ROGER GODEMENT

Introduction à la théorie de Langlands

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. nº 321, p. 115-144
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__115_0>

Séminaire BOURBAKI

19e année, 1966/67, n° 321 Février 1967

INTRODUCTION A LA THÉORIE DE LANGLANDS

par Roger GODEMENT

On se propose d'exposer ici une partie d'un mémoire de R.P.Langlands 10 resté jusqu'à présent à l'état de preprint non publié, et qui date de 1965 environ. Il s'agit d'une extension des résultats de Selberg (2 13 14 15) à ce qui, dans les groupes Lie semi-simples réels généraux, semble jouer le rôle des groupes fuchsiens de première espèce dans SL(2). Langlands donne de ces groupes discrets une définition qui exige l'existence d'un domaine fondamental du type rencontré récemment dans la théorie de la réduction pour les groupes discrets arithmétiques; nous nous bornerons, ici, à des groupes arithmétiques, les extensions au cas général étant (presque) toujours évidentes. Le problème résolu par Langlands est de décomposer en somme continue de représentations irréductibles la représentation unitaire évidente du groupe semi-simple réel G considéré dans l'espace de Hilbert $L^2(G/\Gamma)$, si Γ désigne le groupe discret donné dans G. La théorie comporte essentiellement trois parties (a) construction de "séries d'Eisenstein" associées aux diverses classes de sous-groupes paraboliques compatibles avec Γ (b) prolongement analytique de ces séries (elles dépendent de variables complexes, et ne convergent que dans des demi-espaces qui, malheureusement, ne rencontrent pas le spectre), enfin, (c) utilisation des séries prolongées pour obtenir la décomposition spectrale de $L^2(G/\Gamma)$.

Il serait naturellement séduisant de donner ici une vue d'ensemble du travail de Langlands. Mais il s'agit d'un papier de 250 pages environ, d'une lecture relativement difficile, et bourré de résultats à en éclater. A défaut de pouvoir tout exposer en une heure et trente minutes, et comme la littérature consacrée à ce sujet brille par l'abondance des énoncés profonds, et par la rareté des démonstrations, il nous a paru que le public, ayant soif de comprendre, préférerait trouver ici peu d'énoncés, et beaucoup de démonstrations. (Notons en passant, pour éviter toute confusion, que l'article de Langlands comporte des démonstrations complètes et détaillées, encore qu'un peu trop concentrées). Nous nous limiterons donc ici à des préliminaires permettant aux personnes intéressées d'aborder la lecture de l'exposé 11 de Langlands.

Enfin, et pour simplifier les calculs, on se placera au point de vue adèlique. Autrement dit, on désigne maintenant par G un groupe linéaire algébrique défini sur Q , par G_A le groupe (localement compact) des points adèliques de G, et par G_Q le sous-groupe discret des points rationnels; le but final de la théorie est la décomposition spectrale de la représentation unitaire évidente de G_A dans $L^2(G_A/G_Q)$. On supposera que le groupe G est réductif, qu'il ne possède aucun caractère rationnel non trivial défini sur Q, et qu'il y a dans G_Q des éléments unipotents non triviaux : le quotient G_A/G_Q est alors de volume fini, mais non compact, et on doit appliquer la théorie de la réduction dûe à Borel et Harish-Chandra, et exposée, dans le cadre adèlique, dans 5 . On utilisera systématiquement les notations et résultats de 5 , ainsi que de l'article 1 de Borel et Tits. Comme on a besoin de considérer non seulement les sous-groupes paraboliques de G, mais aussi les sous-groupes unipotents qu'on obtient en formant les radicaux unipotents des précédents, nous qualifierons ces sous-groupes unipotents d'horicycles de G; la correspondance avec la terminologie de Gelfand dans 4 est évidente, sans parler de Poincaré.

1 - Calculs formels.

Soient U un horicycle et P son normalisateur, de sorte que $P_Q U_A$ est un sous-groupe fermé unimodulaire de G_A . Considérons la représentation unitaire de G_A induite (au sens de Mackey) par la représentation unité de $P_Q U_A$: elle s'effectue par les translations à gauche dans l'espace de Hilbert $L^2(G_A/P_Q U_A)$ des fonctions sur G_A vérifiant

(1.1) $$\varphi(g\pi u) = \varphi(g) \quad \text{pour } g \in G_A , \quad \pi \in P_Q \text{ et } u \in U_A ,$$

et qui sont de carré intégrable modulo $P_Q U_A$. On aimerait bien pouvoir immerger cette représentation induite dans $L^2(G_A/G_Q)$; il suffit pour cela de rendre invariante par G_Q chaque solution de (1.1), i.e. de lui associer la fonction

(1.2) $$\theta_\varphi(g) = \sum_{G_Q/P_Q} \varphi(g\gamma) \quad ;$$

on est en droit d'espérer que la série converge, et que sa somme est de carré intégrable; c'est vrai (n° 4) mais pas du tout évident pour les fonctions φ intéressantes.

Désire-t-on, en sens inverse, projeter $L^2(G_A/G_Q)$ dans $L^2(G_A/P_QU_A)$, il suffit d'attacher, à chaque fonction ϕ invariante par G_Q, la fonction

$$\phi^U(g) = \int_{U_A/U_Q} \phi(gu)du \quad , \tag{1.3}$$

évidemment invariante par P_QU_A, et d'espérer que le résultat est dans $L^2(G_A/P_QU_A)$...

