G. SCHIFFMANN

Introduction aux travaux d'Harish-Chandra

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 323, p. 153-177

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__153_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année 1966/67, n° 323 Février 1967

INTRODUCTION AUX TRAVAUX D'HARISH-CHANDRA

par G. SCHIFFMANN

Soient G un groupe de Lie réel, connexe, semi-simple, non compact, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$, $G_{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie complexe, connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$; on suppose G isomorphe au sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et on identifie G à ce sous-groupe. On note $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions définies sur G, de classe C^{∞} et à support compact ; $\mathcal{D}(G)$ est muni de la topologie usuelle. Soit π une représentation unitaire irréductible de G dans un espace de Hilbert. On sait que pour toute fonction f de $\mathcal{D}(G)$, l'opérateur $\pi(f)$ est à trace et que la forme linéaire $f \to \operatorname{Tr} \pi(f)$ est une distribution sur G : c'est le caractère de π. Deux représentations équivalentes ayant même caractère, on définit comme suit la transformation de Fourier sur G. Soit Ω l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G. La transformée de Fourier de f est la fonction $\hat{f}$ définie sur Ω par $\hat{f}(\omega) = \operatorname{Tr} \pi(f)$ où π appartient à ω. La mesure de Plancherel de G est l'unique mesure positive sur Ω telle que :

$$f(1) = \int_{\Omega} \hat{f}(\omega) d\mu(\omega)$$

1 étant l'élément neutre de G. Le problème est de calculer μ. Les résultats actuellement publiés d'Harish-Chandra explicitent la partie discrète de cette mesure. Le présent exposé est essentiellement descriptif c'est-à-dire ne comporte que très peu d'indications sur les démonstrations.

En particulier l'utilisation systématique de récurrences sur la dimension de G oblige à se placer dans un cadre un peu plus large à savoir celui des groupes réductifs ; les complications ainsi introduites étant purement techniques, on se limite au cas semi-simple.

§ 1. L'intégrale invariante.

1. Une distribution sur G est dite centrale ou invariante si elle est invariante par automorphismes intérieurs. Les caractères des représentations unitaires irréductibles sont des distributions invariantes. Si $\underline{Z}$ est le centre de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, ces caractères sont des distributions propres des éléments de $\underline{Z}$ considérés comme opérateurs différentiels sur G, invariants par translations à gauche et à droite. La formule de Plancherel peut donc s'interpréter comme une décomposition de la mesure de Dirac en distributions centrales, distributions propres de $\underline{Z}$. On va chercher à construire de telles distributions. G opérant dans lui-même par automorphismes intérieurs, on va voir que sur des orbites convenables la valeur moyenne d'une fonction f de $\mathcal{D}(G)$ est bien définie et qu'on obtient ainsi une distribution invariante sur G.

2. Introduisons d'abord quelques notations concernant les sous-groupes de Cartan. Pour tout x de G, posons $\mathrm{Det}(t+1-\mathrm{Ad}x) = \sum_{0}^{n} D_m(x)t^m$, n dimension de G. Le rang de G est le plus petit entier ℓ tel que $D_\ell \neq 0$; on pose $D_\ell = D.x$ est régulier si $D(x) \neq 0$. Les points réguliers forment un ouvert G' de G invariant et partout dense. Soit x régulier ; son centralisateur $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Le centralisateur A de $\mathfrak{a}$ dans G est un sous-groupe de Cartan. x appartient

à $A' = A \cap G'$; deux sous-groupes de Cartan qui ont en commun un élément régulier sont égaux, donc si y est tel que yxy^{-1} appartienne à A alors y normalise A. A est égal à son centralisateur dans G et est d'indice fini dans son normalisateur $N(A)$. Le groupe fini $W_G = N(A)/A$ s'identifie à un sous-groupe du groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan. Si $A_1, \dots, A_r$ est un système complet de représentants, les orbites régulières sont donc paramétrées par $\bigcup_1^r A_i'/W_{G,i}$ avec $W_{G,i} = N(A_i)/A_i$. Les sous-groupes de Cartan sont abéliens et en général non connexes. Soient θ une involution de Cartan, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition correspondante de $\mathfrak{g}$, K le sous-groupe compact maximal. On sait que toute sous-algèbre de Cartan est conjuguée d'une sous-algèbre de Cartan stable par θ. Dans la suite, on ne considère que des sous-algèbres de Cartan stables par θ.

Soit $\mathfrak{a}$ l'une d'entre elles ; on a donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{a}$. Les racines de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ sont des formes linéaires à valeurs réelles sur $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} + i\mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}$; choisissons une base de cet espace dont les premiers vecteurs forment une base de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}$ et considérons l'ordre lexicographique correspondant sur le dual. Soit P l'ensemble des racines positives. Une racine positive est dite réelle (resp. imaginaire) si sa restriction à $\mathfrak{a}$ est à valeurs réelles (resp. imaginaires pures). Soit $P_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des racines réelles. A étant le sous-groupe de Cartan associé à $\mathfrak{a}$, on définit pour toute racine α, un caractère ξ_α de A par $\mathrm{Ad}h(X_\alpha) = \xi_\alpha(h)X_\alpha$ (X_α, $X_{-\alpha}$, H_α ont la signification usuelle). Comme $G \subset G_{\mathbb{C}}$, on peut définir, par restriction, un caractère ξ_ρ de A tel que $\xi_\rho(e^H) = e^{\rho(H)}$ où ρ est la demi-somme des racines positives. Enfin on pose :

$$\Delta(h) = \xi_\rho(h) \prod_{\alpha \in P} (1-\xi_\alpha(h^{-1})), \quad \text{pour } h \in A' \quad \varepsilon_{\mathbb{R}}(h) = \text{signe} \prod_{\alpha \in P_{\mathbb{R}}} (1-\xi_\alpha(h^{-1}))$$

$$\pi(H) = \prod_{\alpha\in P} \alpha(H), \quad \text{pour } H \text{ régulier } \varepsilon_{\mathbb{R}}(H) = \text{signe} \prod_{\alpha\in P_{\mathbb{R}}} \alpha(H) .$$

<u>Remarque</u>. Lorsqu'une confusion sera possible, on mettra l'indice A ; lorsqu'on considèrera $A_1,\ldots,A_r$, on mettra l'indice $i = 1,\ldots,r$.

3. Soient dx^* une mesure invariante sur $G^* = G/A$ et f un élément de $\mathcal{D}(G)$. On définit pour h régulier, l'intégrale invariante par :

$$F_f(h) = \varepsilon_{\mathbb{R}}(h)\ \Delta(h) \int_{G^*} f(xhx^{-1})d(x^*),\ x^* = xA.$$

$F_f(h)$ est donc la moyenne de f sur l'orbite h^G de h. Soit $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$; à tout élément v de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ correspond un opérateur différentiel $\partial(v)$ sur A invariant par translation. Soit $\mathscr{C}(A')$ l'espace des fonctions φ définies sur A', de classe C^∞, à support contenu dans un compact de A et telles que pour tout v,

$$\tau_v(\varphi) = \sup_{A'}. |\partial(v)\varphi| < +\infty .$$

On munit $\mathscr{C}(A')$ de la topologie définie par les semi-normes précédentes.

