes distinctes de $(k^x)^2$ dans k^x que si λ est un caractère $s \neq 0$ et que si x et y parcourent chacun une classe de $\underline{n}$ dans k^x. On a donc prouvé l'irréductibilité si λ n'est pas un caractère s, et, dans ce cas, que h prenait au plus deux valeurs.

On achève la démonstration en remarquant que les fonctions à support dans l'une des classes de $\underline{n}$ dans k^x forment un sous-espace invariant : on le voit sur les formules (8.1)-(8.3) et (5.8).

9. SÉRIE CONTINUE : FORMES SESQUILINÉAIRES INVARIANTES

Pour étudier la série continue, on attache à chaque couple (λ,μ) de caractères généralisés de A l'espace $S(\lambda,\mu)$ des formes sesquilinéaires continues invariantes sur $C_\lambda(G) \times C_\mu(G)$. Ayant $S(\lambda,\mu)$ on pourra déterminer les représentations équivalentes, les représentations irréductibles, les représentations unitaires.

On se ramène à la réalisation de $C_\lambda(G)$ et $C_\mu(G)$ sur N_- (§ 7). L'isomorphisme du groupe additif de k avec N_- permet de transporter la structure de corps : on notera par $*$ la multiplication ainsi mise sur N_- et x^* l'inverse d'un élément x de N_- autre que I.

Par restriction à $\mathcal{S}(N_-) \times \mathcal{S}(N_-)$, une forme sesquilinéaire sur $C_\lambda(G) \times C_\mu(G)$ s'écrit, d'après le théorème des noyaux ([1]), à l'aide d'une distribution $T \in \mathcal{S}'(N_- \times N_-)$

(9.1) $$(f|g) = \int_{N_- \times N_-} f(x)\overline{g(y)}\, dT(x,y) \qquad f, g \in \mathcal{S}(N_-) .$$

La décomposition de Bruhat par rapport au tore A et au nilpotent N_- s'écrit

(9.2) $$G = N_-AwN_- \cup N_-A$$

N_- opère par translations (7.4). L'invariance de la forme sesquilinéaire $(|)$ par l'action de N_- montre que la distribution T se factorise à travers la mesure de Haar de N_- en

(9.3) $$(f|g) = \int_{N_- \times N_-} f(x)\overline{g(xy^{-1})}\, dx\, dU(y) = \int_{N_-} f * g^\circ(y)\, dU(y) \quad f, g \in \mathcal{S}(N_-)$$

(9.4) $$g^\circ(x) = \overline{g(x^{-1})} \qquad \text{si } g \text{ est une fonction sur } N_-$$

A opère également sur $\mathcal{S}(N_-)$ d'après (7.5). L'invariance de la forme par A s'écrit donc pour les fonctions de $\mathcal{S}(N_-)$

$$\int_{N_-} f * g^\circ(x)\, dU(x) = a^{\lambda+\bar{\mu}} \int_{N_- \times N_-} f(x)\overline{g(a^{-1}y^{-1}ax)}\, dx\, dU(y)$$

car $dx = |a|^{-2} d(a^{-1}xa)$ et comme $\mathcal{S}(N_-) * \mathcal{S}(N_-)$ est dense dans $\mathcal{S}(N_- \times N_-)$, la distribution U vérifie

(9.5) $$dU(a^{-1}xa) = a^{\lambda+\bar{\mu}}\, dU(x) \quad \text{quel que soit } a\in A .$$

Le centralisateur de N_- dans A est formé des matrices $\pm I$; c'est le noyau du passage au carré dans A. Si $S(\lambda,\mu)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ on a donc, de (9.5)

(9.6) $$\lambda(-I) = \mu(-I) .$$

Dans ce cas $\lambda+\bar{\mu}$ s'écrit 2ω où le caractère généralisé ω est déterminé à un caractère de A/A^2 près. Dans les notations de [10], (9.5) est le problème $P(N_-,A,\omega)$ où A opère sur N_- par les automorphismes axa^{-1}.