Il y a, entre les deux opérations que l'on vient de décrire, une relation évidente obtenue en calculant le produit scalaire, dans $L^2(G_A/G_Q)$, de (1.2) et de ϕ :

$$\langle \phi , \theta_\varphi \rangle = \int_{G_A/G_Q} \phi(g)\overline{\theta_\varphi(g)}dg = \int_{G_A/G_Q} dg \sum_{G_Q/P_Q} \phi(g\gamma)\overline{\varphi(g\gamma)} = \int_{G_A/P_Q} \phi(g)\overline{\varphi(g)}dg \quad , \tag{1.4}$$

et comme φ est invariante par U_A on trouve finalement

$$\langle \phi , \theta_\varphi \rangle = \int_{G_A/P_QU_A} \phi^U(g)\overline{\varphi(g)}dg = \langle \phi^U , \varphi \rangle \tag{1.5}$$

où le second produit scalaire est calculé dans $L^2(G_A/P_QU_A)$ - à supposer que l'on se trouve dans cet espace : c'est peu vraisemblable si $\phi = 1$. On est donc obligé d'imposer des conditions restrictives soit à φ, soit à ϕ - mais alors l'espoir de définir des applications $\varphi \longmapsto \theta_\varphi$ et $\phi \longmapsto \phi^U$ continues pour les structures L^2 s'évanouit momentanément. C'est ce qui explique les 250 pages de Langlands.

Poursuivons néanmoins ces calculs formels - ils donnent des idées, ce qui, sans être suffisant, est de toute façon indispensable. Si l'on désire reconstruire $L^2(G_A/G_Q)$ à partir des $L^2(G_A/P_QU_A)$, il faut évidemment, d'après (1.5), isoler tout d'abord dans $L^2(G_A/G_Q)$ le sous-espace $L^2_o(G_A/G_Q)$ formé des fonctions ϕ telles que $\phi^U = 0$ pour <u>tout</u> horicycle U de G (il suffit du reste de le vérifier modulo conjugaison par un élément de G_Q, i.e. pour les U, en nombre fini, qui sont contenus dans un horicycle maximal). Une telle fonction (même si elle n'est pas L^2) sera dite <u>parabolique</u>. Plus généralement une fonction φ vérifiant (1.1) pour un groupe parabolique donné P sera dite <u>parabolique le long de</u> P si φ^V (définition évidente) est nulle pour tout horicycle $V \subset P$ et contenant strictement U - autrement dit si, pour tout g, la fonction $p \longmapsto \varphi(gp)$, considérée sur P_A/U_A, est parabolique. Nous noterons $L^2_o(G_A/P_QU_A)$ le sous-espace des fonctions paraboliques le long de P dans $L^2(G_A/P_QU_A)$. Dans tous ces espaces, on a des représentations unitaires de G_A, à l'aide des translations à gauche.

Si l'on admet, en première approximation, que $L^2(G_A/G_Q)$ est somme directe de

$L_o^2(G_A/G_Q)$ et de sous-espaces engendrés par les θ_φ pour les diverses classes de sous-groupes paraboliques P de G, on aura évidemment - en considérant P/U, qui est réductif comme G - un résultat analogue pour $L^2(G_A/P_QU_A)$: celui-ci, on peut l'espérer, est somme de $L_o^2(G_A/P_QU_A)$ et de sous-espaces isomorphes aux $L^2(G_A/P'_QU'_A)$ pour les $P' \subset P$, l'immersion de ce dernier espace étant, bien évidemment - rappelons qu'on se borne ici à des calculs formels -, obtenue en attachant à chaque solution de $\varphi'(g\pi'u') = \varphi'(g)$ la fonction $\sum \varphi'(g\pi)$, où l'on somme sur P_Q/P'_Q . Si la fonction (1.1) s'obtient de cette façon à partir d'une fonction φ' relative à P', il est clair que la série (1.2) ne sera pas autre chose que la série θ_φ, qu'on aurait pu obtenir directement. Autrement dit, il est inutile de chercher à envoyer dans $L^2(G_A/G_Q)$ l'espace $L^2(G_A/P_QU_A)$ tout entier; il suffit de le remplacer par $L_o^2(G_A/P_QU_A)$, puisqu'on peut espérer récupérer ce qu'on vient d'oublier à l'aide des sous-groupes paraboliques $P' \subset P$, et donc, si l'on suppose que tout fonctionne au mieux, à l'aide des espaces $L_o^2(G_A/P'_QU'_A)$. Noter du reste qu'on a trivialement

$$L^2(G_A/P_QU_A) = L_o^2(G_A/P_QU_A) \quad \text{si P est minimal} \quad , \tag{1.6}$$

et que dans ce cas le groupe P/U est anisotrope (mais possède des caractères non triviaux définis sur Q).

On est ainsi conduit à n'étudier que les séries (1.2) pour lesquelles φ est <u>parabolique le long de</u> P. En supposant $L_o^2(G_A/P_QU_A)$ plongé par (1.2) dans $L^2(G_A/G_Q)$, il reste encore à décomposer la représentation de G_A dans $L_o^2(G_A/P_QU_A)$. Pour cela, il s'impose d'utiliser le fait que le groupe réductif P/U possède, si $P \neq G$, un centre non trivial, et des caractères rationnels sur Q. Soit P_A^o le sous-groupe fermé de P_A défini par la condition que $|\chi(p)| = 1$ pour tout caractère χ de P défini sur Q, voir 5 , de sorte que $P_Q \subset P_A^o$ et que P_A^o/P_Q est de volume fini. Le quotient P_A/P_A^o est un tore réel (produit de groupes isomorphes à R_+^*) de dimension q = rg(P), par définition du rang de P; si l'on désigne par T le plus grand tore décomposé sur Q contenu dans le <u>centre</u> de P/U, par T_∞ le groupe des points réels de T (qui est donc en facteur dans T_A), et par T_∞^+ la composante connexe de l'élément neutre dans T_∞ , il est clair que P_A/P_A^o est canoniquement isomorphe à T_∞^+ . Si φ vérifie (1.1) et si $t \in T_A$, désignons, par abus de notation, par $\varphi(gt)$ le nombre $\varphi(gp)$, où p est un représentant de t dans P_A. La décomposition de $L_o^2(G_A/P_QU_A)$ relativement au centre de P/U s'obtient alors en attachant à φ la fonction

