GEORGES ZELLER-MEIER

Dérivations et automorphismes des algèbres d'opérateurs

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 324, p. 179-188
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__179_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année, 1966/67, n° 324 Février 1967

DÉRIVATIONS ET AUTOMORPHISMES DES ALGEBRES D'OPÉRATEURS

(D'après R. V. KADISON et J. R. RINGROSE [5])

par Georges ZELLER-MEIER

1. KAPLANSKY a montré [6], [7] que toute dérivation et tout automorphisme d'algèbre laissant fixe le centre d'une AW^*-algèbre de type I sont intérieurs. Puis, SAKAI a montré [8] que toute dérivation d'une C^*-algèbre est continue. Enfin, KADISON, RINGROSE, SAKAI ont montré [3], [4], [9] :

THÉORÈME 1.- Toute dérivation d'une C^*-algèbre d'opérateurs A dans un espace de Hilbert H se prolonge en une dérivation intérieure de l'adhérence faible de A.

En particulier toute dérivation d'une algèbre de von Neumann est intérieure. On sait par contre que le résultat de KAPLANSKY sur les automorphismes, d'algèbres involutives dans tout ce qui suit, ne se prolonge pas à certains facteurs de type II_1. En particulier BLATTNER a montré [1] que tout groupe localement compact séparable admet une représentation, continue pour la topologie de la convergence simple pour la topologie forte, dans le groupe des automorphismes d'un facteur de type II_1, l'image (l'automorphisme identique excepté) étant formée d'automorphismes extérieurs.

2. Notations et énoncé des résultats de [5].

On désignera par $\mathrm{Aut}(A)$ le groupe métrique complet des automorphismes d'une C^*-algèbre A pour la topologie de la convergence uniforme, par $\mathrm{Int}(A)$ le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs (*) de A et par $\pi(A)$ le

(*) Si A n'a pas d'unité, ce sont les automorphismes se prolongeant en automorphisme intérieur de la C^*-algèbre avec unité $\tilde{A}$ associée à A.

sous-groupe distingué des automorphismes de A qui, pour toute concrétisation de A dans un espace de Hilbert, se prolongent en automorphisme intérieur de l'adhérence faible de A. On rappelle que tout automorphisme d'une C^*-algèbre est isométrique et on renvoie à [2] pour les propriétés de ces algèbres. Les résultats principaux de [5] sont :

THÉORÈME 2.- Si A est une C^*-algèbre et si $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ est tel que $\|\alpha - 1\| < 2$, alors α appartient à un sous-groupe à un paramètre de Aut(A) continu pour la topologie uniforme. La composante neutre $\gamma(A)$ de Aut(A) est un sous-groupe ouvert engendré par ces sous-groupes à un paramètre. Enfin on a $\gamma(A) \subset \pi(A)$.

COROLLAIRE.- Si A est une algèbre de von Neumann, alors $\mathrm{Int}(A) = \gamma(A) = \pi(A)$.

D'où le résultat suivant (en contraste avec celui de BLATTNER) : toute représentation d'un groupe topologique connexe, continue pour la topologie uniforme, dans le groupe des automorphismes d'une algèbre de von Neumann a son image formée d'automorphismes intérieurs.

3. Esquisses des démonstrations.

Pour le Th. 1 on montre, dans un premier temps, en utilisant le résultat de KAPLANSKY que toute dérivation de A se prolonge en une dérivation intérieure de l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs bornés dans H ; puis on étudie les cas où l'adhérence faible de A est soit semi-finie soit de type III. On peut remarquer qu'il suffirait de démontrer que toute dérivation d'une algèbre de von Neumann enveloppante est intérieure.