Si U^* désigne la restriction de U au groupe multiplicatif de N_-, la distribution $a(x)^{-\omega}U^*(x)$ est invariante par l'opération de A, c'est-à-dire par les translations de A^2. Elle s écrit

$$a(x)^{-\omega}dU^*(x) = \Sigma\, c_d\, a(x)^{s_d}\, d^{x}x$$

où $d^{x}x$ est une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif de N_-, s_d est le caractère relatif à l'algèbre $k(d^{\frac{1}{2}})$ défini au § 4, et où la sommation se fait sur les classes des carrés.

On sait que $a(x)^{\omega+s_d}\, d^{x}x$ se prolonge en une distribution sur N_- si et seulement si $\omega+s_d$ n'est pas dans $Z(k)$ (§ 1). Par ailleurs on détermine facilement les distributions de support l'origine I de N_- qui vérifient (9.5) : ceci nécessite $\lambda+\bar{\mu}\in 2Z(k)$.

Ainsi l'étude de l'invariance par AN a montré que (9.6) est une condition nécessaire pour que $S(\lambda,\mu)$ ne soit pas réduit à 0. Dans ce cas, une forme invariante $(\,|\,)$ a pour restriction à $\mathcal{S}(N_-)\times\mathcal{S}(N_-)$

(9.7) $$(f|g) = \Sigma\, c_d Z_{\omega+s_d}(f * g^\circ) \qquad \text{si } \lambda+\bar{\mu} = 2\omega \notin 2Z(k)$$

(9.8) $(f|g)$ est le prolongement analytique de $\Sigma\, c_d \dfrac{Z_{\omega+s_d}(f * g^\circ)}{\Gamma(\omega+s_d)}$

si $\lambda+\bar{\mu} = 2\omega \in 2Z(k)$.

Reste à écrire l'invariance par w, l'élément du groupe de Weyl. Pour utiliser les résultats ci-dessus, il faut prendre des fonctions de $\mathcal{S}(N_-)$ qui y restent après transformation par w : (7.6). Si $\mathrm{Ex}\,\omega > 0$, alors Z_ω est donnée par une intégrale absolument convergente. Dans $Z_\omega(T_\lambda(w)f * (T_\mu(w)g)^\circ)$ on fait le changement de variables

$$w^{-1}a(x)w = a(X) \quad , \text{ d'où } a(X) = a(x) \quad \text{ et } dx = |a(X)|^{-2}dX,$$

et de même pour y, ce qui donne

(9.9) $$Z_\omega(T_\lambda(w)f * (T_\mu(w)g)^\circ) = Z_\omega(a^{\lambda-\omega}f * a^{\bar{\mu}-\omega}g^\circ),$$

a est la fonction $a(x)$. Le second membre de cette identité est une fonction analytique de ω ce qui permet de prolonger (9.9) à $X(A)$ avec les pôles usuels. Si on écrit maintenant que (9.7) est invariante par w, on a donc presque partout en (x,y)

$$0 = \Sigma\, c_d(1-a(x)^{\lambda-\omega+s_d}a(y)^{\bar{\mu}-\omega+s_d})a(xy^{-1})^{\omega+s_d-1}$$

c'est

$$0 = \Sigma\, c_d(1-a(x * y^*)^{\lambda-\omega+s_d})a(xy^{-1})^{s_d} \qquad \text{puisque } \lambda-\omega = \omega-\bar{\mu} \ .$$

Si donc $S(\lambda,\mu)$ n'est pas réduit à 0, on a nécessairement $\lambda = \omega+s_d$ pour un d, et alors $\lambda = \bar{\mu}$, les autres coefficients $c_{d'}$, $d' \neq d$ étant nuls. On étudie de façon analogue le cas où $\lambda+\bar{\mu}\in 2Z(k)$.

