CHRISTIAN HOUZEL

Espaces analytiques rigides

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 327, p. 215-235
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__215_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année, 1966/67, n° 327 Juin 1967

ESPACES ANALYTIQUES RIGIDES
(d'après R. KIEHL)

par Christian HOUZEL

On considère un corps K valué complet ultramétrique, avec une valuation non triviale. L'algèbre des séries formelles restreintes à n indéterminées

$$T_n = K\{z_1,\ldots,z_n\} = \{\sum_\mu a_\mu z^\mu \in K[[z_1,\ldots,z_n]] \mid \lim a_\mu = 0\}$$

est munie de la norme : $\|\sum a_\mu z^\mu\| = \sup_\mu |a_\mu|$ qui en fait une algèbre de Banach. Tate a démontré [7] que c'est un anneau noethérien et que ses idéaux sont fermés. Nous appellerons «algèbres de Tate» les K-algèbres isomorphes à un quotient d'une algèbre T_n ; on peut munir une telle algèbre d'une structure d'algèbre de Banach, et tout homomorphisme d'une algèbre de Tate dans une autre est continu.

Les idéaux maximaux d'une algèbre de Tate sont de codimension finie. Par suite si $u : A \to B$ est un homomorphisme d'algèbres de Tate, pour tout idéal maximal $\underline{n}$ de B l'idéal $u^{-1}(\underline{n})$ est maximal dans A ; on obtient ainsi une application ${}^a u : \underline{n} \to u^{-1}(\underline{n})$ de Spm(B) dans Spm(A) (spectres maximaux). Nous définirons la catégorie des espaces analytiques affines de la manière suivante :

- <u>un espace analytique affine</u> est un ensemble X muni d'une algèbre de Tate A et d'une bijection $j_X : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spm}(A)$.

- un morphisme $v : (X,A) \to (X,B)$ est un couple (v_o, v_1) où v_o est une application de X dans Y et v_1 un homomorphisme de B dans A, tel que

$$j_Y(v_o(x)) = v_1^{-1}(j_X(x)) \qquad \text{pour tout } x \in X .$$

La composition des morphismes est évidente, et la catégorie obtenue est antiéquivalente à celle des algèbres de Tate.

Soit X un espace analytique affine, d'algèbre A. Pour tout $x \in X$ nous désignerons par $K(x)$ le corps résiduel $A/\underline{m}_x$, où $\underline{m}_x = j_X(x)$ est l'idéal maximal de A qui correspond à x ; ce corps est une extension finie de K et admet une valeur absolue unique prolongeant celle de K. Si $f \in A$ et $x \in X$ nous désignerons par $f(x)$ la classe de f mod. $\underline{m}_x$; ainsi $f(x) \in K(x)$.

Nous dirons qu'une partie Z d'un espace analytique affine X d'algèbre A est une <u>partie affine</u> si le foncteur qui à un espace analytique affine Y associe l'ensemble des morphismes v de Y dans X tels que $v(Y) \subset Z$ est représentable ; cela signifie qu'il existe une algèbre de Tate A_Z munie d'un homomorphisme $u : A \to A_Z$ tel que ${}^a u(\mathrm{Spm}(A_Z)) \subset Z$, ce morphisme u étant universel pour la propriété en question. D'après Tate [7] A_Z est plat sur A et ${}^a u$ définit une bijection de $\mathrm{Spm}(A_Z)$ sur Z ; on peut ainsi munir Z d'une structure d'espace analytique affine, d'algèbre A_Z. Par exemple si $f_1,\ldots,f_r$ et $g_1,\ldots,g_s$ sont des éléments de A, l'ensemble Z des points $x \in X$ tels que $|f_i(x)| \leq 1$ pour $i = 1,\ldots,r$ et $|g_j(x)| \geq 1$ pour $j = 1,\ldots,s$ est une partie affine de X, d'algèbre $A\{f_1,\ldots,f_r, g_1^{-1},\ldots,g_s^{-1}\}$; les parties affines définies de cette manière seront appelées <u>polyèdres analytiques</u>.

1. <u>Espaces analytiques rigides</u>.

Pour recoller les espaces analytiques affines et développer une théorie des faisceaux, on a besoin d'une topologie. Les espaces analytiques rigides auront une structure de site au sens de [6]. Nous appellerons <u>espace rigide</u> un espace topologique X muni d'une base d'ouverts $\mathcal{B}$ stable par intersection finie et possédant $\emptyset$ et pour chaque ouvert $U \in \mathcal{B}$ d'un ensemble de recouvrements de U

par des ouverts de $\mathcal{B}$, ces ensembles de recouvrements constituant une prétopologie [6] sur la catégorie associée à l'ensemble $\mathcal{B}$ ordonné par inclusion. Nous dirons que les ouverts appartenant à $\mathcal{B}$ sont <u>admissibles</u> et que les recouvrements donnés des ouverts admissibles sont des <u>recouvrements admissibles</u>. Ces données sont soumises à l'axiome de saturation suivant :

Soient U un ouvert admissible et V un ouvert contenu dans U. S'il existe un recouvrement admissible (U_i) de U tel que $V \cap U_i$ soit admissible pour tout i l'ouvert V est lui-même admissible.

Un morphisme d'un espace rigide X dans un autre Y est une application (continue) $v : X \to Y$ telle que l'image réciproque par v d'un ouvert admissible de Y soit un ouvert admissible de X et que l'image réciproque par v d'un recouvrement admissible soit un recouvrement admissible.

Sur un espace rigide X on peut définir des faisceaux (d'ensembles, de groupes, d'anneaux, etc.) : ce sont les faisceaux sur le site des ouverts admissibles. Désignons par X^W l'espace topologique sous-jacent à X ; si F est un faisceau sur X il engendre un faisceau F^W sur l'espace X^W. Un <u>espace rigide annelé</u> est par définition un espace rigide X muni d'un faisceau d'anneaux $\underline{O}_X$ (nous supposerons les anneaux unifères et commutatifs). On dit que $(X,\underline{O}_X)$ est annelé en anneaux locaux si pour tout $x \in X$ la fibre $\underline{O}^W_{X,x}$ du faisceau $\underline{O}^W_X$ est un anneau local ; la notion de morphisme d'espaces rigides annelés en anneaux locaux est claire.

Si U est un ouvert admissible d'un espace rigide X il admet une structure rigide induite dont la définition est évidente. Lorsque X est muni d'un faisceau d'anneaux $\underline{O}_X$, on munit U du faisceau induit $\underline{O}_X | U$.