Donnons plus de détails sur la démonstration du Th. 2 :

On sait qu'un sous-groupe à un paramètre continu pour la norme dans une algèbre de Banach L est de la forme $\exp t\delta$, où $t \in \mathbb{R}$ et $\delta \in L$. On en déduit que α^t est un sous-groupe à un paramètre, continu pour la topologie uniforme, d'automorphismes de A si et seulement si $\alpha^t = \exp t\delta$ où δ est une dérivation hermitienne (i.e. $\delta(a^*) = (\delta(a))^*$ pour tout a dans A) de A.

Supposons A concrète dans l'espace de Hilbert H et soit δ une dérivation hermitienne de A ; par le Th. 1 on a $\delta = \mathrm{ad}\, x \,|\, A$ où x est un élément anti-hermitien de l'adhérence faible $\bar{A}$ de A et $\mathrm{ad}\, x$ est la dérivation intérieure de $\bar{A}$ définie par x. On vérifie que $(\exp t\, \mathrm{ad}\, x)(y) = (\exp tx)y(\exp - tx)$ pour $t \in \underline{R}$ et $y \in \bar{A}$; il en résulte que $\exp t\delta$ se prolonge en un automorphisme intérieur de $\bar{A}$.

Il suffit donc de montrer la première assertion du théorème 2.

LEMME 1.- Si $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ et $\|\alpha - 1\| < 2$, alors pour toute représentation φ de A, $\varphi \circ \alpha$ est quasi-équivalente à φ (*).

Tout automorphisme α de A se prolonge en automorphisme $\bar{\alpha}$ de l'algèbre de von Neumann enveloppante E de A (par fonctorialité ou bitransposition). Puisque $\bar{\alpha} - 1$ est le bitransposé de $\alpha - 1$, on a $\|\alpha - 1\| = \|\bar{\alpha} - 1\|$. Comme un automorphisme $\alpha \neq 1$ d'une C^*-algèbre abélienne est tel que $\|\alpha - 1\| = 2$ (on interprète α comme un homéomorphisme du spectre), si $\|\alpha - 1\| < 2$, $\bar{\alpha}$ induit l'automorphisme identique du centre de E. Or l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations φ de A s'identifie à l'ensemble des projecteurs du centre de E (à la classe de φ correspond e où $1 - e$ est le plus grand projecteur du noyau de la représentation normale $\bar{\varphi}$ de E prolongeant φ) et l'application $\varphi \longmapsto \varphi \circ \alpha$ induit l'application $e \longmapsto \bar{\alpha}^{-1}(e)$, d'où le lemme.

LEMME 2.- Si H est un espace de Hilbert et si $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(H))$ est tel que $\|\alpha - 1\| < 2$, il existe un opérateur unitaire u dans H induisant α et tel que :

$$\mathrm{Sp}(u) \subset \left\{ \lambda \in \underline{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\,\lambda \geq \left(1 - \frac{1}{4}\|\alpha - 1\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Soient v un opérateur unitaire dans H induisant α, ξ un vecteur unitaire de H, e le projecteur sur le sous-espace engendré par ξ, on a :

$$\|\alpha - 1\| \geq \|(\alpha - 1)(2e - 1)\| = 2\|vev^* - e\| \geq 2\|v\xi - ev\xi\| = 2(1 - |(v\xi|\xi)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$|(v\xi \,|\, \xi)| \geq \left(1 - \frac{1}{4}\|\alpha - 1\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(*) En fait, grâce au Th. 2, on voit que $\varphi \circ \alpha$ est équivalente à φ.

Or puisque v est normal l'adhérence de l'ensemble des $(v\xi|\xi)$, où ξ est unitaire dans H , est égale à l'enveloppe convexe K de $Sp(v)$. Donc si μ est la projection de 0 sur K , on a $|\mu| \geqslant (1 - \frac{1}{4}\|\alpha - 1\|^2)^{\frac{1}{2}} > 0$. D'où $u = \bar{\mu}|\mu|^{-1}v$ convient.