$$\int_{T_A/T_Q} \varphi(gt)t^{\lambda}d^*t \qquad , \tag{1.7}$$

où l'on note $t \longmapsto t^{\lambda}$ un caractère complexe du groupe T_A, trivial sur T_Q (c'est l'analogue d'un Grössencharakter du groupe des idèles d'un corps de nombres); comme T_A/T_Q est produit direct du groupe compact T_A^o/T_Q et de T_∞^+, on peut se borner, pour commencer, à effectuer une transformation de Fourier, ou de Laplace (ou de Mellin), sur T_∞^+, en attachant à φ la fonction

$$L_\varphi(g,\lambda) = \int_{T_\infty^+} \varphi(gt)t^{\lambda}d^*t \qquad , \tag{1.8}$$

où, maintenant, λ désigne un caractère complexe de T_∞^+, i.e. s'identifie à un élément de C^q si $q = rg(P)$, ou encore à une forme linéaire complexe sur l'algèbre de Lie réelle de T_∞, la correspondance étant alors donnée par la relation

$$t^{\lambda} = \exp[\lambda(\log t)] \qquad \text{pour } t \in T_\infty^+ \quad . \tag{1.9}$$

Il est clair, principalement lorsqu'on néglige les questions de convergence, qu'on a les relations

$$L_\varphi(gt\pi u,\lambda) = L_\varphi(g,\lambda)t^{-\lambda} \qquad , \tag{1.9}$$

$$\varphi(g) = \int_{Re(\lambda) = \lambda_o} L_\varphi(g,\lambda)d\lambda \qquad , \tag{1.10}$$

$$\Theta_\varphi(g) = \int_{Re(\lambda) = \lambda_o} E_\varphi(g,\lambda)d\lambda \tag{1.11}$$

où l'on a introduit la série d'Eisenstein

$$E_\varphi(g,\lambda) = \sum_{G_Q/P_Q} L_\varphi(g\gamma,\lambda) \qquad ; \tag{1.12}$$

malheureusement, pour obtenir à l'aide de (1.8) une décomposition de $L_o^2(G_A/P_QU_A)$ en somme continue de représentations <u>unitaires</u> de G_A il faut, dans (1.10), intégrer sur la verticale

$$Re(\lambda) = \rho \qquad \text{où} \quad t^{2\rho} = d(tut^{-1})/du \tag{1.13}$$

comme chacun sait (voir par exemple dans 6 la note au bas de la page 14 ; la forme linéaire ρ est ici, évidemment, le déterminant de ad(t) dans l'algèbre de Lie de U, i.e. la "demi-somme des racines positives" de la théorie usuelle); et le "malheur" provient du fait que, pour ces valeurs de λ, on se trouve <u>en dehors</u> du domaine de convergence de (1.12) même si (1.8) converge quel que soit λ (ce qui, par exemple, sera trivialement le cas si φ est à support compact modulo P_A°, ce qui ne veut pas dire modulo P_Q lorsque P n'est pas minimal). On ne peut donc donner un sens à ces calculs qu'après avoir effectué un prolongement analytique des séries (1.12) en dehors de leurs domaines de convergence - mais alors, il faut, dans (1.11), déplacer la verticale d'intégration pour l'amener sur la droite critique (1.13), ce qui introduit, au passage, des résidus, qu'il faut récupérer à l'aide de séries d'Eisenstein associées à des sous-groupes paraboliques contenant P, et, une fois de plus, tout espoir de parvenir au but trivialement s'effondre. A ce moment, il est préférable de se mettre au travail; on a bien suffisamment d'idées, et la direction du Séminaire Bourbaki insiste sur la nécessité de maintenir les exposés dans des limites raisonnables (une dizaine de pages environ).

2 - Le spectre dans $L_0^2(G_A/G_Q)$ est discret.

Puisqu'on a une représentation unitaire de G_A dans $L^2(G_A/G_Q)$, on peut attacher à chaque fonction F continue à support compact (plus généralement, intégrable) sur G_A un opérateur de convolution, qui transforme chaque fonction ϕ en la fonction

$$F * \phi(x) = \int_{G_A} F(xy^{-1})\phi(y)dy \qquad ; \tag{2.1}$$

il est borné dans $L^2(G_A/G_Q)$, et laisse stable le sous-espace invariant fermé $L_0^2(G_A/G_Q)$.

Théorème 1 (Gelfand et Piateckij-Šapiro) - Les opérateurs de convolution sont compacts dans $L_0^2(G_A/G_Q)$. Par suite, la représentation de G_A dans $L_0^2(G_A/G_Q)$ se décompose de façon discrète, et chaque composante irréductible intervient un nombre fini de fois seulement

Ce théorème a déja fait l'objet d'un exposé détaillé dans 8 , mais nous aurons besoin de résultats plus précis. Il suffit de faire la démonstration pour des F "assez nombreuses", par exemple les $F \in \mathcal{D}(G_A)$, espace des fonctions "indéfiniment dérivables" à support compact défini par Bruhat (sommes finies de fonctions décomposables $F = \prod F_p$, où F_∞ est C^∞ , où F_p est, pour presque tout p fini, la fonction caractéristique du sous-groupe ouvert compact de G_p formé des matrices entières, et où, pour tout p fini ou non, F_p est continue à support compact). On procède alors comme suit.