Si on revient à des fonctions sur K ou sur le groupe, alors, si $\lambda = \bar{\mu}$ n'est pas un pôle de la fonction zeta, la forme sesquilinéaire invariante $Z_\lambda(f * g^\circ)$ est

$$(9.10) \qquad Z_\lambda(f * g^\circ) = \int_{K\cap AN \times K\cap AN} [k,k']^{\lambda-1} f(k)\overline{g(k')}\, d\dot{k}d\dot{k}' \qquad \operatorname{Ex}\lambda > 0$$

(le crochet de deux éléments de G a été défini au § 3). Cette intégrale définit une forme sesquilinéaire invariante sur $C_\lambda(G) \times C_{\bar{\lambda}}(G)$: on voit l'invariance en exprimant (9.10) à l'aide de la forme linéaire positive sur G/AN $\oint_{G/AN} \ldots d\dot{g}$ (voir [4], la remarque p. 14)

$$(9.11) \qquad Z_\lambda(f * g^\circ) = \oint_{G/AN \times G/AN} [x,y]^{\lambda-1} f(x)\overline{g(y)}\, d\dot{x}d\dot{y} .$$

On récupère les autres cas par prolongement analytique.

THÉORÈME 9.1. <u>Formes sesquilinéaires invariantes</u> [2], [3]. $S(\lambda,\mu)$ <u>n'est pas réduit à</u> 0, <u>si et seulement si l'on est dans l'un des cas suivants</u> :

$\lambda+\bar{\mu} \notin 2Z(k)$, $\lambda = \bar{\mu}$ <u>et</u> $Z_\lambda(f * g^\circ)$ engendre $S(\lambda,\bar{\lambda})$

$\lambda+\bar{\mu} \in 2Z(k)$, <u>et</u>

<u>ou</u> $\lambda+\bar{\mu} = 0$ <u>et</u> $\int_{N_-} f(x)\overline{g(x)}\, dx$ <u>engendre</u> $S(\lambda,-\bar{\lambda})$ <u>si</u> λ <u>n'est pas un</u> $s_d \neq 0$

$\int_{N_-} f(x)\overline{g(x)} dx$ <u>et</u> $Z_{s_d}(f * g^\circ)$ <u>l'engendrent si</u> $\lambda = \mu = s_d \neq 0$

<u>ou</u> $\lambda = \bar{\mu}$,

<u>et</u> $\int_{N_-} f^{(\lambda)}(x)\overline{g(x)} dx$ <u>engendre</u> $S(\lambda,\lambda)$ <u>si</u> $\lambda \in Z(k)$

<u>et</u> $\int_{N_-} f^{(r)}(x)\overline{g(x)} dx$ <u>et</u> $Z_\lambda(f * g^\circ)$ <u>l'engendrent</u>

<u>si</u> $\lambda \notin Z(k)$, $r = \operatorname{Ex}\lambda$

<u>ou, si</u> $k = \mathbb{C}$, $\lambda+\bar{\mu}$ <u>est un caractère holomorphe</u> x^{-2n}, n <u>entier</u> ≥ 0, <u>respectivement antiholomorphe</u> $\bar{x}^{-2n}$, <u>et</u> $S(\lambda,\mu)$ <u>est engendré resp. par</u>

$$\int_{N_-} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x)\overline{g(x)}dx \quad \underline{\text{et}} \quad \int_{N_-} \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}^n} f(x)\overline{g(x)}dx \quad .$$

Pour exprimer ce théorème sur la représentation de Weil W^V, on remarque que dans l'identification de G/N à $V - \{0\}$, N_- est la droite $x = 1$. On définit donc un automorphisme de $\mathcal{S}(V)$ en posant $F''(x,y) = \int F(x,y')\tau(yy')dy'$. Pour $\mathrm{Ex}\ \lambda > 0$, les fonctions L_λ^F sont dans $L^1(N_-) \cap L^2(N_-)$ et on a $(L_\lambda^F)'' = M_\lambda^{F''}$ où l'on a posé

(9.12) $$M_\lambda^F(x,y) = \int_{k^*} F(tx,t^{-1}y)\ t^\lambda\ d^\times t \qquad \text{pour } F \in \mathcal{S}(V) .$$