LEMME 3.- <u>Si</u> A <u>est une</u> C^*<u>-algèbre d'opérateurs dans un espace de Hilbert</u> H <u>et si</u> $\alpha \in Aut(A)$ <u>est induit par un opérateur unitaire</u> u <u>dans</u> H <u>tel que</u> :

$$Sp(u) \subset \{ \lambda \in \underline{C} \mid Re\,\lambda > 0 \}$$

<u>alors</u> α <u>appartient à un sous-groupe à un paramètre</u>, <u>continu pour la topologie uniforme</u>, <u>de</u> $Aut(A)$.

Soit $\bar{\alpha}$ l'automorphisme intérieur de $\mathcal{L}(H)$ défini par u . Vu l'hypothèse sur u , il existe un opérateur anti-hermitien x dans H tel que $u = \exp x$ (d'où $\bar{\alpha} = \exp \operatorname{ad} x$) et $Sp\, x \subset \{ \lambda \in \underline{C} \mid |Im\,\lambda| < \frac{\pi}{2} \}$. Soient L et R les représentations régulières gauche et droite de $\mathcal{L}(H)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$. On a $\operatorname{ad} x = L(x) - R(x)$ et $\bar{\alpha} = L(u)R(u^*)$. Pour avoir $Sp \operatorname{ad} x$ il suffit de prendre les valeurs sur $\operatorname{ad} x$ des caractères d'une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ contenant $L(x)$ et $R(x)$ (qui commutent) ; d'où

$Sp \operatorname{ad} x \subset \{ \lambda - \mu \mid \lambda, \mu \in Sp\, x \} \subset \Sigma = \{ \lambda \in \underline{C} \mid |Im\,\lambda| < \pi \}$ (remarquer que $Sp\, L(x) \subset Sp\, x$ ... (*)), de même on a :

$$Sp\, \bar{\alpha} \subset \{ \lambda\bar{\mu} \mid \lambda, \mu \in Sp\, u \} \subset \Omega = \{ \lambda \in \underline{C} \mid \lambda \text{ non réel négatif} \} .$$

Soit, pour $t \in \underline{R}$, $g_t(\lambda) = \exp t \operatorname{Log} \lambda$ la détermination principale de λ^t sur Ω ; on a, pour $\lambda \in \Sigma$, $g_t(\exp \lambda) = \exp t\lambda$. Par les propriétés du calcul fonctionnel holomorphe dans une algèbre de Banach, on peut donc définir $g_t(\bar{\alpha})$ et, comme $\bar{\alpha} = \exp \operatorname{ad} x$ et $Sp \operatorname{ad} x \subset \Sigma$, on a $g_t(\bar{\alpha}) = g_t(\exp \operatorname{ad} x) = \exp t \operatorname{ad} x$.

(*) En fait, on sait que les représentations régulières d'une algèbre avec unité conservent les spectres.

D'où, $\mathrm{ad}\, x$ étant une dérivation hermitienne, $g_t(\bar{\alpha})$ est un sous-groupe à un paramètre, continu pour la topologie uniforme, de $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(H)$. Or, par le théorème de Rünge, $g_t(\lambda)$ est limite uniforme, sur tout compact contenu dans Ω, de polynômes en λ ; donc $g_t(\bar{\alpha})$ est limite en norme de polynômes en $\bar{\alpha}$. Puisque $\bar{\alpha}$ laisse stable le sous-espace fermé en norme A de $\mathcal{L}(H)$, $g_t(\bar{\alpha}) \mid A$ convient.

Démonstration de la première assertion du Th. 2.

On identifie A avec son image par une représentation fidèle somme directe de représentations irréductibles deux à deux inéquivalentes. L'adhérence faible $\bar{A}$ de A s'identifie à un produit d'algèbres de von Neumann $\prod \mathcal{L}(H_i)$. Par le lemme 1, α se prolonge en un automorphisme $\bar{\alpha}$ de $\bar{A}$ et laisse fixe son centre. Par le résultat de KAPLANSKY, $\bar{\alpha}$ est intérieur. Grâce au lemme 2, on montre que $\bar{\alpha}$ est induit par un unitaire u de $\bar{A}$ tel que $\mathrm{Sp}\, u \subset \{\lambda \in \underline{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$. D'où le résultat par le lemme 3.