Etant donné un espace analytique affine X d'algèbre A, les polyèdres analytiques forment la base d'une topologie sur X pour laquelle toutes les parties affines sont ouvertes ; c est la moins fine des topologies qui rendent continues les applications : $x \mapsto |f(x)|$ $(f \in A)$ de X dans $\mathbb{R}_+$. On dit qu'un recouvrement $\underline{U} = (U_i)$ d'une partie affine Z de X est <u>spécial</u> s'il existe une suite $(\underline{U}_n)_{0 \leq n \leq r}$ de recouvrements de Z telle que $\underline{U}_0 = (Z)$, $\underline{U}_r = \underline{U}$ et que pour $n = 1,\ldots,r$ le recouvrement $\underline{U}_n$ s'obtienne à partir de $\underline{U}_{n-1}$ en recouvrant chaque ouvert de $\underline{U}_{n-1}$ par un nombre fini de polyèdres analytiques de cet ouvert. Les recouvrements spéciaux définissent une prétopologie sur la catégorie des parties affines de X. Le foncteur contravariant $\tilde{A} : Z \mapsto A_Z$ $(Z \text{ affine} \subset X)$ est un faisceau d'algèbres pour cette prétopologie ; plus généralement, si M est un A-module de type fini le foncteur $\tilde{M} : Z \mapsto M \otimes_A A_Z$ est un faisceau de A-modules [7]. Ces résultats ont été établis par Tate en même temps que le suivant :

Pour tout recouvrement spécial $\underline{U}$ de X et tout A-module de type fini M on a $M \xrightarrow{\sim} H^0(\underline{U},\tilde{M})$ et $H^q(\underline{U},\tilde{M}) = 0$ pour $q \geq 1$.

Venons-en à la définition des espaces analytiques rigides, en commençant par munir tout espace analytique affine X d'une structure rigide annelée en anneaux locaux. Nous dirons qu'un ouvert U de X est <u>admissible</u> s'il existe un recouvrement $\underline{U}$ de U par des parties affines de X tel que pour tout morphisme $v : Y \to X$ d'un espace analytique affine Y dans X dont l'image $v(Y)$ est contenue dans U il existe un recouvrement spécial de Y plus fin que $v^{-1}(\underline{U})$. Les <u>recouvrements admissibles</u> d'un ouvert admissible U de X sont définis comme les recouvrements $\underline{U}$ de U par des ouverts admissibles tels que pour tout morphisme $v : Y \to X$ $(Y \text{ affine})$ d'image contenue dans U il existe un recouvrement spécial de Y plus fin que $v^{-1}(\underline{U})$. Le <u>faisceau d'anneau</u> structural de X s'obtient en prolongeant au site des ouverts admissibles le faisceau $\tilde{A}$ défini plus haut sur le site des ouverts affines ; sa fibre $\underline{O}_{X,x}$ en un point $x \in X$ est un anneau local contenant le localisé $A_{\underline{m}_x}$ et ayant même complété que ce localisé [7].

Notons que la catégorie des faisceaux sur le site des ouverts admissibles est équivalente à celle des faisceaux sur le site des ouverts affines.

DÉFINITION 1. On dit qu'un espace rigide annelé en anneaux locaux X est K-analytique s'il existe un recouvrement admissible $(X_i)_{i \in I}$ de X et pour tout couple $(i,j) \in I \times I$ un recouvrement admissible $(X_{ijk})_k$ de $X_i \cap X_j$ tels que les X_i et les X_{ijk} soient isomorphes (comme espaces rigides annelés en anneaux locaux) à des espaces analytiques affines sur K.

Nous nous intéresserons surtout au cas où il existe un recouvrement admissible affine (X_i) tel que les intersections $X_i \cap X_j$ soient encore affines.

2. Faisceaux analytiques cohérents.

DÉFINITION 2. Soit X un espace rigide analytique. On dit qu'un $\underline{O}_X$-Module $\underline{F}$ est cohérent s'il existe un recouvrement admissible (X_i) de X par des ouverts affines X_i d'algèbres A_i et pour tout i un A_i-module de type fini M_i tel que $\underline{F}|X_i \simeq \tilde{M}_i$.

Il revient au même de dire que $\underline{F}$ est de présentation finie (en un sens évident).

THÉORÈME 1. Soient X un espace analytique affine d'algèbre A et $\underline{F}$ un $\underline{O}_X$-Module cohérent. Il existe un A-module de type fini M tel que $\underline{F} \simeq \tilde{M}$.

Avec le résultat de Tate cité plus haut, ce théorème ([3], Theor. 1.4) donne l'analogue des théorèmes A et B de Cartan [1] pour les faisceaux analytiques cohérents sur les espaces K-analytiques affines.

Disons qu'un faisceau $\underline{F}$ est $\underline{U}$-cohérent, $\underline{U} = (U_i)$ étant un recouvrement admissible affine de X, s'il existe pour tout i un A_{U_i}-module de type fini M_i tel que $\underline{F}|U_i \simeq \tilde{M}_i$. Si $\underline{F}$ est $\underline{U}$-cohérent, le théorème de Tate déjà rappelé et le théorème de Leray montrent que $H^q(\underline{U},\underline{F}) \simeq H^q(X,\underline{F})$ pour $q \geq 1$ (pour la cohomologie des faisceaux sur un site, cf. [6]) ; d'ailleurs $H^\circ(\underline{U},\underline{F}) \simeq H^\circ(X,\underline{F})$ (module des sections de $\underline{F}$ sur X).

Pour démontrer le théorème 1 on se ramène immédiatement au cas où $\underline{F}$ est $\underline{U}$-cohérent pour un recouvrement fini $\underline{U}$ de X par des polyèdres analytiques et on utilise le lemme suivant :

LEMME 1. <u>Soit</u> U <u>un recouvrement fini de</u> X <u>par des polyèdres analytiques</u>. <u>Si</u> $\underline{G}$ <u>est un faisceau</u> $\underline{U}$<u>-cohérent on a</u> $H^1(X,\underline{G}) \simeq H^1(\underline{U},\underline{G}) = 0$.