Les démonstrations se faisant presque toujours par réduction à l'algèbre de Lie, on introduit également l'intégrale invariante sur $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{a}'$ l'ensemble des points réguliers de $\mathfrak{a}$. Si f est une fonction de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, la moyenne de f sur l'orbite d'un point H de $\mathfrak{a}'$ est définie par :

$$\psi_f(H) = \varepsilon_{\mathbb{R}}(H)\pi(H) \int_{G^*} f(\mathrm{Ad}x(H))dx^* .$$

Si $\mathcal{S}(\mathfrak{a}')$ est l'espace des fonctions définies et de classe C^∞ sur $\mathfrak{a}'$, à décroissance rapide à l'infini ainsi que leurs dérivées, avec la topologie usuelle, on a :

THÉORÈME 1. 1) L'intégrale donnant $F_f(h)$ (resp. $\psi_f(H)$) est absolument convergente pour h (resp. H) régulier.

2) F_f (resp. ψ_f) appartient à $\mathscr{C}(A')$ (resp. $\mathscr{S}(\mathfrak{a}')$) et $f \to F_f$ (resp. $f \to \psi_f$) est continue de $\mathscr{D}(G)$ (resp. $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$) dans $\mathscr{C}(A')$ (resp. $\mathscr{S}(\mathfrak{a}')$).

Soit z un élément de $\underline{Z}$. L'opérateur différentiel correspondant étant invariant par automorphismes intérieurs, F_{zf} va s'exprimer simplement à l'aide des dérivées de F_f. Rappelons que $\mathscr{U}_{\mathbb{C}} = S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \oplus \sum_{\alpha\in P} (\mathscr{U}_{\mathbb{C}} X_\alpha + X_{-\alpha}\mathscr{U}_{\mathbb{C}})$ et soit γ' la projection sur $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Un élément D de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ est une fonction polynomiale sur le dual $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On pose $\tau(D)(\lambda) = D(\lambda-\rho)$ ce qui définit la translation τ et $\gamma = \tau \circ \gamma'$. La restriction de γ à $\underline{Z}$ est un isomorphisme de $\underline{Z}$ sur l'algèbre des invariants symétriques de W. La formule de dérivation annoncée est :

$$\partial(\gamma(z))F_f = F_{zf} .$$

Pour l'algèbre on a un résultat analogue, $\underline{Z}$ étant remplacée par l'algèbre $\underline{\underline{I}}$ des invariants de G dans $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ pour la représentation adjointe.

4. Supposons un instant que pour toute fonction f de $\mathscr{D}(G)$, F_f qui est *a priori* définie sur A' puisse se prolonger en une fonction de classe C^∞ sur A. Soit ξ un caractère de A. Il existe un élément λ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\xi(e^H) = e^{\lambda(H)}$. Posons $\chi_\lambda(z) = \gamma(z)(\lambda)$, χ_λ est un caractère de $\underline{Z}$ et on obtient ainsi tous les caractères de $\underline{Z}$. Si :

$$T_\xi(f) = \hat{F}_f(\xi) = \int_A F_f(h)\xi(h)dh$$

alors, d'après le théorème 1 et la formule de dérivation, T_ξ est une distribution sur G, telle que $zT_\xi = \chi_\lambda(z)T_\xi$. Par ailleurs si s est un élément de W_G, $F_f(s(h)) = a(s)F_f(h)$ où $a(s) = \pm 1$. Définissant ξ^s par $\xi^{s^{-1}}(h) = \xi(s(h))$, on voit que la distribution :

$$\sum_{s\in W_G} a(s)T_{\xi^s}$$

est centrale et est distribution propre de $\underline{Z}$ (on a $\chi_\lambda = \chi_{\lambda^s}$). Comme on va le voir, ceci ne se produit que pour une seule classe de sous-groupes de Cartan. Une racine imaginaire est dite singulière si X_α (donc aussi $X_{-\alpha}$) appartient à $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$. Soit S_I l'ensemble des racines positives imaginaires singulières et A_I' l'ensemble des points h de A tels que $\xi_\alpha(h) \neq 1$ pour α appartenant à S_I. Pour toute racine α, s^α désigne la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à α ; s^α appartient à W.

THÉORÈME 2. Soit f appartenant à $\mathcal{D}(G)$.

1) La fonction F_f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur A_I'.

2) Soit h un point de A. Si v est un élément de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ tel que $s^\alpha(v) = -v$ pour toute racine α de S_I telle que $\xi_\alpha(h) = 1$, alors $\partial(v)F_f$ se prolonge en une fonction continue au voisinage de h.

En particulier si ϖ est le produit des H_α pour α positive, ϖ est anti-invariant par W, d'où :

COROLLAIRE. La fonction $\partial(\varpi)F_f$ se prolonge en une fonction continue sur A.

On laisse au lecteur le soin d'énoncer le résultat analogue sur l'algèbre. Ceci dit il est facile de voir que S_I est vide si et seulement si $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}$ est de dimension maximale parmi les sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{g}$, contenues dans $\mathfrak{p}$. On sait qu'il existe effectivement de telles sous-algèbres de Cartan et qu'elles sont toutes conjuguées. Dans le cas général, la fonction F_f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur la fermeture de chaque composante connexe de A_I' mais il y a des sauts d'une composante connexe à une autre.

5. Indiquons maintenant comment on peut calculer $f(1)$ en fonction de F_f. Un sous-groupe de Cartan A est dit fondamental si $A \cap K$ a la plus grande dimension possible. Les sous-algèbres de Cartan correspondantes sont exactement les centralisateurs dans $\mathfrak{g}$ des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{k}$. Il y

a donc une seule classe de sous-groupes de Cartan fondamentaux.

THÉORÈME 3. Soit A un sous-groupe de Cartan. Il existe une constante c' telle que, quelle que soit f appartenant à $\mathcal{D}(G)$, on ait :

1) $c'f(1) = \partial(\varpi)F_f(1)$.

2) $c' = 0$ si A n'est pas fondamental.

3) $c' \neq 0$ si A est fondamental et $c' = (-1)^q c$ où $c = |c'|$ et

$$2q = \dim(G/K) - \mathrm{rang}(G) + \mathrm{rang}(K).$$

c dépend du choix des mesures de Haar.

La théorie admet donc un cas particulier très simple, celui où tous les sous-groupes de Cartan sont conjugués. En effet, dans ce cas, si A est un sous-groupe de Cartan, les distributions construites au n°4 sont des distributions centrales, distributions propres de $\underline{Z}$. A étant fondamental, la formule de Plancherel du groupe abélien A, permet, à l'aide du théorème 3, de calculer $f(1)$ en fonction de ces distributions. Comme ces dernières ne sont autres que les caractères de la série principale on a ainsi la formule de Plancherel de G. C'est ce qui se passe par exemple si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie semi-simple complexe ou encore pour un groupe de Lorentz sur deux. Notons que dans ce cas le spectre discret est vide. D'autre part le support de la mesure de Plancherel n'est pas Ω tout entier. On sait en effet qu'il existe une série ccomplémentaire de représentations unitaires irréductibles de G, série qu'on peut obtenir à partir des caractères non unitaires de A.