Soit V un horicycle provisoirement quelconque de G. L'intégrale (2.1) s'écrit

$$(2.2) \qquad F * \phi(x) = \int_{G_A/V_Q} K_F^V(x,y)\phi(y)dy \qquad \text{où} \quad K_F^V(x,y) = \sum_{V_Q} F(x\eta y^{-1}) .$$

En notant $\mathfrak{v}$ l'algèbre de Lie de V et $\mathfrak{v}^*$ le vectoriel dual, il est clair que l'application exponentielle permet d'identifier $\mathfrak{v}_Q$ à V_Q et $\mathfrak{v}_A$ à V_A ; on peut alors appliquer la formule sommatoire de Poisson sur le vectoriel $\mathfrak{v}$, d'où

$$(2.3) \qquad K_F^V(x,y) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{v}_Q^*} \int_{\mathfrak{v}_A} F\left[x.\exp(n).y^{-1}\right]\overline{\tau_\lambda(n)}dn$$

où, pour chaque $\lambda \in \mathfrak{v}_A^*$, on désigne par $\tau_\lambda(n)$ le caractère de Pontrjagin de $\mathfrak{v}_A$ obtenu en prenant la valeur, sur l'adèle $\lambda(n)$ de Q, du caractère de Tate du groupe additif A (tout caractère trivial sur Q mais non sur A tout entier conviendra). Soit alors U un horicycle maximal contenant U, de normalisateur P = ZU où Z est le centralisateur d'un tore décomposé maximal H (noté T dans 5 et S dans Borel-Tits); notons α_i $(1 \leq i \leq r)$ les racines simples de G par rapport à H, l'ordre des racines étant défini par le sous-groupe unipotent U, et soit $H_\infty^+(c)$ la partie du tore réel H_∞^+ définie par les inégalités $\alpha_i(h) < c$. Si l'on choisit un compact K (noté M au § 10 de 5) tel que $G_A = KP_A$, et un ouvert relativement compact $F \subset P_A^o$ tel que $P_A^o = FP_Q$, alors le domaine de Siegel $\mathfrak{S} = K.H_\infty^+(c).F$ est un ouvert fondamental pour G_Q si c est assez grand. On va évaluer (2.3) et (2.2) pour $x \in \mathfrak{S}$.

Si l'on écrit $x = k_x h_x p_x$ avec $k_x \in K$, $h_x \in H_\infty^+$ et $p_x \in P_A^o$ (l'ambiguïté de la décomposition n'a aucune importance pour ce qui suit), et si l'on tient compte du fait que F est à support compact, on voit immédiatement que pour $x \in \mathfrak{S}$ la relation

$$(2.4) \qquad K_F(x,y) \neq 0 \qquad \text{implique} \qquad y \in Kh_x\Omega_P \subset \Omega_G.h_x$$

où Ω_P désigne un compact fixe dans P_A , et Ω_G un compact fixe dans G_A. Il s'ensuit que, dans (2.3), on a

$$(2.5) \qquad x.\exp(n).y^{-1} = \omega_x.\ \exp\left[ad(h_x)n\right].\omega_{x,y}$$

où ω_x et $\omega_{x,y}$ restent dans des compacts fixes. Mais lorsque a et b restent dans des compacts fixes, il est clair que les transformées de Fourier des fonctions $n \longmapsto F\left[a.\exp(n).b\right]$ sur $\mathfrak{v}_A$ sont à décroissance uniformément rapide à l'infini sur $\mathfrak{v}_A^*$. Si l'on choisit sur le vectoriel adèlique $\mathfrak{v}_A^*$ une hauteur $\| \ \|$ au sens de 5 , on a donc, pour les x,y considérés, une majoration

$$(2.6) \qquad \int_{\mathfrak{v}_A} F\left[x.\exp(n).y^{-1}\right]\overline{\tau_\lambda(n)}dn \prec \beta_V(h_x)^{-1}\, \| \check{ad}(h_x)\lambda \|^{-N} ,$$

valable, pour tout entier $N > 0$, uniformément pour $x \in \mathfrak{S}$ et $y \in G_A$ (et uniformément par rapport à F si F reste dans une partie compacte de $\mathcal{D}(G_A)$, détail qui servira plus tard); on pose naturellement

$$(2.7) \qquad \beta_V(h) = \det_{\mathfrak{n}} \operatorname{ad}(h) = \prod_{\alpha \in \mathfrak{n}} \alpha(h) \quad ,$$

où le produit est étendu à celles des racines (positives) α de G par rapport à H pour lesquelles le sous-espace $\mathfrak{g}(\alpha)$ de l'algèbre de Lie de G est contenu dans $\mathfrak{n}$; on tient naturellement compte de la multiplicité de α. Mais dans $\mathfrak{n}^*$ il est clair que $\operatorname{ad}(h_x)$ est représenté par une matrice diagonale dont les termes sont les $\alpha(h_x)^{-1}$ avec $\alpha \in \mathfrak{n}$. Si l'on note I l'ensemble des indices i tels que $\alpha_i \in \mathfrak{n}$ (chez Borel-Tits les I sont des θ du plus mauvais effet), on sait que la relation $\alpha \in \mathfrak{n}$ signifie que $\alpha = n_1\alpha_1 + \dots + n_r\alpha_r$ avec $n_i > 0$ pour au moins un $i \in I$, et $n_j \geqslant 0$ pour les autres indices; comme $\alpha_j(h_x) < c$ dans $\mathfrak{S}$, les termes diagonaux de $\operatorname{ad}(h_x)$ sont dominés par l'expression $\sup_I \alpha_i(h_x)$, et (2.6) donne donc une majoration

$$(2.8) \qquad \int_{\mathfrak{n}_A} F[x.\exp(n).y^{-1}]\,\overline{\tau_\lambda(n)}\,dn \prec \beta_V(h_x)^{-1}.\|\lambda\|^{-N}.\sup_{i \in I} \alpha_i(h_x)^N$$

pour $\lambda \neq 0$.