Remarque 1.- Par unicité du générateur infinitésimal et par approximation polynômiale on voit que, sous les hypothèses du lemme 3 et si $\mathrm{Sp}\,\alpha \subset \Omega$, $\mathrm{Log}\,\alpha$ (où Log est la détermination principale du logarithme sur Ω) est une dérivation hermitienne (égale à $\mathrm{ad}\, x \mid A$) de A. Il en va donc de même pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ tel que $\|\alpha - 1\| < 2$. Une démonstration naturelle consisterait à montrer directement que $\|\alpha - 1\| < 2$ entraîne que $\mathrm{Log}\,\alpha$ (qui est bien défini car $\|\alpha\| = \|\alpha^{-1}\| = 1$ et $\|\alpha - 1\| < 2$ impliquent que $\mathrm{Sp}\,\alpha \subset \Omega$) est une dérivation hermitienne. Il convient ici de remarquer que l'on peut construire un automorphisme α d'un facteur de type II_1 qui soit extérieur (donc n'admettant pas de logarithme qui soit une dérivation hermitienne par le Th. 2) et tel que $\alpha^3 = 1$ (donc tel que $\mathrm{Sp}\,\alpha \subset \Omega$).

Remarque 2.- On trouve dans [5] une généralisation du lemme 2 aux algèbres de von Neumann quelconques.

Remarque 3.- Pour $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ soit $\bar{\alpha}$ le prolongement à E. Alors $\pi(A)$ est l'ensemble des α tels que $\bar{\alpha}$ soit intérieur dans E ; c'est un sous-groupe de l'ensemble des α tels que $\bar{\alpha}$ laisse fixe le centre de E. Si A est de type I ces deux sous-groupes de $\mathrm{Aut}(A)$ coïncident (ceci est aussi vrai en prenant les automorphismes d'algèbre de A).

4. On trouve enfin dans [5] une série d'exemples illustrant les diverses positions relatives des sous-groupes $\mathrm{Int}(A)$, $\gamma(A)$, $\pi(A)$ de $\mathrm{Aut}(A)$. Rappelons que $\gamma(A) \subset \pi(A)$ (Th. 2) et que $\mathrm{Int}(A) \subset \pi(A)$ (trivial).

a) Si $A = \mathcal{L}\mathcal{C}(H)$ est la C^*-algèbre des opérateurs compacts dans un espace de Hilbert de dimension infinie H , on a :

$$\mathrm{Int}(A) \subsetneq \gamma(A) = \pi(A) = \mathrm{Aut}(A) \simeq \mathrm{Int}\,\mathcal{L}(H) = \mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(H)$$

car A est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$ et toute représentation irréductible de A est équivalente à la représentation identique.

On remarque qu'ici $\mathrm{Aut}(A) = \mathrm{Aut}(\tilde{A})$ ce qui est faux en général (prendre A abélienne sans unité...).

b) Un exemple où A n'est pas postliminaire. On prend M facteur standard de type II_1, admettant des automorphismes extérieurs (par exemple le facteur hyperfini continu), dans un espace de Hilbert H et on considère A l'espace vectoriel engendré par M et $\mathcal{L}\mathcal{C}(H)$; A est une C^*-algèbre ($\mathcal{L}\mathcal{C}(H)$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(H)$) et on a $M \cap \mathcal{L}\mathcal{C}(H) = (0)$. Puisque deux représentations irréductibles traçables fidèles d'une C^*-algèbre sont équivalentes, tout automorphisme de A se prolonge en automorphisme intérieur de $\bar{A} = \mathcal{L}(H)$. Pourtant on a $\mathrm{Aut}(A) \neq \pi(A)$. En effet, si β est un automorphisme extérieur de M , β est spatial car M est standard et se prolonge donc en un automorphisme α de A ; d'autre part, si φ est la représentation factorielle de type II_1 définie par $\varphi(m + c) = m$ (où $m \in M$ et $c \in \mathcal{L}\mathcal{C}(H)$), alors si on transporte α par la représentation fidèle $\mathrm{id}_A \oplus \varphi$ on n'obtient pas un automorphisme se prolongeant en automorphisme intérieur de $\overline{(\mathrm{id}_A \oplus \varphi)(A)} = \mathcal{L}(H) \times M$ (id_A et φ sont disjointes).