6. Revenons au cas général et indiquons l'origine du Théorème 3. Admettons que le problème posé au début du paragraphe, à savoir construire une décomposition convenable de la mesure de Dirac, puisse se réduire au problème analogue sur l'algèbre de Lie. Sur $\mathfrak{g}$ on dispose de la transformation de Fourier au

sens de l'espace vectoriel sous-jacent. En particulier la formule de Plancherel de $\mathfrak{g}$ donne une décomposition de la mesure de Dirac en les caractères de $\mathfrak{g}$ qui sont des fonctions propres des opérateurs différentiels invariants. Plus précisément, normalisons la mesure de Haar dX de $\mathfrak{g}$, de telle sorte que, B désignant la forme de Killing, la transformation de Fourier s'écrive :

$$\hat{f}(Y) = \int_{\mathfrak{g}} f(X)\, e^{iB(X,Y)}\, dX \quad \text{et} \quad f(X) = \int_{\mathfrak{g}} \hat{f}(Y)\, e^{-iB(X,Y)} dY .$$

Utilisant la décomposition $\mathfrak{g} = \bigcup_1^r \mathrm{AdG}(\mathfrak{a}_i^!)$ + ensemble de mesure nulle, ($\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ système complet de représentants des classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan), on obtient :

$$f(0) = \sum_1^r \int_{\mathfrak{a}_i^!} J_i(H) \psi_{\hat{f},i}(H)\, d_i(H)$$

où $d_i H$ est une mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_i$ et J_i un jacobien convenable.

Si $r = 1$, $\psi_{\hat{f},1}$ est de classe C^∞ sur $\mathfrak{a}_1$ et par transformation de Fourier sur $\mathfrak{a}_1$, on obtient le Théorème 3. Dans le cas général on procède comme suit : $\mathfrak{a}$ désignant toujours une sous-algèbre de Cartan, on sait que la fonction $\partial(\varpi)\psi_{\hat{f}}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathfrak{a}$. Soit T la distribution sur $\mathfrak{g}$, définie par $T(f) = \partial(\varpi)\psi_{\hat{f}}(0)$. On doit prouver que T est constante. Pour cela on remarque que T est invariante par AdG et est distribution propre de $\underline{\underline{I}}$. D'après un Théorème qu'on énoncera ultérieurement ceci implique l'existence d'une fonction F, localement sommable, telle que $T = FdX$. De plus la restriction de F à l'ouvert $\mathfrak{g}'$ des points réguliers est une fonction analytique. Utilisant les équations différentielles satisfaites par T, on prouve que F est constante sur toute composante connexe de $\mathfrak{g}'$. Enfin on montre que ces constantes sont égales à l'aide du Théorème 5 du § 2. Cette méthode ne donne pas le signe de la constante.

7. On va terminer ce paragraphe en donnant, avec quelques détails le cas de $G = SL(2,\mathbb{R})$. On prend pour K le groupe des rotations :

$$k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et on pose} \quad \pm a(t) = \pm \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} .$$

Il y a deux classes de sous-groupes de Cartan, la classe fondamentale qui admet K comme représentant et la classe du sous-groupe A formé des matrices $\pm a(t)$. Pour A, il y a une seule racine positive α qu'on peut choisir telle que $\xi_\alpha(\pm a(t))$ soit égal à e^{2t}, d'où pour t non nul :

$$F_f^A(\pm a(t)) = |(e^t - e^{-t})| \int_{G/A} f(\pm x a(t) x^{-1}) dx^*$$

et on a un prolongement C^∞ sur A. Pour K on trouve

$$F_f^K(k(\theta)) = \sin(\theta) \int_{G/K} f(xk(\theta)x^{-1}) dx^* , \qquad \theta \neq 0,\pi .$$

L'unique racine positive est imaginaire singulière de sorte que F_f^K ne se prolonge pas. Comme $\varpi = d/d\theta$, pour un choix convenable des mesures de Haar et en omettant k dans les notations : $-\pi f(1) = d/d\theta\ (F_f^K)(0)$. Mais on peut de plus prouver que :

$$F_f^K(0^+) - F_f^K(0^-) = \pi\, F_f^A(+a(0)) \quad \text{et} \quad F_f^K(\pi^+) - F_f^K(\pi^-) = -\pi\, F_f^A(-a(0)) .$$

Autrement dit les sauts aux points singuliers de F_f^K se calculent à l'aide des valeurs en ces mêmes points du prolongement de F_f^A.

Soient P_n^+, P_n^-, n entier $\geqq 1$, les deux séries discrètes de représentations unitaires irréductibles de G. Posons $P_n = P_n^+ \oplus P_n^-$; à l'aide d'une réalisation convenable de P_n , on prouve que :

$$\mathrm{Tr}(P_n(f)) = -(2/\pi) \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n\theta) F_f^K(\theta)d\theta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n|t|} \ (F_f^A(+a(t)) + (-1)^{n-1} F_f^A(-a(t)))dt \ .$$

La formule de Plancherel s'obtient alors comme suit : on applique la formule de Plancherel sur K

$$-\pi f(1) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d}{d\theta} F_f^K(\theta)d\theta + \lim_{N\to +\infty} \sum_{1}^{N} (1/\pi) \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n\theta)\frac{d}{d\theta} F_f^K(\theta)d\theta \ .$$

On intègre par parties en tenant compte des sauts :

$$-\pi f(1) = \lim_{N\to +\infty} \Big(- \frac{1}{2\pi} \sum_{1}^{N} n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n\theta) F_f^K(\theta)d\theta + \ldots\Big),$$

les termes non explicités s'exprimant en fonction de F_f^A . D'où :

$$(1) \ f(1) = (1/2\pi) \sum_{n \geqq 1} n \, \mathrm{Tr}(P_n(f)) \quad + T(F_f^A)$$

T étant une distribution sur A qui se calcule à l'aide des caractères de la série principale.

Soit maintenant G quelconque tel que rang G = rang K. Il existe donc un sous-groupe de Cartan compact B. Harish-Chandra construit, a priori, des distributions Θ_λ sur G, qui dans le cas de $SL(2,\mathbb{R})$ sont les caractères des séries discrètes et il prouve ensuite que l'intégration par parties faite ci-dessus se présente de façon analogue dans le cas général ce qui aboutit à une formule du type (1).

§ 2. Les distributions Θ_λ et la formule de Plancherel.

1. Dans les exemples précédents, les caractères étaient toujours des fonctions. Pour aller plus loin, on a besoin de savoir que ce fait est général. Pour toute partie C de G, on note C^G la réunion des orbites des points de C ; un ouvert Ω de G est dit complètement invariant si pour tout compact U contenu dans Ω l'adhérence dans G de U^G est contenue dans Ω. En

particulier Ω est invariant. De façon analogue, G opérant dans $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe, on définit les ouverts complètement invariants de $\mathfrak{g}$. Une distribution sur G est $\underline{Z}$-finie si elle est annulée par un idéal de codimension finie de $\underline{Z}$. Rappelons que $\underline{\underline{I}}$ est la sous-algèbre des invariants de AdG dans $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et qu'on identifie cette dernière à l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{g}$, à coefficients constants. Une distribution sur $\mathfrak{g}$ est $\underline{\underline{I}}$-finie si elle est annulée par un idéal de codimension fini de I.