Supposons en particulier V <u>minimal</u>; alors I se réduit à un seul indice i, et nous poserons alors $V = U(i)$. Comme la série $\sum \|\lambda\|^{-N}$ converge pour N grand, on trouve, en isolant dans (2.3) le terme $\lambda = 0$, que

$$(2.9) \qquad K_F^{U(i)}(x,y) - \int_{U(i)_A} F(xuy^{-1})du \prec \beta_V(h_x)^{-1}.\alpha_i(h_x)^N \qquad \text{dans } \mathfrak{S} \times G_A$$

et pour tout N. Mais si l'on remplace, dans l'intégrale (2.2), le noyau $K_F^{U(i)}(x,y)$ par le premier membre de (2.9) on retranche, à $F * \phi(x)$, la fonction $F * \phi^{U(i)}(x)$. Posant $\phi^{U(i)} = \phi^i$ on déduit alors de (2.4) une majoration

$$(2.10) \quad F * \phi(x) - F * \phi^i(x) \prec \beta_V(h_x)^{-1}.\alpha_i(h_x)^N \int_{K.h_x.\Omega_P} |\phi(y)|dy \quad \text{dans } \mathfrak{S} \;,$$

et la majoration est uniforme en F lorsque F reste dans un compact de $\mathcal{D}(G_A)$.

Posons alors

$$(2.11) \qquad \eta(h) = \inf_{1 \leqslant i \leqslant r} \alpha_i(h) \qquad \text{pour } h \in H_\infty^+ \quad .$$

Nous dirons qu'une fonction ϕ sur G_A/G_Q est <u>à décroissance rapide</u> si l'on a

(2.12) $$\phi(x) \prec \eta(h_x)^N \quad \text{dans } \mathfrak{S} \quad \text{quel que soit } N \quad ,$$

et qu'elle est à croissance lente s'il existe un N tel que l'on ait

(2.13) $$\phi(x) \prec \eta(h_x)^{-N} \quad \text{dans } \mathfrak{S} \quad ;$$

on vérifie facilement que ces conditions ont un sens invariant en particulier (2.13) se réduit aux conditions de croissance imposées par Harish-Chandra, dans 9 , aux formes automorphes .

Théorème 2 - Si une fonction parabolique ϕ sur G_A/G_Q est à croissance lente, alors $F * \phi$ est à décroissance rapide quelle que soit $F \in \mathcal{D}(G_A)$; il en est de même si ϕ est dans $L^2_o(G_A/G_Q)$.

Si en effet ϕ est parabolique, le premier membre de (2.10) se réduit, quel que soit i, à $F * \phi(x)$. Comme $K.h_x.\Omega_P$ a pour volume approximativement $\beta(h_x)^{-1}$, où cette fois β est la somme de toutes les racines positives, i.e. un monôme en les α_j , on déduit de (2.10) qu'il existe un entier r tel que l'on ait

(2.14) $$F * \phi(x) \prec \eta(h_x)^{-r} \alpha_i(h_x)^N \quad \text{dans } \mathfrak{S} \quad \text{pour tout } N \text{ et pour tout } i$$

si ϕ est à croissance lente, et comme ceci a lieu pour tout i on obtient, en prenant le inf des seconds membres, une majoration du type (2.12). Si $\phi \in L^2_o(G_A/G_Q)$, on trouve de même, à l'aide de Cauchy-Schwarz, une majoration

(2.15) $$F * \phi(x) \prec \eta(h_x)^{-r}.\alpha_i(h_x)^N \|\phi\|_2 \quad \text{dans } \mathfrak{S} \quad \text{pour tout } N \text{ et pour tout } i,$$

d'où évidemment

(2.16) $$F * \phi(x) \prec \eta(h_x)^N \|\phi\|_2 \quad \text{dans } \mathfrak{S} \quad \text{pour tout } N,$$

uniformément en $\phi \in L^2_o(G_A/G_Q)$, cqfd.

De plus (2.16) implique immédiatement le théorème 1; le second membre est en effet borné sur $\mathfrak{S}$; on peut de plus remplacer F par $X * F$ où X est, sur le groupe de Lie G_∞ : une distribution quelconque de support l'origine; on déduit de là, grâce à Ascoli, que la convolution par F applique la boule unité de $L^2_o(G_A/G_Q)$ sur une partie compacte de cet espace, d'où la compacité de l'opérateur considéré.

Le théorème 2 est particulièrement intéressant s'il existe une F telle que

(2.17) $$F * \phi = \phi \quad ;$$

il montre alors (si ϕ est parabolique et à croissance lente, ou de carré intégrable) que ϕ , ainsi que toutes ses dérivées successives $X * \phi$, est à décroissance rapide (et à fortiori de carré intégrable). C'est le cas des formes automorphes de 9 ou 1bis.

3 - Convergence des séries d'Eisenstein.

Soient H un tore décomposé maximal dans G, et $P = Z(H)U = ZU$ un sous-groupe parabolique minimal contenant H; notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines simples de G par rapport à H (où l'on utilise U pour ordonner les racines); on peut les regarder soit comme des caractères rationnels de H, soit comme des formes linéaires sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H. Posons $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = \beta = 2\rho$, et considérons le groupe de Weyl $W = N(H)/Z(H)$ de G par rapport à H comme un groupe d'automorphismes du dual de $\mathfrak{h}$; il est engendré par les symétries w_i par rapport aux racines simples α_i , et l'on a $w_i(\rho) = \rho - e_i\alpha_i$ où $e_i = \dim \mathfrak{g}(\alpha_i) + 2\dim \mathfrak{g}(2\alpha_i)$ est un entier positif. On appellera poids dominants fondamentaux de G par rapport à H les formes linéaires Δ_i sur $\mathfrak{h}$ qui vérifient

$$(3.1) \qquad w_i(\Delta_j) = \Delta_j \text{ si } i \neq j \quad , \quad w_i(\Delta_i) = \Delta_i - e_i\Delta_i \quad ;$$