Avant de démontrer ce lemme, déduisons-en le théorème. Soit $\underline{F}$ un faisceau $\underline{U}$-cohérent. Pour tout $x \in X$ le faisceau $\underline{G} = \underline{m}_x\underline{F}$ est $\underline{U}$-cohérent et en lui appliquant le lemme 1 on obtient à partir de la suite exacte

$$0 \to \underline{m}_x\underline{F} \to \underline{F} \to \underline{F}/\underline{m}_x\underline{F} \to 0$$

la suite exacte de cohomologie

$$\Gamma(X,\underline{F}) = H^\circ(\underline{U},\underline{F}) \to H^\circ(\underline{U},\underline{F}/\underline{m}_x\underline{F}) \to H^1(\underline{U},\underline{m}_x\underline{F}) = 0 .$$

Or $H^\circ(\underline{U},\underline{F}/\underline{m}_x\underline{F}) = (\underline{F}/\underline{m}_x\underline{F})_x = \underline{F}_x/\underline{m}_x\underline{F}_x$ car le support de $\underline{F}/\underline{m}_x\underline{F}$ est $\{x\}$. Grâce au lemme de Nakayama on conclut que $\Gamma(X,\underline{F})$ engendre le $\underline{O}_{X,x}$-module (de type fini) $\underline{F}_x$. Alors pour tout indice i on peut trouver un morphisme $\underline{O}_X^{n_i} \to \underline{F}$ qui est surjectif dans l'ouvert U_i de $\underline{U}$ et on en déduit un épimorphisme : $\underline{O}_X^n \to \underline{F}$ avec $n = \Sigma\, n_i$. Comme le noyau de cet épimorphisme est encore $\underline{U}$-cohérent on peut lui appliquer le raisonnement précédent, ce qui donne une présentation finie

$$\underline{O}_X^m \to \underline{O}_X^n \to \underline{F} \to 0$$

de $\underline{F}$ dans X (globalement). Ainsi $\underline{F} \simeq \tilde{M}$ où $M = \mathrm{Coker}\,(A^m \to A^n)$ et le théorème est démontré.

Dans la démonstration du lemme 1 on se ramène, comme le fait Tate, à considérer deux types particuliers de recouvrements :

<u>1er type</u> : $\underline{U} = (U', U'')$ avec $U' = \{x \in X \mid |f(x)| \leqq 1\}$ et $U'' = \{x \in X \mid |f(x)| \geqq 1\}$ où $f \in A$.

La démonstration, dans ce cas, repose sur un résultat moins fort :

LEMME 2. <u>Le</u> A-<u>module</u> $H^1(\underline{U},\underline{G})$ <u>est de type fini</u>.

Il est facile d'en déduire le lemme 1. Soit en effet $x \in X$; la suite

$$C^\circ(\underline{U},\underline{G}) \to C^1(\underline{U},\underline{G}) \to H^1(\underline{U},\underline{G}) \to 0$$

exacte par définition de $H^1(\underline{U},\underline{G})$ donne en tensorisant par $K(x) = A/\underline{m}_x$

$$\begin{array}{ccccccc} C^\circ(\underline{U},\underline{G}) \otimes K(x) & \to & C^1(\underline{U},\underline{G}) \otimes K(x) & \to & H^1(U,G) \otimes K(x) & \to & 0 \\ \| & & \| & & & & \\ C^\circ(\underline{U},\underline{G}/\underline{m}_x G) & & C^1(\underline{U},\underline{G}/\underline{m}_x \underline{G}) & & & & \end{array}$$

encore exacte, ce qui montre que $H^1(\underline{U},\underline{G}) \otimes K(x) \simeq H^1(\underline{U},\underline{G}/\underline{m}_x\underline{G})$. Or $\underline{G}/\underline{m}_x\underline{G}$, qui est concentré en x, est de la forme $\tilde{N}$ où N est fini sur $K(x)$. D'après Tate sa cohomologie est nulle, donc $H^1(\underline{U},\underline{G}) \otimes K(x) = 0$ et comme x est arbitraire le lemme de Nakayama, que l'on peut appliquer grâce au lemme 2, montre que $H^1(\underline{U},\underline{G}) = 0$.

Reste à démontrer le lemme.

Comme $\underline{G}$ est $\underline{U}$-cohérent il existe des épimorphismes : $\underline{O}_{U'}^{q'} \to \underline{G}|U'$ et $\underline{O}_{U''}^{q''} \to \underline{G}|U''$. On en déduit un épimorphisme : $\underline{L} \to \underline{G}$ où $\underline{L}$ est un faisceau sur X

tel que $\underline{L}|U'$ et $\underline{L}|U''$ soient libres de rang $q = q' + q''$. Si $\underline{N}$ est le noyau de cet épimorphisme, la suite exacte de cohomologie s'écrit

$$H^1(\underline{U},\underline{L}) \quad \rightarrow \quad H^1(\underline{U},\underline{G}) \quad \rightarrow \quad H^2(\underline{U},\underline{N}) = 0$$

où le dernier terme est nul car $\underline{U}$ ne comporte que 2 ouverts. Pour montrer que $H^1(\underline{U},\underline{G})$ est de type fini il suffit donc de montrer que $H^1(\underline{U},\underline{L})$ l'est.

On est donc ramené au cas où $\underline{G}|U' \simeq \widetilde{M}'$ et $\underline{G}|U'' \simeq \widetilde{M}''$ où M' (resp. M'') est un $A_{U'}$-module (resp. un $A_{U''}$-module) libre de type fini. Par ailleurs il est facile de se ramener au cas où $X = D^{n+1}$ est un polydisque, d'algèbre T_{n+1} (le cas où X est de dimension 0 est trivial) et où $f = \lambda^{-1}z_{n+1}$ $(0 < |\lambda| < 1)$. Nous supposerons ces réductions faites.

Ainsi $A = K\{z_1,\dots,z_n,z_{n+1}\}$. Considérons la sous-algèbre $B = K\{z_1,\dots,z_n\}$ de A et posons $C = B\{t,t^{-1}\}$ où t est une nouvelle indéterminée. Nous utiliserons différents sous-B-modules de C :

$$C^+ = \sum_{i\geq 0} b_i t^i = B\{t\} \ , \quad C^- = \sum_{i<0} b_i t^i \subset B\{t^{-1}\} \quad \text{et} \quad C_m = \sum_{|i|\leq m} b_i t^i$$

(m entier naturel). L'homomorphisme qui associe f à t est un isomorphisme de C sur $A_{U'\cap U''}$ (resp. de C^+ sur $A_{U'}$, de $B\{t^{-1}\}$ sur $A_{U''}$).