THÉORÈME 4. Soient Ω un ouvert complètement invariant de G (resp. $\mathfrak{g}$) et T une distribution sur Ω, invariante et $\underline{Z}$-finie (resp. $\underline{\underline{I}}$-finie).

Il existe une fonction F définie et analytique sur G' (resp. $\mathfrak{g}'$), localement sommable sur G (resp. $\mathfrak{g}$) telle que T soit la distribution définie par F.

De plus, on a des résultats analogues à ceux du Théorème 2. Soient A un sous-groupe de Cartan, $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie, $A'_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des points h de A tels que $\xi_\alpha(h) \neq 1$ pour toute racine réelle α et $\mathfrak{a}'_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des points H de $\mathfrak{a}$ tels que $\alpha(H) \neq 0$ pour toute racine réelle α.

THÉORÈME 5. Posons $\Phi_A(h) = \Delta_A(h)F(h)$ (resp. $\Phi_A(H) = \pi_A(H)F(H)$) pour h (resp. H) régulier.

1) Φ_A se prolonge en une fonction analytique sur $A'_{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathfrak{a}'_{\mathbb{R}}$)

2) Soit h (resp. H) appartenant à A (resp. $\mathfrak{a}$) et soit v appartenant à $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ tel que $s^{\alpha}(v) = -v$ pour toute racine réelle α telle que $\xi_\alpha(h) = 1$ (resp. $\alpha(H) = 0$). $\partial(v)\Phi_A$ se prolonge en une fonction continue au voisinage de h (resp. H).

COROLLAIRE. $\partial(\varpi_A)\Phi_A$ se prolonge en une fonction continue sur A (resp. $\mathfrak{a}$).

Remarquons que pour tout z de $\underline{Z}$, la distribution zT satisfait encore aux hypothèses du Théorème 4, donc est définie par une fonction qui n'est autre que zF. D'autre part, on vérifie qu'il existe sur G' un opérateur différentiel invariant unique $\nabla_{G'}$ à coefficients analytiques, tel que, pour tout sous-groupe de Cartan A, pour tout point h de A' on ait

$$\nabla_G f(h) = (\partial(\varpi_A))\,(\Delta_A\, f_{|A})(h).$$

Le corollaire précédent permet de prouver que la fonction $\psi = \nabla_G F$ se prolonge en une fonction continue sur G. On définit de même un opérateur différentiel invariant sur $\mathfrak{g}, \nabla_{\mathfrak{g}}$. En particulier, la continuité de la fonction $\nabla_{\mathfrak{g}} F$ permet de terminer la démonstration du Théorème 3 (cf. § 1 n°6).

Ces résultats s'appliquent aux caractères des représentations unitaires irréductibles.

2. Dans toute la suite du paragraphe on suppose que le rang de G est égal au rang de K. Soit B un sous-groupe de Cartan de K ; B est un sous-groupe de Cartan de G et est connexe. Soit $\mathfrak{b}$ l'algèbre de Lie de B ; le groupe de Weyl $W_{\mathfrak{k}}$ de $(\mathfrak{k}_C, \mathfrak{b}_C)$ est égal à W_G. On pose $\mathcal{F} = i\mathfrak{b}^*$ espaces des formes linéaires imaginaires pures sur $\mathfrak{b}$.W opère dans $\mathcal{F}$ soit $\mathcal{F}'$ l'ensemble des points réguliers de $\mathcal{F}$. Le groupe des caractères unitaires de B s'identifie à un réseau L de $\mathcal{F}$; si λ appartient à L, le caractère correspondant ξ_λ de B est donné par $\xi_\lambda(e^H) = e^{\lambda(H)}$; $L' = L \cap \mathcal{F}'$.
D et γ ont été définis au § 1 n°2 et 3.

THÉORÈME 6. <u>Soit</u> λ <u>appartenant à</u> L'. <u>Il existe une et une seule distribution</u> Θ_λ <u>sur</u> G, <u>invariante, telle que</u> :

1) $z\Theta_\lambda = \gamma(z)(\lambda)\Theta_\lambda$, $z \in \underline{Z}$.

2) $\sup_{x \in G'} |D(x)|^{\frac{1}{2}} |\Theta_\lambda(x)| < +\infty$

3) $\Theta_\lambda = \frac{1}{\Delta_B} \sum_{s \in W_{\mathfrak{k}}} \varepsilon(s) \xi_{s(\lambda)}$ sur $B' = B \cap G'$.

($\varepsilon(s) = s(\omega_B)/\omega_B$). Dans la suite, on posera, comme au § 1, $\chi_\lambda(z) = \gamma(z)(\lambda)$.

On commence par démontrer le Théorème analogue sur $\mathfrak{g}$. Identifiant $\mathfrak{g}$ à son dual à l'aide de la forme de Killing, on peut considérer tout élément p de $\underline{\underline{I}}$ comme une fonction polynomiale sur $\mathfrak{g}$, on note $p_{|\mathfrak{b}}$ la restriction à $\mathfrak{b}$ de cette fonction et on sait que $p \to p_{|\mathfrak{b}}$ est un isomorphisme de $\underline{\underline{I}}$ sur l'algèbre des invariants symétriques de W.

THÉORÈME 6'. Soit λ appartenant à $\mathcal{F}'$. Il existe une et une seule distribution invariante T_λ sur $\mathfrak{g}$, telle que :

1) $\partial(p)T_\lambda = p_{|\mathfrak{b}}(\lambda)T_\lambda$, $p \in \underline{\underline{I}}$.

2) T est tempérée.

3) $T_\lambda(H) = \frac{1}{\pi_B(H)} \sum_{s \in W_{\mathfrak{k}}} \varepsilon(s) e^{\lambda(s^{-1}H)}$ pour $H \in \mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}'$.

Ici encore, pour démontrer le Théorème 6', on utilise la transformation de Fourier sur $\mathfrak{g}$. Soit H_o un point de $\mathfrak{b}'$; posons pour f dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$:

$$\tau_{H_o}(f) = \psi_{\hat{f}}(H_o) = \pi_B(H_o) \int_{G/B} f(AdxH_o)dx^*$$

($\mathfrak{b}$ n'a pas de racines réelles). D'après les résultats du § 1, τ_{H_o} est une distribution tempérée sur $\mathfrak{g}$, invariante et solution du système

$$\partial(p)\tau_{H_o} = p(iH_o)\tau_{H_o} \ , \quad p \in \underline{\underline{I}} \ .$$