on a évidemment

$$(3.2) \qquad \rho = \Delta_1 + \ldots + \Delta_r$$

et les Δ_i sont définis sur Q. Pour chaque i, on peut trouver un entier $n_i > 0$ tel que la forme linéaire $\Delta_i' = n_i\Delta_i$ corresponde à un caractère rationnel (noté encore Δ_i') de H, et une représentation linéaire rationnelle ρ_i de G, définie sur Q, admettant Δ_i' pour poids dominant par rapport à P - ce qui signifie qu'on peut trouver, dans l'espace de ρ_i , un vecteur rationnel $a_i \neq 0$ tel que la droite engendrée par a_i soit stable par P, avec en outre $\rho_i(h)a_i = \Delta_i'(h)a_i$ pour tout $h \in H$. Cette droite est même stable par le sous-groupe parabolique maximal $P(i) \supset P$ admettant pour radical unipotent le sous-groupe $U(i)$ du n° précédent. Enfin, et bien que Δ_i ne corresponde pas (si G n'est pas simplement connexe) à un caractère rationnel de H, on peut encore définir

$$(3.3) \qquad \Delta_i(h) = h^{\Delta_i} = \exp\left[\Delta_i(\log h)\right] \qquad \text{pour tout } h \in H_\infty^+ \quad ,$$

et on obtient ainsi un homomorphisme de H_∞^+ dans R_+^* .

Rappelons enfin que, si

$$(3.4) \qquad P(I) = \bigcap_{i \in I} P(i)$$

est un sous-groupe parabolique contenant P, on peut écrire $P(I) = Z(I)U(I)$ où $U(I)$ est engendré par les racines $\alpha = n_1\alpha_1 + \ldots + n_r\alpha_r$ telles que $n_i > 0$ pour un $i \in I$, et où $Z(I)$ est le centralisateur du tore

(3.5) $$T(I) = \text{composante connexe de} \bigcap_{j \notin I} \operatorname{Ker}(\alpha_j)$$

dans H. On a $P(I)_A = T(I)_\infty^+ P(I)_A^\circ$, et $P(I)_A^\circ/P(I)_Q$ est de volume fini. Enfin, $G_A/P(I)_A$ est compact, et tout caractère de $T(I)_\infty^+$ s'exprime à l'aide des Δ_i $(i \in I)$.

Théorème 3 - Soit

(3.6) $$\lambda = 2 \sum_{i \in I} s_i \Delta_i \qquad (s_i \in \underline{C})$$

une forme linéaire complexe sur l'algèbre de Lie de $T(I)$, et soit $L(g)$ une fonction sur G_A telle que l'on ait

(3.7) $$L(gt\pi u) = L(g)t^{-\lambda} \quad \text{pour } t \in T(I)_\infty^+ \text{ , } \pi \in P(I)_Q \text{ , } u \in U(I)_A \text{ ;}$$

supposons L bornée sur toute partie de G_A compacte modulo $P(I)_A^\bullet$. Alors la série

(3.8) $$E(g) = \sum_{G_Q/P(I)_Q} L(g\gamma)$$

converge normalement sur tout compact si $\operatorname{Re}(s_i) > 1$ pour tout $i \in I$, et sa somme est à croissance lente.

On peut supposer les s_i réels et $L(g) > 0$ et continue comme on le voit immédiatement, et même $L(gtp) = L(g)t^{-\lambda}$ pour $t \in T(I)_\infty^+$ et $p \in P(I)_A^\bullet$. Le rapport $L(gg')/L(gg'')$ ne dépendant que des classes de g' et g'' modulo $P(I)_A$, est borné uniformément en g' et g'' lorsque g reste dans un compact, de sorte qu'il suffit, pour établir la convergence, de montrer que l'intégrale

(3.9) $$\sum_{G_Q/P(I)_Q} \int_{\mathcal{V}} L(g\gamma)dg = \int_{\mathcal{V}.G_Q/P(I)_Q} L(g)dg$$

converge si $\mathcal{V}$ est un voisinage compact assez petit de l'origine. En intégrant par l'intermédiaire de $P(I)_A$ tout revient, puisque $G_A/P(I)_A$, à montrer la convergence de

(3.10) $$\int_{\mathcal{V} G_Q \cap P(I)_A/P(I)_Q} L(p)d_r p$$

où $d_r p$ est la mesure de Haar à droite sur $P(I)_A$; en écrivant $p = tx$ avec $t \in T(I)_\infty^+$ et $x \in P(I)_A^\circ$ on a évidemment $d_r p = t^{2\rho} d^*t dx$ où d^*t est une mesure invariante sur le tore $T(I)^+_\infty$, et dx une mesure invariante sur $P(I)^o_A$ on est ramené à la convergence de l'intégrale

(3.11) $$\int t^{2\rho-\lambda}\, d^*t$$

où l'on intègre sur la partie de $T(I)^+_\infty$ formée par les composantes des $p \in \mho G_Q \cap P(I)_A$. Mais si l'on choisit, sur le vectoriel adèlique de la représentation ρ_i considérée au début de ce n° , une hauteur au sens de 5 la relation (3.7) montre aussitôt que la fonction L est du même ordre de grandeur que la fonction

(3.12) $$\prod_{i \in I} \|\rho_i(g)a_i\|^{-2s_i/n_i} ,$$

où $n_i\Delta_i$ est, rappelons-le, le poids dominant de ρ_i ; comme $\|\rho_i(g)a_i\|$ reste au large de O(quand g reste dans une partie de G_A qui est compacte modulo G_Q) en vertu des propriétés élémentaires des hauteurs, on en conclut aussitôt que, dans (3.11), on peut se borner à intégrer sur la partie de $T(I)^+_\infty$ définie par les inégalités $\Delta_i(t) > c$ avec $c > 0$ donné. Choisissant les $\Delta_i(t)$ pour paramètres sur $T(I)^+_\infty$, on est ramené à constater que l'intégrale

(3.13) $$\prod_{i \in I} \int_c^{+\infty} t_i^{2(1-s_i)}\, d^*t_i$$

converge pour $s_i > 1$, ce qui est clair. Voir aussi 1 bis .