On remarque en outre que si $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ et si $\alpha | M = \mathrm{id}_M$, alors α est induit par un unitaire du commutant M' de M ; donc α appartient à un sous-groupe à un paramètre, continu pour la topologie uniforme, de $\mathrm{Aut}(A)$; a fortiori $\alpha \in \gamma(A)$. D'autre part, si $\alpha \in \mathrm{Int}(A)$ et si $\alpha | M = \mathrm{id}_M$, alors α est induit par un unitaire $u = m + c$ de M' où $m \in M$ et $c \in \mathcal{LC}(H)$; on a donc pour tout m' dans M' : $cm' - m'c = um' - m'u \in \mathcal{LC}(H) \cap M' = (0)$ (M' facteur de type II) d'où $u \in M \cap M' = \underline{C}$ et $\alpha = 1$. On a donc

$$\mathrm{Int}(A) \neq \gamma(A) \quad \underline{\text{et}} \quad \mathrm{Int}(A) \subsetneq \pi(A) .$$

c) Une série d'exemples où A est liminaire. Soient B la C^*-algèbre abélienne des fonctions continues sur un espace compact X , M_n la C^*-algèbre des matrices carrées complexes d'ordre $n \geq 2$, on prend $A = B \otimes M_n$.

Soit $C = B \otimes \underline{C}$ le centre de A , $\pi(A)$ s'identifie à l'ensemble des automorphismes de A qui induisent l'identité sur C . En effet toute représentation non dégénérée de A est équivalente à une représentation de la forme $\psi \otimes \mathrm{id}_M$, où ψ est une représentation non dégénérée de B ; on en déduit que le centre de l'algèbre de von Neumann enveloppante de A est égal à l'adhérence faible de C , d'où l'assertion puisque A est de type I (voir Rem. 3).

Le groupe métrique $\pi(A)$ et le groupe métrique des applications continues de X dans $\mathrm{Aut}(M_n)$ sont canoniquement isomorphes. En effet, on identifie A avec la C^*-algèbre des applications continues f de X dans M_n ; à β application continue de X dans $\mathrm{Aut}(M_n)$ on fait correspondre l'automorphisme α de A défini par $(\alpha(f))(x) = \beta(x)(f(x))$ pour tout x dans X ; inversement, à $\alpha \in \pi(A)$ correspond β définie par $(\beta(x))(m) = (\alpha(m))(x)$ pour tout x dans X et tout

m dans M_n , ($\beta(x) \in \mathrm{Aut}(M_n)$ car c'est un homomorphisme injectif puisque $m \in M_n$ et $m \neq 0$ entraîne que l'idéal bilatère engendré par $\alpha(m)$ dans A est égal à A).

Comme $\mathrm{Aut}(M_n)$ est isomorphe à $U(n)/U(1)$ nous identifierons désormais $\pi(A)$ avec le groupe topologique des applications continues de X dans $U(n)/U(1)$. Ainsi $\mathrm{Int}(A)$ s'identifie au groupe des applications continues de X dans $U(n)/U(1)$ relevables dans le fibré principal F défini par la projection canonique de $U(n)$ sur $U(n)/U(1)$.