$\underline{B}$ étant la forme de Killing, fixons H_o tel que $-i\lambda(H) = \underline{B}(H,H_o)$ et soit E l'espace des solutions invariantes et tempérées du système :

$$\partial(p)T = p(\lambda)T \ , \quad p \in \underline{\underline{I}} \ .$$

Tout élément T de E satisfait aux hypothèses du Théorème 4, donc est défini par une fonction F. D'après le Théorème 5, la fonction Φ_B, définie sur $\mathfrak{b}'$ par $\Phi_B = \Delta_B F$, se prolonge en une fonction analytique sur $\mathfrak{b}$. Comme il est facile de voir que Φ_B satisfait aux équations $\partial(v)\Phi_B = v(\lambda)\Phi_B$, pour v invariant par W, on obtient en résolvant ce dernier système :

$$\Phi_B(H) = \sum_{s \in W} \varepsilon(s) c_s(T) e^{i\lambda(s^{-1}H)}$$

où les constantes $c_s(T)$ sont telles que $c_{ts}(T) = c_s(T)$ pour t dans

$W_{\mathfrak{k}}$ (invariance de T). Or on peut démontrer, c'est la partie unicité du Théorème, que T est nulle dès que F est nulle sur $\mathfrak{b}'$ (l'hypothèse tempérée est ici essentielle), la dimension complexe de E est donc au plus égale à l'indice u de $W_{\mathfrak{k}}$ dans W. Soit $s_1,\dots,s_u$ un système de représentants des classes de W modulo $W_{\mathfrak{k}}$. Les distributions $\tau_{s_i(H_\delta)}$ appartiennent à E et sont linéairement indépendantes puisque les supports de leurs transformées de Fourier sont des orbites de G dans $\mathfrak{g}$, deux à deux distinctes. E est de dimension u ; il existe donc, pour toute famille $(c_s)_{s\in W}$ de nombres complexes telle que $c_{ts} = c_s$ pour t dans $W_{\mathfrak{k}}$, une distribution T de E telle que $c_s(T)$ soit égal à c_s pour tout s. Prenant $c_s = 1$ pour s appartenant à $W_{\mathfrak{k}}$ et 0 autrement, on obtient les distributions cherchées.

Les distributions Θ_λ sont les "images" par l'exponentielle des distributions T_λ mais comme ceci n'a de sens que localement, la construction précise est assez délicate.

3\. Soit $A_1,\dots,A_r$ un système complet de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan ; on suppose que $A_1 = B$. D'après le Théorème 3, on a, pour f dans $\mathcal{D}(G)$, $cf(1) = (-1)^q\, \partial(\varpi_1) F_{f,1}(1)$. Pour établir la formule de Plancherel ou plutôt ce qui apparaîtra a posteriori comme tel, on fait une transformation de Fourier sur B. Les sauts de $F_{f,1}$ et de ses dérivées introduisent des termes supplémentaires qui s'expriment à l'aide des fonctions $F_{f,i}$, $i = 2,\dots,r$. On va se contenter de donner le résultat. Pour f appartenant à $\mathcal{D}(G)$, la série :

$$T(f) = \sum_{\lambda\in L'} \varpi(\lambda)\, \Theta_\lambda(f)$$

est absolument convergente et T est une distribution invariante.

On a en effet, pour des constantes c_i convenables, la formule d'intégration :

$$\int_G f(x)dx = \sum_{i=1}^{r} c_i \int_{G/A_i \times A_i'} |\Delta_i(h)|^2 f(xhx^{-1}) d_i x d_i h$$

d'où

$$\Theta_\lambda(f) = \sum_{i=1}^{r} c_i \int_{A_i} \varepsilon_{\mathbf{R},i}(h)(-1)^{n(h)} F_{f,i}(h)\, \Phi_{\lambda,i}(h) d_i(h)$$

avec $\Phi_{\lambda,i}(h) = \Delta_i(h)\,\Theta_\lambda(h)$ et $\overline{\Delta_i(h)} = (-1)^{n(h)}\,\Delta_i(h)$.

Or, en construisant les distributions Θ_λ , on constate qu'il existe une constante C telle que, quel que soit λ , $\sup_{x\in G'} |D(x)|^{\frac{1}{2}}|\Theta_\lambda(x)| \leq C$. Si ω est l'élément de Casimir, $\chi_\lambda(\omega) = \|\lambda\|^2$, d'où en posant $z = (1+\omega)^j$:

$$|\varpi(\lambda)\Theta_\lambda(f)| \leq C|\varpi(\lambda)|(1+\|\lambda\|^2)^{-j}\Big(\sum_{i=1}^{r} c_i \int_{A_i'} |F_{zf,i}(h)| d_i h$$

(sur A_i' , $|D(h)|^{\frac{1}{2}} = |\Delta_i(h)|$). En prenant j assez grand, on obtient le résultat.

Soit A un sous-groupe de Cartan. Si $\tilde{A}_I = A \cap K$ et $A_{\mathbf{R}} = \mathrm{Exp}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p})$, $\mathfrak{a}$ algèbre de Lie de A, on a $A = \tilde{A}_I A_{\mathbf{R}}$. $Z(A) = \exp.(i(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p})) \cap K$ est un sous-groupe fini de $\tilde{A}_I$ tel que $\tilde{A}_I = Z(A)\tilde{A}_I^o$ où $\tilde{A}_I^o$ est la composante connexe de $\tilde{A}_I$. Soit $\tilde{A}_{\mathbf{R}} = Z(A)A_{\mathbf{R}}$. Enfin soit $\varpi_o = \prod H_\alpha$ pour α racine positive non réelle et, pour toute fonction f de $\mathcal{D}(G)$, posons $\varphi_f = (\partial(\varpi_o)F_f)_{|\tilde{A}_{\mathbf{R}}}$.

THÉORÈME 7. <u>Il existe pour</u> $i = 2,\ldots,r$, <u>une distribution tempérée</u> T_i <u>sur</u> $\tilde{A}_{\mathbf{R},i}$ <u>invariante par</u> $W_{G,i}$ <u>telle que, quelle que soit</u> f <u>appartenant à</u> $\mathcal{D}(G)$,

$$cf(1) = (-1)^q \sum_{\lambda\in L'} \varpi(\lambda)\Theta_\lambda(f) + \sum_{i=2}^{r} T_i(\varphi_{f,i}) .$$

Remarquons que $\tilde{A}_{\mathbf{R},i}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et que chacune d'entre elles est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}$ ce qui donne un sens à l'expression "distribution tempérée sur $\tilde{A}_{\mathbb{R},i}$ ". Les distributions T_i sont explicitement calculées par Harish-Chandra.

§ 3. L'espace $\mathcal{S}(G)$.

1. La restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{p}$ étant positive non dégénérée, on obtient une norme sur $\mathfrak{p}$, en posant $\|X\|^2 = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}X)$. Tout élément x de G s'écrit de façon unique $x = ke^X$, k dans K et X dans $\mathfrak{p}$; on pose $\sigma(x) = \|X\|$, σ est la "norme" sur G. On a $\sigma(x) = 0$ si et seulement si x appartient à K, σ est bi-invariante par K et $\sigma(xy) \leqq \sigma(x) + \sigma(y)$. A tout élément D de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ est associé un opérateur différentiel sur G invariant à gauche, opérateur qu'on notera $\ell(D)$ (ou simplement D) et un opérateur différentiel invariant à droite qu'on notera $r(D)$.