C'est une fonction entière de λ (lemme 5.1) et $M_\lambda^F(a^{-1}g) = a^\lambda M_\lambda^F(g)$, quel que soit $a \in A$, $g \in G$. Enfin (1.3) traduit simplement les formes sesquilinéaires trouvées ci-dessus en $Z_\lambda(L_\lambda^F * (L_{\bar{\lambda}}^G)^\circ) = \Gamma(\lambda) Z_{\underline{1}-\lambda}(M_\lambda^{F''}\overline{M_{\bar{\lambda}}^{G''}})$

10. <u>SÉRIE CONTINUE : ÉQUIVALENCE ET IRRÉDUCTIBILITÉ DES REPRÉSENTATIONS</u>

Pour chaque couple (λ,μ) de caractères généralisés de A, soit $E(\lambda,\mu)$ l'espace des opérateurs continus U de $C_\lambda(G)$ dans $C_\mu(G)$ tels que

(10.1) $$UT_\lambda(g) = T_\mu(g)U \qquad \text{quel que soit } g \in G .$$

Mais on a vu au théorème 9.1 que $C_\mu(G) \times C_{-\bar{\mu}}(G)$ était muni de la forme sesquilinéaire invariante

$$\int_{N_-} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \qquad f \in C_\mu(G) \text{ et } g \in C_{-\bar{\mu}}(G) .$$

Il en résulte que $E(\lambda,\mu)$ est isomorphe à l'espace $S(\lambda,-\bar{\mu})$. On traduit le théorème 9.1.

PROPOSITION 10.1. <u>La dimension de l'espace</u> $E(\lambda,\mu)$ <u>est</u>

- 0 <u>si</u> $\lambda+\mu \neq 0$ <u>et</u> $\lambda-\mu \notin 2Z(k)$;
- 1 <u>si</u> $\lambda = \mu$ <u>et n'est pas un</u> $s_d \neq 0$: <u>les multiples scalaires de l'identité engendrent</u> $E(\lambda,\lambda)$: <u>c'est l'irréductibilité de la représentation</u> ;
- 1 <u>si</u> $\lambda = -\mu$ <u>et n'appartient pas à</u> $\bigcup_{s_d \neq 0} Z(k) + s_d$; $E(\lambda,-\lambda)$ <u>est engendré par la convolution avec</u> Z_λ <u>si</u> λ <u>n'est pas un pôle, par la convolution avec le prolongement analytique de</u> $Z_\lambda/\Gamma(\lambda)$ <u>sinon</u> ;
- 2 <u>si</u> $\lambda = -\mu$ <u>est dans</u> $Z(k) + s_d$, $s_d \neq 0$; $E(\lambda,-\lambda)$ <u>est engendré par la convolution avec</u> Z_λ <u>et par la convolution avec le prolongement analytique de</u> $Z_{\lambda+s_d}/\Gamma(\lambda+s_d)$.

On retrouve les résultats du paragraphe 8 si on remarque que $E(s_d,s_d)$ pour $s_d \neq 0$ est aussi engendré par les deux distributions

$$\delta + Z_{s_d}/\Gamma(s_d) \quad \text{et} \quad \delta - Z_{s_d}/\Gamma(s_d) \tag{10.2}$$

qui sont les transformées de Fourier des distributions associées respectivement à la fonction caractéristique du groupe des normes et à celle de son complémentaire.

La convolution avec Z_λ n'est autre que l'intégrale $\int_{N_-} f(xwy)dy$ étudiée au § 3. On utilise donc l'équation fonctionnelle (3.8) des transformées de Laplace sur le plan. La forme qui définit l'autodualité sur le plan est antisymétrique : la transformation de Fourier est donc sa propre inverse.

L'étude complète de l'opérateur $\int_{N_-} f(xwy)\,dx$ résoud entièrement le problème de l'équivalence.