Pour montrer que la série E(g) est à croissance lente, on peut supposer que L(g) est la fonction (3.12), et se placer dans un domaine de Siegel $\mathfrak{S}$ comme au n° précédent; tout revient alors à faire voir qu'il existe un nombre $\nu \geqslant 0$ tel que l'on ait une majoration(*)

(3.14) $$L(x\gamma) \prec \eta(x)^{-\nu} L(\gamma) \qquad \text{dans } \mathfrak{S} \times G_Q \quad ,$$

puisqu'on aura alors $E(x) \prec \eta(x)^{-\nu}$ dans $\mathfrak{S}$; et il suffit évidemment d'établir que, pour chaque i, on a une minoration de la forme

(3.15) $$\|\rho_i(x\gamma)a_i\| \succ \eta(x)^{\nu} \|\rho_i(\gamma)a_i\| \qquad \text{dans } \mathfrak{S}$$

pour un $\nu \geqslant 0$ convenablement choisi. Mais écrivant $x = k_x h_x p_x$ comme au n° précédent, on ne change pas l'ordre de grandeur du premier membre en négligeant le facteur k_x ,

---

(*) Si l'on écrit sous la forme $x = k_x h_x p_x$ un $x \in \mathfrak{S} = K.H^+_\infty(c).F$ (voir les notations page 07) on pose $\eta(x) = \eta(h_x)$; l'ambiguïté n'a aucune importance...

ou le facteur p_x, puisque k_x et p_x restent dans des compacts fixes; il suffit donc d'établir (3.15) lorsque $x \in H^+_\infty(c)$. Mais alors il y a une base rationnelle de l'espace de ρ_i par rapport à laquelle $\rho_i(x)$ est représenté par une matrice diagonale dont les termes sont les poids de la représentation, lesquels sont obtenus en ajoutant au poids dominant $n_i\Delta_i$ une combinaison linéaire à coefficients négatifs des racines simples; comme un monôme à exposants négatifs en les $\alpha_j(h)$ reste $\succ 1$ sur $H^+_\infty(c)$, on a donc

$$(3.16) \qquad \| \rho_i(x\gamma)a_i \| \succ \Delta_i(h_x)^{n_i} \| \rho_i(\gamma)a_i \| \quad \text{dans } \mathfrak{S} \text{ pour tout } \gamma ,$$

et comme on a

$$(3.17) \qquad \Delta_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} a_{ij}\alpha_j \qquad \text{avec des } a_{ij} \geqslant 0$$

on trouve aussitôt, puisque $\alpha_j(h_x) \geq \eta(h_x)$ pour tout j, la relation (3.15) avec $\nu = n_i(a_{i1} + \ldots + a_{ir})$, ce qui démontre le théorème.

Le raisonnement précédent montre manifestement que la série (3.8) satisfait à une majoration de la forme

$$(3.18) \qquad E(g) \prec \eta(g)^{-\sum \nu_i'.\mathrm{Re}(s_i)} \qquad \text{dans } \mathfrak{S} \quad ,$$

avec des $\nu_i' > 0$ ne dépendant que du système de racines de G. D'autre part, il est clair que, si la fonction $L(g)$ est partout continue et strictement positive, on a

$$(3.19) \qquad E(g) \geq L(g) \succ \prod_{i \in I} \| \rho_i(g)a_i \|^{-2s_i/n_i} \qquad \text{dans } G_A \quad ;$$

si $I = \{1,\ldots,r\}$ i.e. si $P(I)$ est minimal il est clair que, pour chaque j, il existe dans (3.17) un i tel que $a_{ij} > 0$, et l'on déduit immédiatement de là l'existence d'un nombre $\nu'' > 0$, ne dépendant que du système de racines, et tel que l'on ait

$$(3.21) \qquad E(g) \succ \eta(g)^{-\nu''\sigma} \qquad \text{dans } \mathfrak{S}$$

où $\sigma = \inf \mathrm{Re}(s_i)$.

4 - Décroissance des séries θ_φ .

On déduit de là les conséquences suivantes : pour qu'une fonction ϕ sur G_A/G_Q soit à croissance lente, il faut et il suffit qu'elle soit majorée par une série d'Eisenstein; et pour que ϕ soit à décroissance rapide il faut et il suffit que

$$(4.1) \qquad E'(g)\phi(g) \prec E''(g)$$

toutes les fois que E' et E" sont des séries d'Eisenstein associées à un sous-groupe parabolique <u>minimal</u>, et à termes continus et strictement positifs. Il va de soi que le premier membre de (4.1) est alors à décroissance rapide (donc intégrable, ce qui permet d'attacher aux fonctions à décroissance rapide des "transformées de Laplace" définies au moins dans les demi-espaces de convergence des séries d'Eisenstein).

Pour cela considérons un sous-groupe parabolique $P(I) = Z(I)U(I)$ contenant $P = ZU$, où Z est le centralisateur du tore déployé maximal H, et $Z(I)$ celui du tore $T(I)$ défini par (3.5). Il est clair que $Z(I) = T(I)M(I)$, où $M(I)$ est la composante connexe du groupe des $z \in Z(I)$ qui, dans les représentations fondamentales ρ_i $(i \in I)$, laissent fixes les vecteurs dominants a_i ; le groupe $M(I)$ est réductif sans caractères rationnels, comme G, et $T(I) \cap M(I)$ est fini. On peut parler, sur $M(I)_A/M(I)_Q$, de fonctions à décroissance rapide, et, de façon évidente, de familles de fonctions à décroissance uniformément rapide. Cela dit:

<u>Théorème</u> 4 - <u>Soit</u> φ <u>une fonction invariante par</u> $P(I)_Q U(I)_A$, <u>à support compact modulo</u> $P(I)_A^{\circ}$, <u>et telle que, lorsque</u> g <u>reste dans un compact fixe, la famille des fonctions</u> $m \longmapsto \varphi(gm)$ <u>soit à décroissance uniformément rapide sur</u> $M(I)_A/M(I)_Q$. <u>Alors la série</u>

$$(4.2) \qquad \theta_{\varphi}(g) = \sum_{G_Q/P(I)_Q} \varphi(g\gamma)$$

<u>converge et a pour somme une fonction à décroissance rapide sur</u> G_A/G_Q .