$\mathcal{S}(G)$ est l'espace des fonctions f, définies sur G, de classe C^∞, telles que quels que soient D_1 et D_2 appartenant à $\mathcal{U}_C$ et le nombre réel j :

$$\sup_{x\in G} \left[(1+\sigma(x))^j \,\Xi^{-1}(x)\,|\ell(D_1)r(D_2)f(x)|\right] < +\infty$$

où Ξ est une fonction qu'on va définir. On désire en effet que $\mathcal{S}(G) \subset L^2(G)$. Or, à la décomposition de Cartan de G, $G = KP$, $P = \mathrm{Exp}.\,\mathfrak{p}$, correspond une décomposition de la mesure de Haar dx de G, $dx = J\,dk\,d$ où J est un certain jacobien, dk la mesure de Haar de K et $d\Gamma$ l'image par l'application exponentielle de la mesure de Haar de l'espace vectoriel $\mathfrak{p}$. On doit donc introduire dans les semi-normes un facteur qui, à une puissance de σ près, soit de l'ordre de grandeur de la racine carrée de J. Soit $G = KHN$ une décomposition d'Iwasawa de G obtenue à partir d'une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{p}$. Soit ρ la demi somme des racines positives de $\mathfrak{h}$, χ_ρ étant le caractère de H, défini par $\chi_\rho(e^H) = e^{\rho(H)}$, prolongé à G par $\chi_\rho(khn) = \chi_\rho(h)$, on pose :

$$\Xi(x) = \int_K \chi_\rho(xk)dk$$

Ξ est bi-invariante par K, c'est une fonction sphérique élémentaire et, pour j assez grand :

$$\int_G \Xi^2(x)(1 + \sigma(x))^{-j}dx < +\infty$$

$\mathcal{S}(G)$ est muni de la topologie définie par les semi-normes précédentes. Il est localement convexe et complet.

THÉORÈME 8. 1) Les représentations régulières gauche et droite de G dans $\mathcal{S}(G)$ sont continues.

2) $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{S}(G) \subset L^2(G)$, les injections étant continues.

3) $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $\mathcal{S}(G)$.

2. On va voir que les résultats du § 2 sont valables pour f dans $\mathcal{S}(G)$. Soit A un sous-groupe de Cartan. L'espace $\mathcal{S}(A_I^!)$ étant défini à l'aide des semi-normes :

$$\sup_{x \in A_I^!} \left[(1 + \sigma(x))^j |\partial(v)\varphi(x)|\right]$$

on a le :

THÉORÈME 9. 1) L'application $f \to F_f$ de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{S}(A_I^!)$ se prolonge en une application continue de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{S}(A_I^!)$.

2) Pour f dans $\mathcal{S}(G)$ et h dans A', l'intégrale $\int_{G/A} f(xhx^{-1})dx^*$ est absolument convergente et

$$F_f(h) = \varepsilon_{\mathbb{R}}(h)\,\Delta(h) \int_{G/A} f(xhx^{-1})dx^* .$$

Essayons de donner une idée de la démonstration. Soient $\mathfrak{m}$ et M les centralisateurs de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$ et G respectivement. M est un sous-groupe réductif de G de même rang. A est un sous-groupe de Cartan de M. Utilisant une variante convenable de la décomposition d'Iwasawa, on peut réduire l'étude de l'intégrale invariante de (G,A) à celle de l'intégrale invariante de (M,A). Or $A_{\mathbb{R}}$ est contenu dans le centre de M de sorte que $A \cap K$, ou plutôt sa composante connexe, est un sous-groupe de Cartan compact de la partie semi-simple de M. On voit ainsi que le cas fondamental est celui où, dans l'énoncé du Théorème, $A \subset K$ ce qui implique $\operatorname{rang} G = \operatorname{rang} K$. Limitons-nous à ce cas et posons $A = B$. La clé du Théorème est le lemme :

LEMME 2. Soit ν une semi-norme sur $\mathcal{D}(G)$, continue ou non, telle que, quelle que soit f appartenant à $\mathcal{D}(G)$:

$$\int_B |\Delta(h)F_f(h)|\,dh < \nu(f) .$$

Dans ces conditions, pour tout élément u de $S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, il existe un entier N et N éléments $z_1,\dots,z_n$ de Z tels que, quelle que soit f :

$$\sup_{h\in B'} |\partial(u)F_f(h)| \leqq \sum_1^N \nu(z_i f) .$$

L'origine de ce lemme est la formule $F_{zf} = \gamma(z)F_f$ mais la démonstration précise n'est pas évidente.

Soit φ_B la fonction caractéristique de B'^G. Considérons sur $\mathcal{D}(G)$ la semi-norme $\nu(f) = \int_G |f(x)|\varphi_B(x)dx$, en décomposant l'intégrale, on voit qu'elle satisfait aux hypothèses du lemme. D'autre part, elle se prolonge en une semi-norme continue sur $\mathcal{S}(G)$. On a en effet, quel que soit j :

$$\nu(f) \leqq \nu_j(f) \int_G \Xi(x)(1 + \sigma(x))^{-j}\, \varphi_B(x)dx$$

avec

$$\nu_j(f) = \sup |f(x)|\Xi^{-1}(x)(1 + \sigma(x))^j .$$

Ξ et σ étant bi-invariantes par K :

$$\int_G \Xi(x)(1 + \sigma(x))^{-j} \varphi_B(x)dx = \int_{G\times K} \Xi(x)(1 + \sigma(x))^{-j} \varphi_B(xk)dkdx .$$

Or :

LEMME 3. Il existe une constante c positive telle que, pour presque tout x,

$$\int_K \varphi_B(xk)dk \leqq c\Xi(x).$$

Prenant j assez grand, on en déduit que ν se prolonge en une semi-norme continue sur $\mathcal{S}(G)$ et il suffit d'appliquer le lemme 2 à ν pour obtenir la première partie du Théorème. Pour la deuxième partie, on montre que la moyenne de $\Xi(1 + \sigma)^{-j}$ sur l'orbite d'un point de B', est finie pour j assez grand ; c'est encore une conséquence du lemme 2.

Toujours avec ce lemme, on peut prouver des résultats voisins concernant les orbites semi-simples et non plus seulement régulières.

Une distribution sur G est dite tempérée si elle peut se prolonger en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(G)$.

THÉORÈME 10. Soit T une distribution centrale et Z-finie.

1) T est tempérée si et seulement s'il existe une constante $s \geqq 0$, telle que :

$$\sup_{h\in A_i'} (1 + \sigma(h))^{-s}|D(h)|^{\frac{1}{2}} |T(h)| < +\infty \qquad i = 1,\ldots,r .$$

2) Si T est tempérée, si $\Phi_i(h) = \overline{\Delta_i(h)}T(h)$ pour h dans A_i', alors, pour f dans $\mathcal{S}(G)$

$$T(f) = \sum_1^r c_i \int_{A_i'} \varepsilon_{R,i}(h)\Phi_i(h)F_{f,i}(h)d_ih ,$$

(les constantes c_i sont celles qui figurent dans la décomposition de dx).

Compte-tenu du Théorème 9, le seul point non évident est que la condition de 1 soit nécessaire.