THÉORÈME 10.2. Equivalence des représentations de la série continue. Pour que les représentations $C_\lambda(G)$ et $C_\mu(G)$ $(\lambda \neq \mu)$ soient équivalentes, il faut et il suffit que

(10.3) $$\lambda + \mu = 0 \quad \text{et} \quad 1 \pm \lambda \notin Z(k) .$$

Un opérateur d'entrelacement est alors donné par le prolongement analytique de

(10.4) $$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{N_-} f(ywx)\, dx, \qquad f \in \mathcal{S}(N_-) .$$

Si $1 \pm \lambda \in Z(k)$, alors

$k = \mathbb{C}$: $\lambda(x) = x^{-p}\, \bar{x}^{-q}$, p et q entiers positifs ; soit $P_\lambda(G)$ le sous-espace $C_\lambda(G)$ formé des polynômes en $a(x)$ de degré plus petit que (p,q), soit $M_{-\lambda}(G)$ le sous-espace de $C_{-\lambda}(G)$ orthogonal à $P_\lambda(G)$. Alors $P_\lambda(G)$ est un sous-espace invariant de $C_\lambda(G)$, $M_{-\lambda}(G)$ un sous-espace invariant de $C_{-\lambda}(G)$, et les représentations suivantes sont équivalentes :

$C_{-\lambda}(G)/M_{-\lambda}(G)$ et $P_\lambda(G)$ d'une part

$C_\lambda(G)/P_\lambda(G)$, $M_{-\lambda}(G)$, $C_{-\lambda'}(G)$ et $C_{\lambda'}(G)$ où $\lambda'(x) = x^{p}\, \bar{x}^{-q}$, d'autre part ;

$k = \mathbb{R}$: $\lambda(x) = x^{-n} \operatorname{sgn} x$, n entier > 0 ; soit $P_\lambda(G)$ le sous-espace de $C_\lambda(G)$ formé des polynômes de degré plus petit que n, soit $M_{-\lambda}(G)$ le sous-espace de $C_{-\lambda}(G)$ orthogonal à $P_\lambda(G)$. Alors $P_\lambda(G)$ est un sous-espace invariant de $C_\lambda(G)$, $M_{-\lambda}(G)$ un sous-espace invariant de $C_{-\lambda}(G)$, et la représentation $C_{-\lambda}(G)/M_{-\lambda}(G)$ est équivalente à $P_\lambda(G)$;

k est un corps à valuation discrète : $\lambda = \underline{+1}$; soit $P_{\underline{-1}}(G)$ le sous-espace de $C_{\underline{-1}}(G)$ formé des fonctions constantes, soit $M_{\underline{1}}(G)$ le sous-espace de $C_{\underline{1}}(G)$ orthogonal à $P_{\underline{-1}}(G)$. Alors $P_{\underline{-1}}(G)$ est un sous-espace invariant de $C_{\underline{-1}}(G)$, $M_{\underline{1}}(G)$ un sous-espace invariant de $C_{\underline{1}}(G)$, et on a les équivalences :

$$C_{\underline{1}}(G)/M_{\underline{1}}(G) \ \underline{\text{est équivalente à}} \ P_{\underline{-1}}(G)$$

$$C_{\underline{-1}}(G)/P_{\underline{-1}}(G) \ \underline{\text{est équivalente à}} \ M_{\underline{1}}(G)$$

[2], [3].

Si on lit ce théorème dans la représentation de Weil (fin du § 9), on voit que (10.4) est l'opérateur de conjugaison E défini au théorème 6.3.

11. SÉRIE CONTINUE : REPRÉSENTATIONS UNITAIRES

On cherche pour quelles valeurs de λ l'espace $S(\lambda,\lambda)$ contient des formes hermitiennes de signe défini. D'après le théorème 9.1, on a alors

(a) soit $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, i.e. λ est unitaire ; dans ce cas $\int_{N_-} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ définit un produit scalaire sur $C_\lambda(G)$: c'est la série principale de G ;

(b) soit $\lambda = \bar{\lambda}$, i.e. λ réel, et si $2\lambda \notin 2Z(k)$ la forme est nécessairement $Z_\lambda(f * g'')$ (les autres cas, qui font intervenir des dérivations, donnent des formes dégénérées ; le cas $\lambda = 0$ est compris dans (a)).