On a $\underline{G}|U' \cap U'' \simeq \widetilde{L}$ avec $L \simeq M'' \otimes_{A_{U''}} A_{U'\cap U''}$. Ainsi $C^\circ(\underline{U},\underline{G}) = M' \times M''$, $C^1(\underline{U},\underline{G}) = L$ et $d^\circ : C^\circ(\underline{U},\underline{G}) \to C^1(\underline{U},\underline{G})$ est l'application :

$$(s',s'') \longmapsto (s''|_{U'\cap U''} - s'|_{U'\cap U''} \quad (s'\in M' \ , \ s''\in M'') \ .$$

On veut prouver que $H^1(\underline{U},\underline{G}) = L/d^\circ(M' \times M'')$ est de type fini. Considérons L comme un C-module muni d'un automorphisme α (recollement de M' et M'') et choisissons une base $e_1,\dots,e_r$ de L sur C. Si on pose $L^+ = \Sigma\, C^+ e_i$,

$L^- = \Sigma\, C^- e_i$ et $L_m = \Sigma\, C_m e_i$ $(m \in \mathbb{N})$, on obtient différents sous-B-modules de L et on a $L = L^+ \oplus L^-$ et $d°(M' \times M'') = \alpha(L^+) + L^-$. Il suffit donc, puisque L_m est de type fini sur B, de démontrer le lemme suivant :

LEMME 3. Il existe un entier m tel que $L = \alpha(L^+) + L^- + L_m$.

Si ρ est un endomorphisme de L, identifié à sa matrice dans la base (e_i), on lui associe pour tout entier m un B-endomorphisme ρ_m obtenu en tronquant par l'application

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i t^i \quad \to \quad \sum_{|i| \leqq m} b_i t^i$$

de C dans C_m. On désigne par $\|\rho\|$ la borne supérieure des normes (dans C) des éléments de la matrice ρ.

Posons $a = \sup(\|\alpha\|, \|\alpha^{-1}\|)$ et soit $\mu \in K$ tel que $0 < |\mu| < 1$. Il existe un entier m tel que $\|\alpha - \alpha_m\| \leqq |\mu|/a$ et $\|\alpha_m \circ (\alpha^{-1})_m - 1\| \leqq |\mu|$, ce qui permet d'écrire $\alpha_m = \alpha + \mu\beta$, $\alpha_m \circ (\alpha^{-1})_m = 1 + \mu\gamma$ où β et γ sont des B-endomorphismes de L tels que $\|\gamma\| \leqq 1$ et $a\|\beta\| \leqq 1$.

Désignons par π la projection : $s \longmapsto s^-$ de L sur L^- parallèlement à L^+, et posons pour tout $s \in L$

$$\rho(s) = ((\alpha^{-1})_m(s^+))^+$$

et

$$\sigma(s) = \alpha_m(((\alpha^{-1})_m(s^+))^-) = \alpha_m((\alpha^{-1})_m(s^+) - \rho(s)).$$

Les applications B-linéaires $\pi : L \to L^-$, $\rho : L \to L^+$ et $\sigma : L \to L_{2m}$ vérifient

$$\begin{aligned} \pi + \alpha \circ \rho + \sigma + \mu(\beta \circ \rho - \gamma \circ (1-\pi)) &= \pi + (\alpha + \mu\beta) \circ \rho + \sigma - \mu\gamma \circ (1-\pi) \\ &= \pi + \alpha_m \circ \rho + \sigma - \mu\gamma \circ (1-\pi) = \pi + \alpha_m \circ (\alpha^{-1})_m \circ (1-\pi) - \mu\gamma(1-\pi) \\ &= \pi + 1 - \pi = 1 \end{aligned}$$

ou encore $\pi + \alpha \circ \rho + \sigma = 1 - \mu\tau$ avec $\tau = \beta \circ \rho - \gamma \circ (1-\pi)$. Comme on voit facilement que $\|\tau\| \leqq 1$, on sait que $1-\mu\tau$ est inversible et on peut écrire

$$1 = \pi \circ \tau^{-1} + \alpha \circ \rho \circ \tau^{-1} + \sigma \circ \tau^{-1}$$

d'où

$$L = \pi(\tau^{-1}(L)) + \alpha(\rho \circ \tau^{-1}(L)) + \sigma(\tau^{-1}(L)) .$$

Le lemme est démontré.

<u>2ème type de recouvrement</u> : $\underline{U} = (U_i)_{i\in I}$ avec $U_i = \{x\in X \mid |f_i(x)| \geqq 1\}$ où $(f_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de A tels que $|f_i(x)| \leqq 1$ pour tout $i\in I$ et tout $x\in X$ (I est fini).

Dans ce cas on démontre directement que $H^1(\underline{U},\underline{G}) = 0$ en construisant une application de $Z^1(\underline{U},\underline{G})$ dans $C^\circ(\underline{U},\underline{G})$ inverse à droite du cobord d° : ainsi d° est surjectif. Pour cette construction on utilise un lemme de Tate [7, cor. 1 du th. 6.4] qui affirme que, dans le sous-anneau A_o de A formé des f tels que $|f(x)| \leqq 1$ quel que soit $x\in X$, l'idéal engendré par les f_i ($i\in I$) est A_o tout entier et d'autre part le lemme suivant, inspiré de ([5], § 3] :

LEMME 4. <u>Soient</u> M <u>un</u> A-<u>module de type fini et</u> $f\in A_o$. <u>Posons</u> $N = M \otimes_A A\{f^{-1}\}$ <u>et désignons par</u> ρ <u>l'application canonique de</u> M <u>dans</u> N. <u>Il existe un nombre</u> $C > 0$ <u>tel que</u>

(i) <u>Pour tout</u> $s\in M$ <u>et tout</u> $\theta > \|\rho(s)\|$ <u>il existe</u> $n_o\in \mathbb{N}$ <u>tel que</u> $\|f^n s\| < C\theta$ <u>pour tout</u> $n \geqq n_o$.

(ii) <u>Pour tout</u> $t\in N$ <u>et tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>il existe</u> $n_o\in \mathbb{N}$ <u>tel que pour tout</u> $n \geqq n_o$ <u>il existe</u> $s\in M$ <u>vérifiant</u> $\|s\| \leqq C\|t\|$ <u>et</u> $\|\rho(s) - f^n t\| \leqq \varepsilon$.

Dans l'énoncé de ce lemme on a supposé des normes choisies dans M et N (toutes les normes sont équivalentes et font de M et N des K-espaces de Banach).