En particulier les distributions Θ_λ sont tempérées et en se reportant au § 2 n°3, on voit que la série :

$$T(f) = \sum_{\lambda \in L'} \varpi(\lambda)\Theta_\lambda(f)$$

est absolument convergente pour f dans $\mathscr{S}(G)$ et que T est une distribution tempérée sur G. Comme les distributions T_i sur les groupes $\tilde{A}_{\mathbb{R},i}$ sont tempérées, on a :

THÉORÈME 11. 1) <u>Supposons que</u> rang G = rang K, <u>alors, avec les notations du Théorème</u> 7, <u>quelle que soit</u> f <u>appartenant à</u> $\mathscr{S}(G)$,

$$cf(1) = (-1)^q \sum_{\lambda \in L} \varpi(\lambda)\Theta_\lambda(f) + \sum_{i=2}^{r} T_i(\varphi_{f,i}) \ .$$

2) <u>Dans le cas général, soit</u> A <u>un sous-groupe de Cartan fondamental, avec les notations du Théorème</u> 3, <u>on a, quelle que soit</u> f <u>appartenant à</u> $\mathscr{S}(G)$,

$$cf(1) = (-1)^q \partial(\varpi_A)F_f(1).$$

3. Pour déterminer le spectre discret, on doit réduire le problème de $L^2(G)$ à $\mathscr{S}(G)$, ce qui se fait à l'aide des résultats qui suivent.

Soit $\Omega(K)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de K. Soit ϑ un élément de $\Omega(K)$; on note ξ_ϑ son caractère, $n(\vartheta)$ sa dimension et $\alpha_\vartheta = n(\vartheta)\bar{\xi}_\vartheta$. Pour toute fonction f de $\mathcal{D}(G)$ (resp. $\mathscr{S}(G)$), la série $\Sigma\, f * \alpha_\vartheta$ converge absolument dans $\mathcal{D}(G)$ (resp. $\mathscr{S}(G)$) vers f ; c'est une propriété générale des vecteurs réguliers dans les représentations continues de G dans les espaces vectoriels localement convexes et complets. Pour toute distribution T sur G, on pose $T_\vartheta(f) = T(f_\vartheta)$ où $f_\vartheta = f * \alpha_\vartheta$. En particulier si T

est $\underline{Z}$-finie, alors T est $Z_K\underline{Z}$-finie, Z_K centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{k}_C$, et, comme on peut trouver dans tout idéal de codimension finie de $Z_K\underline{Z}$ un élément elliptique, T_ϑ est une fonction analytique. Soit π une représentation unitaire irréductible de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Un vecteur Φ de $\mathcal{H}$ est K-fini si le sous-espace engendré par $\pi(K)\Phi$ est de dimension finie. π est tempérée si son caractère l'est.

THÉORÈME 12. Soit π une représentation unitaire, irréductible et tempérée de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Il existe un nombre $m \geqq 0$, tel que, quels que soient les vecteurs K-finis Φ, ψ,

$$\sup |(\pi(x)\Phi|\psi)|\Xi^{-1}(x)(1 + \sigma(x))^{-m} < +\infty .$$

Ce résultat s'obtient en appliquant au caractère de π le lemme :

LEMME 4. Soient T une distribution sur G, invariante, $\underline{Z}$-finie et tempérée et ϑ un élément de $\Omega(K)$. Il existe une constante positive m telle que :

$$\sup. |T_\vartheta(x)|\Xi^{-1}(x)(1 + \sigma(x))^{-m} < +\infty$$

qui résulte des lemmes 2,3 et du Théorème 10.

Soient V un espace vectoriel de dimension finie et $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ une double représentation unitaire de K dans V. Une fonction f, définie sur G et à valeurs dans V est dit sphérique de type μ si $f(k_1xk_2) = \mu_1(k_1)f(x)\mu_2(k_2)$, k_1 et k_2 dans K.

LEMME 5. Soit f une fonction sphérique de classe C^∞. On suppose que f est $\underline{Z}$-finie et qu'il existe deux constantes positives c et r telles que

$$|f(x)| \leqq c\,\Xi(x)(1 + \sigma(x))^r.$$

Dans ces conditions, pour que f soit de carré intégrable, il faut et il suffit que f appartienne à $\mathcal{S}(G) \otimes V$.

LEMME 6. Supposons que rang G = rang K ; avec les notations du § 2 soit λ un élément régulier de $\mathfrak{F}$. Soit f une fonction sphérique de classe C^{∞} telle que $zf = \chi_{\lambda}(z)f$ pour z appartenant à Z et qu'il existe deux constantes positives c et r telles que $|f(x)| \leq c\Xi(x)(1 + \sigma(x))^{r}$. Dans ces conditions f appartient à $\mathcal{S}(G) \otimes V$.

Dans le cas particulier où $G = SL(2,\mathbf{R})$, une fonction sphérique, fonction propre de l'opérateur de Casimir, s'exprime à l'aide de la fonction hypergéométrique. Le développement asymptotique de cette fonction donne les lemmes précédents. Dans le cas général, on procède de même.

§ 4. Le spectre discret.

Une classe ω de représentations unitaires irréductibles de G est discrète si, μ désignant la mesure de Plancherel, $\mu(\{\omega\}) > 0$. Soit π un élément de ω ; on sait que ω est discrète si et seulement si π est de carré intégrable, c'est-à-dire si, étant donnés deux vecteurs Φ, ψ de l'espace de π, la fonction $x \to (\pi(x)\Phi|\psi)$ est de carré intégrable. De plus, si on pose $d(\omega) = \mu(\{\omega\})$, degré formel de ω, on a, quels que soient Φ et ψ :

$$\int_G |(\pi(x)\Phi|\psi)|^2 dx = (1/d\omega))\|\Phi\|^2\|\psi\|^2 \ .$$

THÉORÈME 13. G possède des classes discrètes si et seulement si rang G = rang K.

Supposons que rang G = rang K ; pour toute classe discrète ω, on note Θ_{ω} son caractère. Avec les notations du § 2, on a le :

THÉORÈME 14. Soit λ un élément de L'. Il existe une classe discrète $\omega(\lambda)$ telle que $\Theta_{\omega(\lambda)} = (-1)^q$ (signe $\varpi(\lambda))\Theta_\lambda$. On obtient ainsi toutes les classes discrètes et $\omega(\lambda_1) = \omega(\lambda_2)$ si et seulement si λ_1 et λ_2 sont conjugués par W_G. Enfin :

$$d(\omega(\lambda)) = (1/c)|\varpi(\lambda)|\text{Card.}(W_G) .$$

c est la constante qui figure dans la formule de Plancherel. Comme deux classes qui ont même caractère sont égales, la condition du théorème détermine $\omega(\lambda)$ de façon unique. Comparées aux démonstrations des résultats des paragraphes précédents, celles des deux Théorèmes ci-dessus sont faciles.