Comme $\gamma(A)$ est la composante connexe par arcs de 1 dans $\pi(A)$, on voit que $\gamma(A)$ s'identifie au groupe des applications continues inessentielles de X dans $U(n)/U(1)$.

Une application constante de X dans $U(n)/U(1)$ étant relevable on déduit du 2ème théorème de relèvement des homotopies [10] que $\mathrm{Int}(A) \supset \gamma(A)$. On a donc $\gamma(A) \subset \mathrm{Int}(A) \subset \pi(A)$, $\pi(A)/\gamma(A)$ (resp. $\mathrm{Int}(A)/\gamma(A)$) étant isomorphe au groupe des classes d'homotopie d'applications continues (resp. et relevables dans le fibré F) de X dans $U(n)/U(1)$.

- Si X est contractile (par exemple $X = [0,1]$) on a donc

$$\gamma(A) = \mathrm{Int}(A) = \pi(A) .$$

- Si $X = S^1$ alors $\gamma(A) \subsetneq \mathrm{Int}(A) = \pi(A)$. En effet, on a $\mathrm{Int}(A) = \pi(A)$ car toute application continue de S^1 dans $U(n)/U(1)$ est homotope à une application relevable donc est relevable dans F (les fibres sont connexes par arcs). D'autre part, $\pi(A)/\gamma(A)$ est isomorphe à $\pi_1(U(n)/U(1))$ (π_1 étant le groupe de Poincaré) qui est isomorphe à $\underline{Z}/(n)$, puisque $U(n)/U(1)$ est isomorphe à $SU(n)/\underline{Z}/(n)$ ($\underline{Z}/(n)$ identifié au groupe des racines n-ièmes de l'unité) et que $SU(n)$ est simplement connexe ; a fortiori $\gamma(A) \subsetneq \mathrm{Int}(A)$.

- Si $X = U(n)/U(1)$ alors $\gamma(A) \subsetneq \mathrm{Int}(A) \subsetneq \pi(A)$. En effet, on a $\mathrm{Int}(A) \subsetneq \pi(A)$ car le fibré F ne possède pas de section (d'où id_X n'est pas relevable) puisque $\pi_1(U(n))$ ($\simeq \underline{Z}$) ne peut contenir de sous-groupe isomorphe à $\pi_1(U(n)/U(1))$ ($\simeq \underline{Z}/(n)$). D'autre part (A) Int(A) car on montre que l'application $u \longmapsto u^n$ de $U(n)/U(1)$ dans lui-même, qui est relevable dans F , est essentielle.

- Enfin, si $n = 2$ et si X est le 2-squelette d'une triangulation de $U(2)/U(1)$ (homéomorphe à P^3) on montre que

$$\gamma(A) = \mathrm{Int}(A) \subsetneq \pi(A) .$$

RÉFÉRENCES

[1] R. BLATTNER - Automorphic group representations. Pac. J. Math. 8 (1958), p. 665-677.

[2] J. DIXMIER - Les C*-algèbres et leurs représentations. Gauthier-Villars, 1964.

[3] R. KADISON - Derivations of operator algebras. Ann. of Math. 83 (1966), p. 280-293.

[4] R. KADISON and J. RINGROSE - Derivations of operator group algebras. Amer. J. Math. 88 (1966), p. 562-576.

[5] R. KADISON and J. RINGROSE - Derivations and automorphisms of operator algebras. Comm. Math. Phys. 4 (1967), p. 32-63.

[6] I. KAPLANSKY - Algebras of type I. Ann. Math. 56 (1952), p. 460-472.

[7] I. KAPLANSKY - Modules over operator algebras. Amer. J. Math. 75 (1953), p. 839-859.

[8] S. SAKAI - On a conjecture of Kaplansky. Tôhoku Math. J. 12 (1960), p. 31-33.

[9] S. SAKAI - Derivations of W^*-algebras. Ann. of Math. 83 (1966), p. 273-279.

[10] N. STEENROD - Fibre Bundles. Princeton, 1951.