Il est facile de se ramener au cas où $\|f\| = 1$ et on peut choisir les normes de M et N de manière que $N_o = \widehat{(M_o)_f}$ (complété du localisé) et

$$N_o/aN_o = (M_o/aM_o)_f$$

quel que soit $a \in K$ tel que $0 < |a| \leq 1$, en désignant par M_o et N_o les boules unités respectives de M et N.

Pour trouver C vérifiant (i), on peut supposer que $s \in M_o$ et $\theta \leq 1$. Alors il existe $a \in K$ tel que $|a| < \theta$ et $\rho(s) \in aN_o$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M_o \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & N_o \arrow[d] \\ M_o/aM_o \arrow[r, "\bar{\rho}"] & N_o/aN_o = (M_o/aM_o)_f \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont induites par ρ et les flèches verticales sont les surjections canoniques : $u \mapsto \bar{u}$. D'après le choix de a on a $\bar{\rho}(\bar{s}) = 0$ donc il existe un entier n_o tel que $\overline{f^n s} = f^n \bar{s} = 0$, c'est-à-dire $\|f^n s\| \leq |a| < \theta$, pour tout $n \geq n_o$. Ainsi on peut prendre $C = 1$ (grâce au choix particulier des normes de M et N).

Vérifions (ii). On peut supposer que $t \in N_o$, $t \neq 0$ et $\varepsilon < \|t\|$. Soit $a \in K$ tel que $0 < |a| < \varepsilon$. D'après le diagramme tracé plus haut on voit qu'il existe un entier r et un élément z de M_o/aM_o tels que $\bar{\rho}(z) = f^r \bar{t}$. Soit $s \in M_o$ un élément relevant z. On a $\overline{\rho(s) - f^r t} = 0$ c'est-à-dire

$$\|\rho(s) - f^r t\| \leq |a| < \|t\| ,$$

d'où il résulte que

$$\|\rho(s)\| = \|f^r t\| = \|t\| < 2\|t\| .$$

D'après la première partie il existe alors un entier n_o tel que $\|f^n s\| < 2C\|t\|$ pour tout $n \geqq n_o$ (ici $C = 1$) et on peut écrire

$$\|\rho(f^n s) - f^{n+r} t\| = \|f^n(\rho(s) - f^r t)\| \leqq |a| < \varepsilon .$$

La démonstration du lemme est achevée.

On applique ce lemme avec $M = \underline{G}(U_j)$ et $N = \underline{G}(U_i \cap U_j) \simeq M \otimes_{A_{U_j}} A_{U_i \cap U_j}$ en remplaçant A par A_{U_j} et f par f_i. D'où une constante C_{ij} que l'on peut supposer plus grande que la norme de la restriction $M \to N$, et qui possède les propriétés (i) et (ii) du lemme. Soit $C = \sup\limits_{i,j} C_{ij}$. Considérons un cocycle $z \in Z^1(\underline{U},\underline{G})$; pour tout couple i,j il a une composante

$$z_{ij} \in \underline{G}(U_i \cap U_j) \qquad \text{et} \qquad (dz)_{ijk} = z_{jk|i} - z_{ik|j} + z_{ij|k} = 0$$

en employant la notation abrégée $z_{ij|k}$ pour $z_{ij|U_i \cap U_j \cap U_k}$. Posons

$$\|z\| = \sup_{i,j} \|z_{ij}\| .$$

D'après le lemme 4 il existe un entier n et pour tout couple (i,j) un élément t^i_j de $\underline{G}(U_j)$ tel que $\|t^i_j\| \leqq C\|z\|$ et $\|f^n_i z_{ij} - t^i_{j|i}\| < \varepsilon$ (nombre > 0 donné). Posons

$$\varepsilon_{ij} = t^i_{j|i} - f^n_i z_{ij} \qquad \text{et} \qquad s^j_{ik} = t^j_{k|i} - t^j_{i|k} - f^n_j z_{ik}$$

de sorte que

$$s^j_{ik|j} = f^n_j z_{jk|i} - f^n_j z_{ji|k} - f^n_j z_{ik|j} + \varepsilon_{jk|i} - \varepsilon_{ji|k} = \varepsilon_{jk|i} - \varepsilon_{ji|k}$$

et $\|s^j_{ik|j}\| < C\varepsilon$ puisque C majore les normes des restrictions et que $\|\varepsilon_{kj}\|$, $\|\varepsilon_{ji}\| < \varepsilon$. Le lemme 4 (i) montre qu'il existe un entier r tel que $\|f^r_j s^j_{ik}\| < C^2\varepsilon$ quels que soient i,j,k. Grâce au lemme de Tate rappelé avant l'énoncé du lemme 4 il existe une famille $(g_i)_{i\in I}$ d'éléments de A_o telle que

$$\sum_{i\in I} g_i f_i^{n+r} = 1.$$

Pour tout $i\in I$ on pose

$$\tilde{z}_i = \sum_{j\in I} g_j f^r_j t^j_i \in G(U_i) \ ;$$

on obtient ainsi une cochaîne $\tilde{z} = (\tilde{z}_i) \in C^\circ(\underline{U},\underline{G})$ telle que $\|\tilde{z}\| \leqq C\|z\|$ et

$$(d\tilde{z})_{ik} = \tilde{z}_{k|i} - \tilde{z}_{i|k} = \sum_j g_j f^r_j (t^j_{k|i} - t^j_{i|k}) = \Sigma\, g_j f^r_j (s^j_{ik} + f^n_j z_{ik})$$

$$= z_{ik} + \Sigma\, g_j f^r_j s^j_{ik}$$

d'où $\|d\tilde{z}-z\| < C^2\varepsilon$.

On peut ainsi construire une application linéaire $H : Z^1(\underline{U},\underline{G}) \to C^\circ(\underline{U},\underline{G})$ de norme $\leqq C$ et telle que $\|d \circ H - 1\| < 1$ (prendre $\varepsilon < C^{-2}$). Alors $d \circ H$ est inversible. Si $K : Z^1(\underline{U},\underline{G}) \to Z^1(\underline{U},\underline{G})$ est son inverse, on a $d \circ (H \circ K) = 1$ et d est inversible à droite. Ceci achève la démonstration du lemme 1, donc du théorème 1.