Démontrons par exemple le premier. Soient en ω une classe discrète, π un élément de ω, $\mathcal{H}$ l'espace de π. Comme Θ_ω est non nul, il existe ϑ dans $\Omega(K)$ tel que $\Theta_{\omega,\vartheta} \neq 0$. On va voir que c'est impossible si rang G $\neq$ rang K. On montre facilement π est tempérée. D'après le lemme 4, $\Theta_{\omega,\vartheta}$ est à croissance lente ($\Theta_{\omega,\vartheta}$ est une fonction analytique). Comme $\Theta_{\omega,\vartheta}$ est une somme finie de coefficients de π, elle est dans $L^2(G)$, donc, lemme 5, dans $\mathcal{S}(G)$. En effet, soit $\mathcal{H}$ le sous-espace $\pi(\alpha_\vartheta)\mathcal{H}$ des vecteurs de type ϑ. Posons $V = \mathfrak{L}(\mathcal{H}_\vartheta)$; $\mathcal{H}_\vartheta$, donc aussi V est de dimension finie. La fonction, définie sur G et à valeurs dans V : $x \to \pi(\alpha_\vartheta)\pi(x)\pi(\alpha_\vartheta)$ est Z-finie, de carré intégrable et sphérique de type μ où μ est la double représentation unitaire de K dans V, définie par $\mu(k_1,k_2)u = \pi(k_1)u\pi(k_2)$. Elle appartient donc à $\mathcal{S}(G) \otimes V$ et il suffit de noter que $\Theta_{\omega,\vartheta}(x) = \text{Tr}(\pi(\alpha_\vartheta)\pi(x)\pi(\alpha_\vartheta))$. Plus généralement, on a :

LEMME 7. Une fonction f de $L^2(G)$ qui est K-finie et Z-finie appartient à (G). (f est K-finie si ses translatées à droite et à gauche par K engendrent un espace vectoriel de dimension finie).

Soient A un sous-groupe de Cartan et $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie.

LEMME 8. <u>Soit</u> f <u>une fonction</u> <u>Z-finie appartenant à</u> $\mathcal{S}(G)$. <u>Si</u> A <u>est non compact</u> $F_f = 0$.

En effet, posons $\tilde{A}_I = A \cap K$ et $A_{\mathbb{R}} = \mathrm{Exp.}\,(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p})$. Si $a = a_1 a_2$, $a_1 \in \tilde{A}_I$ et $a_2 \in A_{\mathbb{R}}$, est un élément de A_I', il existe un voisinage connexe V de a_1 dans $\tilde{A}_I$ tel que $VA_{\mathbb{R}}$ soit contenu dans A_I'. Or comme $F_{zf} = \partial(\gamma(z))F_f$, la fonction F_f s'exprime sur $a_1 A_{\mathbb{R}}$ à l'aide d'exponentielles polynomes. Mais on sait que F_f appartient à $\mathcal{S}(A_I')$, donc ou bien F_f est nulle, ou bien $A_{\mathbb{R}} = (1)$.

Appliquons ce résultat à $\Theta_{\omega,\vartheta}$. Si rang $G \neq$ rang K, un sous-groupe fondamental A est non compact. Comme $\Theta_{\omega,\vartheta}$ appartient à $\mathcal{S}(G)$ le Théorème 11 donne $\Theta_{\omega,\vartheta}(1) = 0$. Dans ce qui précède, on peut remplacer $\Theta_{\omega,\vartheta}$ par ses translatées à droite d'où finalement $\Theta_{\omega,\vartheta} = 0$. Supposons maintenant rang G = rang K et prouvons l'existence de classes discrètes. Pour tout élément λ de L' soient $\mathcal{S}_\lambda$ le sous-espace de $\mathcal{S}(G)$ formé des fonctions f telles que $zf = \chi_\lambda(z)f$ et $\mathcal{H}_\lambda$ la fermeture de $\mathcal{S}_\lambda$ dans $L^2(G)$. Notons que si z^* est l'adjoint de l'opérateur différentiel z, $\chi_\lambda(z^*) = \chi_{-\lambda}(z)$. Soit f une fonction propre de $\underline{Z}$ dans $\mathcal{S}(G)$. Il existe donc un caractère χ de $\underline{Z}$ tel que $zf = \chi(z)f$. Supposons que $\chi \neq \chi_\lambda$ quel que soit λ dans L'. On a :

$$\Theta_\lambda(zf) = \chi_\lambda(z^*)\Theta_\lambda(f) = \chi_{-\lambda}(z)\Theta_\lambda(f) = \chi(z)\Theta_\lambda(f)$$

d'où $\Theta_\lambda(f) = 0$ quel que soit λ dans L'. Le lemme 8 et le Théorème 11 donnent $f(1) = 0$ et, en remplaçant f par ses translatées à droite $f = 0$. On a donc $\chi = \chi_\lambda$ pour un λ de L'. Par régularisation, on en déduit que toute distribution propre de $\underline{Z}$ qui appartient à $L^2(G)$, appartient à $\mathcal{H}_\lambda$ pour un λ de L'.

LEMME 9. $\Theta_{\lambda,\vartheta}$ <u>appartient à</u> $\mathcal{S}_\lambda$, $\lambda \in L'$, $\vartheta \in \Omega(K)$.

On voit facilement que $\Theta_{\lambda,\vartheta}$ est K-finie. Soit V le sous-espace de $L^2(K \times K)$ engendré par les fonctions $\Phi(x) : (k_1, k_2) \to \Theta_{\lambda,\vartheta}(k_1^{-1} x k_2)$. Il est de dimension finie et Φ est sphérique pour la double représentation unitaire évidente de K. On peut appliquer le lemme 6 ce qui donne le résultat cherché.

Soient alors $\mathcal{H}$ le sous-espace fermé de $L^2(G)$ engendré par les translatées à droite de $\Theta_{\lambda,\vartheta}$ et π la restriction à $\mathcal{H}$ de la représentation régulière droite. On peut démontrer que $\Theta_{\lambda,\vartheta}$ est un vecteur régulier de π et on en déduit, grâce à un théorème classique d'Harish-Chandra, que le sous-espace $\mathcal{H}_\vartheta$ des vecteurs de type ϑ est de dimension finie ; d'après la définition de $\mathcal{H}$, tout sous-espace fermé de π invariant à une intersection non nulle avec $\mathcal{H}_\vartheta$ ce qui prouve que π se décompose en la somme d'un nombre fini de représentations unitaires irréductibles. Comme chacune de ces représentations est de carré intégrable, G possède des classes discrètes.

La démonstration du Théorème 14 est un peu plus compliquée mais utilise des arguments voisins. Signalons seulement le résultat intermédiaire suivant : pour toute classe discrète ω soit Φ_ω la fonction analytique sur B, définie sur B' par $\Phi_\omega(b) = \Delta_B(b)\Theta_\omega(b)$, la mesure de Haar db de B étant supposée de masse totale 1, les relations d'orthogonalité de Schur, entre représentations de carré intégrable s'expriment ici par :

$$\int_B \Phi_\omega \bar{\Phi}_{\omega'} \, db = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq \omega' \\ \mathrm{Card}(W_G) & \text{si } \omega = \omega' \end{cases} .$$

BIBLIOGRAPHIE

Elle se limite aux mémoires récents d'Harish-Chandra. On en trouvera la liste dans le dernier en date d'entre eux : "Discrete series for semi-simple Lie groups II" Acta Mathematica 1966, vol. 116, 1-2. En particulier les pages 75 à 99 de ce mémoire contiennent, entre autres, les démonstrations des résultats du § 4.