Si $\underline{1} \pm \lambda \notin Z(k)$, on se limite à $\operatorname{Ex} \lambda > 0$ en raison de l'équivalence des représentations $C_\lambda(G)$ et $C_{-\lambda}(G)$. On a alors, d'après l'équation fonctionnelle de la fonction zeta

(11.1) $$Z_\lambda(f * f^\circ) = \Gamma(\lambda) Z_{\underline{1}-\lambda}(|f''|^2) \qquad f \in \mathcal{S}(N_-)\ .$$

Si $\operatorname{Ex} \lambda < 1$, $Z_{\underline{1}-\lambda}$ est donnée par une intégrale. Donc si $\lambda(x) = |x|^r$, $0 < r < 1$, on définit une structure hermitienne sur $C_\lambda(G)$ en posant

(11.2) $$(f|g) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} Z_\lambda(f * g^\circ) = Z_{\underline{1}-\lambda}(f''\bar{g}'')$$

et $C_\lambda(G)$ se complète en $L^2(N_-,|t|^r dt)$, espace de Hilbert, où la représentation associée est irréductible. Pour $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la réciproque est dans [2]. Si k est à valuation discrète, une condition nécessaire est que $\underline{1}\text{-}\lambda$ soit de signe défini (c'est une mesure sur l'ouvert $|x| = 1$), c'est-à-dire que λ ne soit pas ramifié. Notons donc $\lambda(x) = |x|^r$. Si $r \neq 1$, le prolongement analytique de $Z_{\underline{1}-\lambda}$ est

$$Z_{\underline{1}-\lambda}(|f''|^2) = \int_M |f''(x)|^2 a(x)^{-\lambda}\, dx + \frac{q^{m(r-1)}}{1-q^{r-1}} |f''(0)|^2 \qquad f \in \mathcal{S}(N_-) \tag{11.3}$$

où m est un entier et M un compact multiplicatif, tous deux assez grands. Cette forme est de signe défini si et seulement si $r < 1$. De plus, cette expression montre que si $r = 1$, le sous-espace $M_{\underline{1}}(G)$ de $D_{\underline{1}}(G)$ se complète en $L^2(N_-, d^x x)$.

THÉORÈME 11.1. <u>Représentations unitaires de la série continue</u>. <u>Les représentations unitaires induites par un caractère généralisé</u> λ <u>de</u> A <u>sont</u> :

(a) <u>les représentations de la série principale, induites par les caractères de</u> A <u>elles se réalisent dans</u> $L^2(N_-)$ <u>et sont irréductibles si</u> λ <u>n'est pas un caractère</u> $s \neq 0$;

(b) <u>les représentations de la série "complémentaire", induites par les caractères réels</u> $\lambda(x) = |x|^r$, $0 < |r| < 1$, <u>réalisées dans les espaces</u> $L^2(N_-, a(x)^{-r} dx)$ <u>elles sont irréductibles</u>.

Si le corps k est à valuation discrète, on appelle <u>représentation spéciale</u> de G la représentation de G dans le sous-espace invariant $M_{\underline{1}}(G)$ de $C_{\underline{1}}(G)$ complété en $L^2(N_-, d^x x)$.

Les représentations de la série continue donnent, si $k = \mathbb{R}$, les représentations de la série discrète : elles correspondent à $\lambda(x) = x^n$, n entier > 0, l'espace $C_n(G)$ se décomposant en somme directe de deux sous-espaces invariants sur chacun desquels on peut mettre une structure hermitienne ([2]).