3. Morphismes propres et théorème de finitude.

DÉFINITION 3. Soit $v : X \to S$ un morphisme d'espaces analytiques affines. On dit qu'une partie affine Y de X est interne à X relativement à S s'il existe une S-immersion fermée $j : X \to S \times D^n_1$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que

$$j(Y) \subset S \times D^n_{1-\varepsilon} .$$

(D_r désigne le « disque » de rayon r et D_r^n le polydisque de rayon r et de dimension n).

DÉFINITION 4. On dit qu'un morphisme $X \to S$ d'espaces analytiques rigides est séparé si le morphisme diagonal $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ est fermé.

On démontre que si $X \to S$ est séparé et S affine l'intersection de deux ouverts affines de X est affine. De plus si U, V, U', V' sont quatre ouverts affines de X tels que U soit interne à V relativement à S et U' interne à V' relativement à S, alors $U \cap U'$ est interne à $V \cap V'$ relativement à S.

DÉFINITION 5. On dit qu'un morphisme $v : X \to S$ d'espaces analytiques rigides est propre s'il est séparé et s'il existe un recouvrement admissible affine $(S_i)_{i \in I}$ de S et pour tout $i \in I$ des recouvrements admissibles affines finis $(U_{ij})_{j \in J_i}$ et $(V_{ij})_{j \in J_i}$ de $X_i = v^{-1}(S_i)$ tels que U_{ij} soit interne à V_{ij} relativement à S quel que soit $j \in J_i$.

On montre facilement que si u et v sont des morphismes propres il en est de même de $u \times v$. La propreté se conserve par une extension finie du corps de base. Il est clair que tout morphisme fini est propre.

Il faut noter qu'un morphisme propre n'est pas en général fermé. On peut en effet prouver que si un morphisme $X \to S$ est universellement fermé et si toutes ses fibres X_s $(s \in S)$ admettent des recouvrements admissibles affines dénombrables alors toutes ses fibres sont finies.

THÉORÈME 2. Soit $v : X \to S$ un morphisme propre avec S affine d'algèbre A. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\underline{F}$ et tout entier q le A-module $H^q(X, \underline{F})$ est de type fini ([4], Satz 2.6).

Soient $\underline{U} = (U_i)_{i\in I}$ et $\underline{V} = (V_i)_{i\in I}$ des recouvrements admissibles affines finis de X tels que U_i soit interne à V_i relativement à S pour tout i. Si σ est une partie de I les ouverts $U_\sigma = \bigcap_{i\in\sigma} U_i$ et $V_\sigma = \bigcap_{i\in\sigma} V_i$ sont affines et U_σ est interne à V_σ relativement à S. On peut trouver un entier n et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que pour tout i il existe une immersion fermée $V_i \subset S \times D_1^n$ avec $U_i \subset S \times D_{1-\varepsilon}^n$ et quitte à faire une extension finie du corps de base on peut supposer qu'il existe $a\in K$ tel que $1-\varepsilon \leqq |a| < 1$ et que $U_i = V_i \cap S \times D_{|a|}^n$.

Nous désignerons par B_i l'algèbre de U_i et par C_i celle de V_i. Les injections $U_i \to V_i$, $U_i \to S \times D_{|a|}^n$ et $V_i \to S \times D_1^n$ sont définies par des homomorphismes $h_i : C_i \to B_i$, $b_i : A\{z_1,\dots,z_n\} \to B_i$ et $c_i : A\{z_1,\dots,z_n\} \to C_i$; quant à l'injection $S \times D_{|a|}^n \to S \times D_1^n$ elle correspond à l'endomorphisme h_a de $A\{z_1,\dots,z_n\}$ défini par $h_a(z_j) = az_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$. On a $b_i \circ h_a = h_i \circ c_i$.

Comme $\underline{F}$ est cohérent il existe pour tout indice i un B_i-module de type fini M_i et un C_i-module de type fini N_i tels que $\underline{F}|U_i \simeq \tilde{M}_i$ et $\underline{F}|V_i \simeq \tilde{N}_i$ (théorème 1), et $M_i \simeq N_i \otimes_{C_i} B_i$. La restriction $N_i \to M_i$ n'est pas nécessairement complètement continue (c'est-à-dire adhérente à l'ensemble des applications de rang fini dans $\mathrm{Hom}_A(N_i,M_i)$), mais on peut démontrer qu'il existe un épimorphisme $\bar{N}_i \to N_i$ (où $\bar{N}_i$ est un A-module de Banach) qui, composé avec cette restriction, donne une application <u>nucléaire</u> (c'est-à-dire de la forme $\sum_{n\geqq 0} v_n \otimes s_n$ où (v_n) est une suite d'applications linéaires continues de $\bar{N}_i$ dans A et (s_n) une suite bornée d'éléments de M_i). Pour cela on observe que h_a, donc aussi $h_i \circ c_i = b_i \circ h_a$, est nucléaire, que c_i est surjectif et que N_i est quotient d'un module de la forme C_i^d. De même pour toute partie σ de I on peut trouver un épimorphisme de but $\underline{F}(V_\sigma)$ qui, composé avec la restriction $\underline{F}(V_\sigma) \to \underline{F}(U_\sigma)$, donne une application nucléaire. On en déduit que pour tout $q \in \mathbb{N}$ il existe un épimorphisme $E^q \to C^q(\underline{V},\underline{F})$ dont le composé avec l'application

$$\rho_q : C^q(\underline{V},\underline{F}) \to C^q(\underline{U},\underline{F})$$

est une application nucléaire (E^q = A-module de Banach).

Comme $\tilde{\rho}_q : H^q(\underline{V},\underline{F}) \to H^q(\underline{U},\underline{F})$ est un isomorphisme, l'application $(z,c) \longmapsto \rho_q(z) + dc$ de $Z^q(\underline{V},\underline{F}) \oplus C^{q-1}(\underline{U},\underline{F})$ dans $Z^q(\underline{U},\underline{F})$ est surjective. Soit F^q l'image réciproque de $Z^q(\underline{V},\underline{F})$ dans E^q et soit $\tau_q : F^q \to Z^q(\underline{U},\underline{F})$ l'application composée de $F^q \to Z^q(\underline{V},\underline{F})$ avec ρ_q. L'application $(b,c) \longmapsto dc$ de $F^q \oplus C^{q-1}(\underline{U},\underline{F})$ dans $Z^q(\underline{U},\underline{F})$ est somme de : $(b,c) \longmapsto -\tau_q(b) + dc$ qui est surjective et de $(b,c) \longmapsto \tau_q(b)$. Or la composée de cette dernière application avec l'injection $j : Z^q(\underline{U},\underline{F}) \to C^q(\underline{U},\underline{F})$ est nucléaire. Il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

LEMME 5. Soient f et g des homomorphismes continus d'un A-module de Banach M dans un autre N. On suppose que f est surjectif et que N est un sous-module fermé d'un module P tel que $j \circ g$ soit nucléaire, en désignant par j l'injection canonique de N dans P. Alors $f+g$ a une image fermée et de codimension finie (c'est-à-dire que le conoyau est de type fini).