12. SÉRIES DISCRÈTES DE REPRÉSENTATIONS

On reprend les notations du § 6 : $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ est un corps quadratique sur k, C est le sous-groupe de Cartan compact associé. Le théorème 6.3 décompose la représentation de Weil $(L^2(B), W^B)$ en somme directe hilbertienne des sous-espaces invariants $L^2_m(B)$, m caractère de C, formés des fonctions de type m

(12.1) $$f(cz) = c^m f(z) \quad \text{quel que soit} \quad c \in C \ .$$

On envoie $L^2_m(B)$ sur $L^2(\underline{n})$, où $\underline{n}$ est le groupe des normes de l'extension B, comme il a été dit au § 5. Les formules (6.11) se traduisent alors en

(12.2) $$W^B_m(n)F\ (x) = \tau'(ux)F(x) \qquad \text{si} \quad n = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(12.3) $$W^B_m(a)F\ (x) = \underline{t}^{1+m+s}\ F(t^2x) \quad \text{si} \quad a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

s a été défini au § 4 ,

(12.4) $$W^B_m(w)F\ (x) = a\ r \int_{\underline{n}} F(y)\ dy \int_{c\bar{c}=yx^{-1}} \tau'(-\ cx - c^{-1}y)dc^m$$

d'après (5.10).

THÉORÈME 12.1. Irréductibilité des représentations des séries discrètes. Les représentations des séries discrètes sont irréductibles, sauf si le caractère m est d'ordre deux.

Preuve. Soit un opérateur continu qui commute à la représentation. (12.2) montre que c'est la multiplication par une fonction mesurable bornée h sur $\underline{n}$. (12.3) dit que h est constante sur les classes des carrés dans $\underline{n}$: c'est donc l'irréductibilité pour $k = R$. Sinon h prend au plus deux valeurs. Si on revient à la réalisation dans $L^2_m(B)$, h devient une fonction sur B qui est constante sur chacune des deux classes du sous-groupe $k^x.C$ de B^x ; la commutation à l'action du w donne presque partout en $(x,y) \in B \times B$, $(h(x) - h(y))J_m(x,y) = 0$, où, d'après (5.5) $J_m(x,y) = \Sigma\overline{\langle cx,y\rangle}c^{-m}$ est une somme de Kloosterman ([13]) dont les propriétés donnent les conclusions (cf. thèse de Joseph A. Shalika, à paraître ?).

Le caractère τ' est de la forme $\tau'(x) = \tau(\alpha x)$, où τ est le caractère défini au § 1. Appelons $D_m^+(G)$, si $\alpha \in \underline{n}$, la série discrète de paramètre m, sinon $D_m^-(G)$: elles sont respectivement définies sur $\underline{n}$ et sur son complémentaire si, à la fonction F de $L_m^2(\underline{n})$, on associe la fonction $f(x) = F(\alpha x)$. Ce sont les séries discrètes de [3].

Les représentations $D_m^+(G)$ et $D_{m'}^-(G)$ ne sont pas équivalentes : on le voit en regardant la commutation à l'action de N. Le théorème 6.3 montre que les représentations d'indice m et m' opposés sont équivalentes. Le calcul des traces donne la réciproque.

APPENDICE : TRACES DES REPRÉSENTATIONS ET MESURE DE PLANCHEREL

Elles sont données par Gel'fand et Graev dans ([3]). Reproduisons-les.

Les représentations de la série principale et de la série complémentaire ont pour traces :

$$\operatorname{Tr} T_\lambda(g) = \begin{cases} 0 & \text{si les valeurs propres de } g \text{ ne sont pas dans } k \\ \dfrac{b^\lambda + b^{-\lambda}}{|b-b^{-1}|} & \text{si les valeurs propres } b \text{ et } b^{-1} \text{ de } g \text{ sont dans } k\,. \end{cases}$$

La trace de la représentation spéciale, $\operatorname{Tr} T_{\underline{1}}$, s'obtient de la formule précédente en y faisant $\lambda(x) = |x|$ et y retranchant 1 (codimension de $M_{\underline{1}}(G)$ dans $C_{\underline{1}}(G)$).