Pour obtenir ce résultat on représente M comme quotient d'un A-module de Banach L qui est libre (c'est-à-dire somme d'une famille d'exemplaires de A dans la catégorie des A-modules de Banach). Du fait que l'application composée $L \to M \to N \to P$ est nucléaire on peut alors déduire que $L \to N$ est complètement continue ([4], Satz 1.4) et il suffit alors d'appliquer le théorème de Schwartz habituel (généralisé pour les modules de Banach).

THÉORÈME 3. <u>Soit</u> $v : X \to Y$ <u>un morphisme propre d'espaces analytiques rigides. Pour tout</u> $\underline{O}_X$<u>-Module cohérent</u> $\underline{F}$ <u>les faisceaux images directes</u> $R^q v_*(\underline{F})$ <u>sont cohérents quel que soit</u> $q \in \mathbb{N}$ ([4], Theorem 3.3).

Ce théorème résulte du théorème 2, du fait que $R^q v_*(\underline{F})$ est engendré par le préfaisceau : $U \longrightarrow H^q(v^{-1}(U),\underline{F})$ et du théorème suivant :

THÉORÈME 4. <u>Soit</u> $v : X \to S$ <u>un morphisme propre avec</u> S <u>affine d'algèbre</u> A <u>et soit</u> U <u>un ouvert affine d'algèbre</u> B <u>de</u> S. <u>Si</u> $\underline{F}$ <u>est un</u> $\underline{O}_X$<u>-module cohérent on a</u> $H^q(v^{-1}(U),\underline{F}) \simeq H^q(X,\underline{F}) \otimes_A B$ <u>par un isomorphisme canonique</u>.

On fait la preuve par récurrence sur la dimension de S. Lorsque S est de dimension 0 il est somme d'espaces affines d'algèbres artiniennes locales, et on peut se ramener au cas où A est un anneau local artinien. Alors on a nécessairement $U = S$ et l'assertion de l'énoncé est triviale.

Supposons $\dim A \geqq 1$ et posons $M = H^q(X,\underline{F})$ et $N = H^q(v^{-1}(U),\underline{F})$. Comme N et $M \otimes_A B$ sont de type fini sur B, il suffit de montrer que pour tout idéal maximal $\underline{n}$ de B on a $\hat{N}_{\underline{n}} \simeq (M \otimes_A B)^{\wedge}_{\underline{n}}$. Soit $\underline{m}$ l'image réciproque de $\underline{n}$ dans A ; il existe un élément f de $\underline{m}$ tel que $\dim (A/fA) < \dim A$, donc aussi $\dim (A/f^kA) < \dim A$ pour tout entier $k \geqq 1$. Si le théorème est établi en dimension $< \dim A$ on a

$$H^q(v^{-1}(U),\underline{F}/f^k\underline{F}) \simeq H^q(X,\underline{F}/f^k\underline{F}) \otimes_A B$$

quel que soit $k \geqq 1$. Désignons par $\hat{N}$ et par $(M \otimes_A B)^{\wedge}$ les complétions f-adiques respectives de N et de $(M \otimes_A B)$

$$\hat{N} = \varprojlim N/f^kN = \varprojlim H^q(v^{-1}(U),\underline{F})/f^kH^q(v^{-1}(U),\underline{F})$$

$$\begin{aligned}(M \otimes_A B)^{\wedge} &= \varprojlim (M \otimes_A B)/f^k(M \otimes_A B) = \varprojlim ((M/f^kM) \otimes_A B) \\ &= \varprojlim ((H^q(X,\underline{F})/f^kH^q(X,\underline{F})) \otimes_A B) .\end{aligned}$$

Pour conclure il suffit d'établir que $\hat{N} \simeq (M \otimes_A B)^{\wedge}$, puisque $f \in \underline{m}$. Cela résulte des isomorphismes suivants :

$$\varprojlim (H^q(v^{-1}(U),\underline{F})/f^k H^q(v^{-1}(U),\underline{F})) \simeq \varprojlim H^q(v^{-1}(U),\underline{F}/f^k\underline{F}) \qquad (1)$$

$$\varprojlim ((H^q(X,\underline{F})/f^k H^q(X,\underline{F})) \otimes_A B) \simeq \varprojlim (H^q(X,\underline{F}/f^k\underline{F}) \otimes_A B) \qquad (2)$$

et de l'hypothèse de récurrence.

Démontrons ces derniers isomorphismes. Pour tout entier k, posons

$$R_k = \operatorname{Ker} (H^q(X,\underline{F}) \to H^q(X,\underline{F}/f^{k+1}\underline{F})) ,$$

$$N_k = \operatorname{Ker} (H^q(X,\underline{F})/f^{k+1}H^q(X,\underline{F}) \to H^q(X,\underline{F}/f^{k+1}\underline{F})) ,$$

$$Q_k = \operatorname{Coker} (H^q(X,\underline{F}) \to H^q(X,\underline{F}/f^{k+1}\underline{F})) .$$

De la suite exacte :

$$0 \to f^{k+1}\underline{F} \to \underline{F} \to \underline{F}/f^{k+1}\underline{F} \to 0$$

on déduit la suite exacte de cohomologie :

$$\dots \to H^q(X,f^{k+1}\underline{F}) \to H^q(X,\underline{F}) \to H^q(X,\underline{F}/f^{k+1}\underline{F}) \to H^{q+1}(X,f^{k+1}\underline{F}) \to H^{q+1}(X,\underline{F}) \to \dots$$

qui montre que

$$R_k = \operatorname{Im} (H^q(X,f^{k+1}\underline{F}) \to H^q(X,\underline{F}))$$

et

$$Q_k = \operatorname{Ker} (H^{q+1}(X,f^{k+1}\underline{F}) \to H^{q+1}(X,\underline{F})) = \operatorname{Im} (H^q(X,\underline{F}/f^{k+1}\underline{F}) \to H^{q+1}(X,f^{k+1}\underline{F})) .$$