La différence des traces des représentations des séries discrètes $D_m^+(G)$ et $D_m^-(G)$ est donnée par :

$$\operatorname{Tr} W_m^{C,+}(g) - \operatorname{Tr} W_m^{C,-}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \text{ n'a pas ses valeurs propres sur } C \\ e\, s(v) \dfrac{b^m + b^{-m}}{|N_{B/k}(b-b^{-1})|^{\frac{1}{2}}} & \text{sinon .} \end{cases}$$

s est le caractère associé à l'extension quadratique B de k relative à C, et $e = 2\Gamma(s)/a_o$ où a_o est donné par (5.3) où l'on a pris τ comme caractère additif : on a $a_o = \pi$ si $k = \mathbb{R}$ et $a_o = (1+q^{-1})/2$ si l'extension $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ est non ramifiée, et $a_o = |d|^{\frac{1}{2}}$ sinon.

La somme des traces est, en g,

$$\operatorname{Tr} \bar{W}_m^C(g) = 2 \int_C (\operatorname{Tr} g - c - c^{-1})^{s-\underline{1}}\, dc^m .$$

La mesure de Plancherel est donnée par la décomposition de la mesure de Dirac de G

$$\delta(g) = \int_{X_1(A)} \operatorname{Tr} T_\lambda(g)\, dp_A(\lambda) + (2f \operatorname{Tr} T_{\underline{1}}(g)) + \sum_C \int_{X_1(C)} \operatorname{Tr} \bar{W}_m^C(g)\, dp_C(m)$$

f étant une constante, la sommation se faisant sur les sous-groupes de Cartan compacts, et le terme entre parenthèses n'intervenant que si k est à valuation discrète. Les mesures dp sont données par

$$dp_A(\lambda) = C_k \frac{d\lambda}{|\Gamma(\lambda)|^2}$$

où $d\lambda$ est la mesure duale de da, et où $C_k = 2, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}$ suivant que $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, ou est à valuation discrète

$$p_C(m) = f\int_C \frac{dc^m}{|\mathrm{Tr}\ c - 2|}\ ,\quad f = \frac{q^2}{2(q+1)}$$

(on prend $q = 1$ si $k = \mathbb{R}$) sauf si l'extension est ramifiée, auquel cas

$$p_C(m) = f\int_{C'} (1 + |\mathrm{Tr}\ c - 2|^{-1})dc^m$$

l'intégration se faisant sur les points c de C tels que $|1-c| < 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BRUHAT - Distributions sur les groupes localement compacts et applications aux représentations des groupes p-adiques. Bull. S.M.F. 89 (1961), p. 43-76.

[2] I.M. GEL'FAND, M.I. GRAEV, N. Ya. VILENKIN - Generalized functions, t. V, Academic Press, New-York (1966).

[3] I.M. GEL'FAND, M.I. GRAEV, I.I. PIATECKIJ-SAPIRO - Obobchennie funktsii, t. VI, Moscou (1966).

[4] R. GODEMENT - Analyse spectrale des fonctions modulaires, Séminaire Bourbaki, n° 278, déc. 1964, rédaction de mars 1966.

[5] H. JACQUET - Fonctions de Whittaker attachées aux groupes de Chevalley, Thèse, juin 1967, Bull. S.M.F. 95 (1967), p. 243-309.

[6] P.J. SALLY and M.H. TAIBLESON - Special functions on locally compact fields, Acta Mathematica 116 (1966), p. 279-306.

[7] S. TANAKA - On irreductible unitary representations of some special linear groups of the second order, Osaka J. Math. 3 (1966), p. 217-242.

[8] J. TATE - Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions. Algebraic number theory (ed. by J.W.S. Cassels and A. Fröhlich). Ac. Press, 1967.

[9] A. WEIL - Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Mathematica 111 (1964), p. 153-211.

[10] A. WEIL - Fonctions zeta et distributions. Séminaire Bourbaki, n° 312, juin 1966.

[11] A. WEIL - Basic Number Theory. Springer-Verlag (1967).

[12] S. TANAKA - Irreductible representations of $SL_2(\mathbf{F}_q)$. Osaka J. Math. 4 (1967) p. 65-84.

[13] H. D. KLOOSTERMAN - The behavior of general theta functions under the modular group. Ann. of Math. 47 (1946), p. 317-447.