La filtration (R_k) de $H = H^q(X,\underline{F})$ est f-bonne (c'est-à-dire que $fR_k \subset R_{k+1}$ pour tout k et $fR_k = R_{k+1}$ pour k assez grand). Pour le voir il suffit (d'après un résultat de Cartier) de montrer que $R = \bigoplus_k R_k$ est un module gradué de type fini sur l'anneau gradué $C = \bigoplus_{k \geq 0} f^k A$. Or il est quotient de $M^q = \bigoplus_{k \geq 0} H^q(X,f^k\underline{F})$. Il suffit donc de montrer que M^q est de type fini. Si $\underline{F}$ est sans f-torsion,

$f^k : \underline{F} \to f^k\underline{F}$ est un isomorphisme, donc $H^q(X,\underline{F}) \to H^q(X,f^k\underline{F})$ et M_o^q engendre M^q sur C. Sinon, soit $\underline{F}_k$ le noyau de la multiplication par f^k dans $\underline{F}$; la suite $(\underline{F}_k)$ de sous-faisceaux de $\underline{F}$ est croissante donc stationnaire et si $\underline{L}$ est sa réunion le quotient $\underline{F}/\underline{L}$ est sans f-torsion. D'après le lemme d'Artin-Rees la filtration $(\underline{L} \cap f^k\underline{F})$ de $\underline{L}$ est f-bonne, donc $\underline{L} \cap f^k\underline{F} = 0$ pour k assez grand. Il en résulte, grâce au théorème 2, que $P^q = \bigoplus_{k\geq 0} H^q(X,\underline{L} \cap f^k\underline{F})$ est de type fini sur A et a fortiori sur C. Par la suite exacte de cohomologie, on déduit de la suite exacte

$$0 \to \underline{L} \cap f^k\underline{F} \to f^k\underline{F} \to f^k(\underline{F}/\underline{L}) \to 0$$

une suite exacte $P^q \to M^q \to M'^q$ avec $M'^q = \bigoplus_{k\geq 0} H^q(X,f^k(\underline{F}/\underline{L}))$. On vient de voir que P^q est fini sur C, et M'^q l'est aussi car $\underline{F}/\underline{L}$ est sans f-torsion ; donc M^q est fini sur C et il en est de même de R.

Montrons maintenant que les systèmes projectifs (N_k) et (Q_k) sont nuls, c'est-à-dire qu'il existe m tel que $N_{k+m} \to N_k$ et $Q_{k+m} \to Q_k$ soient nuls pour k assez grand. Pour tout entier k, Q_k est annulé par f^k et $Q = \bigoplus_k Q_k$ est de type fini sur C comme sous-module de M^{q+1}, donc il existe un entier s tel que f^s annule Q. Ainsi il existe k_o et $m \geqq s$ tels que $Q_{k+m} = f'^m Q_k$ quel que soit $k \geqq k_o$ (f' désigne l'élément de $C_1 = fA$ qui correspond à f). Soit t_m l'application de Q_{k+m} dans Q_k induite par $H^q(X,\underline{F}/f^{k+m}\underline{F}) \to H^q(X,\underline{F}/f^k\underline{F})$. On a $t_m(f'^m Q) = f^m Q$ donc $t_m(Q_{k+m}) = t_m(f'^m Q_k) = f^m Q_k = 0$ si $k \geqq k_o$, ce qui prouve que le système projectif (Q_k) est nul. De même on démontre que (N_k) est nul.

On voit alors que les systèmes projectifs de la suite exacte :

$$0 \to (N_k) \to (H/f^kH) \to (H_k) \to (Q_k) \to 0$$

(où on a posé $H = H^q(X,\underline{F})$ et $H_k = H^q(X,\underline{F}/f^{k+1}\underline{F})$) vérifient la condition de Mittag-Leffler, et il résulte de [2], 0_{III},13.2.2 que leurs limites projectives forment encore une suite exacte :

$$0 = \varprojlim N_k \to \varprojlim (H/f^kH) \to \varprojlim H_k \to \varprojlim Q_k = 0$$

en remplaçant S par U, cela donne l'isomorphisme (1).

Comme B est plat sur A, on voit encore que les systèmes projectifs $(N_k \otimes_A B)$ et $(Q_k \otimes_A B)$ sont nuls. A partir de la suite exacte :

$$0 \to (N_k \otimes_A B) \to ((H/f^kH) \otimes_A B) \to (H_k \otimes_A B) \to (Q_k \otimes_A B) \to 0$$

on obtient comme précédemment une suite exacte :

$$0 = \varprojlim (N_k \otimes_A B) \to \varprojlim ((H/f^kH) \otimes_A B) \to \varprojlim (H_k \otimes_A B) \to \varprojlim (Q_k \otimes_A B) = 0$$

ce qui donne l'isomorphisme (2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN - Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953.

[2] A. GROTHENDIECK - Eléments de Géométrie Algébrique, III (I.H.E.S., n°20).

[3] R. KIEHL - Theorem A und B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie (Inventiones math., 1967).

[4] R. KIEHL - Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie (Inventiones math., 1967).

[5] J.-P. SERRE - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of math., 61, n°2.

[6] Séminaire de Géométrie Algébrique 1963-64, exp. I et exp. V (I.H.E.S.).

[7] J. TATE - Rigid analytic spaces (I.H.E.S.).

ERRATA

Page 327-05 - Remplacer la définition 1 par :

DÉFINITION 1. On dit qu'un espace rigide annelé en anneaux locaux X est K-analytique s'il existe un recouvrement admissible $(X_i)_{i\in I}$ de X tel que les X_i soient isomorphes (comme espaces rigides annelés en anneaux locaux) à des espaces analytiques affines sur K.

Page 327-08 - Ligne 7 du bas. Remplacer $B\{t^{-1}\}$ par $B\{\lambda t, t^{-1}\}$.

Page 327-10 - Ligne 3. Lire :

$$1 = \pi(1-\mu\tau)^{-1} + \alpha\rho(1-\mu\tau)^{-1} + \sigma(1-\mu\tau)^{-1} .$$

Page 327-10 - Ligne 5. Lire :

$$L = \pi((1-\mu\tau)^{-1}(L)) + \alpha(\rho(1-\mu\tau)^{-1}(L)) + \sigma((1-\mu\tau)^{-1}(L)) .$$