On va vérifier (4.1) en choisissant pour E' et E" des séries d'Eisenstein relatives à P, et à termes continus et strictement positifs. Tout d'abord on a

$$(4.3) \qquad E'(g)\theta_{\varphi}(g) = \sum_{G_Q/P(I)_Q} E'(g\gamma)\varphi(g\gamma) \quad ,$$

en sorte qu'il suffit de vérifier que l'on a

$$(4.4) \qquad E'(g)\varphi(g) \prec \sum_{P(I)/P} L''(g\pi) = L''_I(g) \qquad \text{dans } \mathfrak{S} \ ,$$

où L" est la fonction qui sert à définir E"; or il suffit de se placer sur le produit d'un compact par $P(I)_A^{\circ} = T(I)_A^{\circ}M(I)_A$, i.e. , compte tenu de l'invariance des deux membres, dans le produit d'un compact fixe par un domaine de Siegel de $M(I)_A$ relativement au tore déployé maximal $H \cap M(I)$ et au sous-groupe parabolique minimal $P \cap M(I)$; il reste alors, compte tenu de l'hypothèse de décroissance faite sur φ , à vérifier que les fonctions $m \longmapsto E'(gm)$ sont à croissance uniformément lente lorsque g reste dans un compact fixe, et que les fonctions $m \longmapsto L''_I(gm)$ sont des séries d'Eisenstein relatives au sous-groupe parabolique minimal $M(I)\cap P$ de $M(I)$. On applique alors (4.1) sur $M(I)_A$.

5 - Les sous-espaces $L^2_I(G_A/G_Q)$ de $L^2(G_A/G_Q)$.

Etant donné un ensemble I de racines simples, nous désignerons par $L^2_I(G_A/G_Q)$ l'adhérence dans $L^2(G_A/G_Q)$ de l'ensemble des séries

$$(5.1)\qquad \theta_\varphi(g) = \sum_{G_Q/P(I)_Q} \varphi(g\gamma)$$

où la fonction φ est assujettie à vérifier les conditions suivantes:

$(1)_I$: φ est invariante par $P(I)_Q U(I)_A$;

$(2)_I$: φ est continue et à support compact modulo $P(I)^\circ_A$;

$(3)_I$: les fonctions $m \longmapsto \varphi(gm)$ sont à décroissance uniformément rapide sur $M(I)_A/M(I)_Q$ lorsque g reste dans un compact fixe de G_A ;

$(4)_I$: la fonction φ est parabolique le long de P, i.e. la fonction $m \longmapsto \varphi(gm)$ appartient à $L^2_o(M(I)_A/M(I)_Q)$ pour tout $g \in G_A$, ou encore on a

$$(5.2)\qquad \int_{V_A/V_Q} \varphi(gv)dv = 0 \quad \text{pour tout horicycle } V \neq U(I) \text{ tel que } V \supset U(I);$$

comme un tel V est conjugué, par un élément de $P(I)_Q$, d'un horicycle standard $U(J)$ avec $J \supset I$, il suffit naturellement de vérifier (5.2) pour ces $U(J)$.

Le fait que les séries (5.1) soient dans L^2 résulte du théorème 4. Il est d'autre par évident que l'ensemble des fonctions φ satisfaisant aux conditions indiquées est stable par les translations à gauche, de sorte que les sous-espaces $L^2_I(G_A/G_Q)$ sont invariants par la représentation de G_A dans $L^2(G_A/G_Q)$.

Théorème 5 - La somme des sous-espaces $L^2_I(G_A/G_Q)$ est partout dense dans $L^2(G_A/G_Q)$.

On observera que nous n'excluons pas de ce qui précède le sous-groupe parabolique $P(I) = G$, correspondant à $I = \emptyset$; dans ce cas, les "séries" (5.1) se réduisent à un seul terme, et ce sont toutes les fonctions $\phi \in L^2_o(G_A/G_Q)$ qui sont continues et à décroissance rapide, de sorte que $L^2_\emptyset(G_A/G_Q)$ est contenu dans $L^2_o(G_A/G_Q)$ et, en vertu du théorème 2, contient $F * \phi$ pour toute $\phi \in L^2_o(G_A/G_Q)$ et toute $F \in \mathcal{D}(G_A)$; mais comme les opérateurs de convolution par des $F \in \mathcal{D}(G_A)$ permettent évidemment (dans toute représentation de G_A) d'approcher l'opérateur unité, les $F * \phi$ sont denses dans

$L^2_o(G_A/G_Q)$, d'où finalement

(5.3) $$L^2_\emptyset(G_A/G_Q) = L^2_o(G_A/G_Q)$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que toute fonction $\phi \in L^2$ orthogonale aux $L^2_I(G_A/G_Q)$ est nulle; comme il suffit évidemment de montrer que $F * \phi$ est nulle pour toute $F \in \mathcal{D}(G_A)$ on peut se borner à examiner le cas où la fonction donnée est un produit de convolution; elle est alors à croissance lente en vertu du

<u>Théorème</u> 6 - <u>Soit</u> F <u>une fonction continue à support compact sur</u> G_A ; <u>alors</u> $F * \phi$ <u>est à croissance lente pour toute</u> $\phi \in L^2(G_A/G_Q)$.

Modulo ce résultat, tout revient alors à établir le théorème suivant:

<u>Théorème</u> 7 - <u>Si une fonction continue et à croissance lente sur</u> G_A/G_Q <u>est orthogonale aux séries</u> θ_φ <u>pour tout</u> I <u>et toute fonction</u> φ <u>vérifiant les conditions</u> $(1)_I$,..., $(4)_I$, <u>alors elle est nulle</u>.

<u>Démonstration du théorème</u> 6 - On écrit que

(5.4) $$F * \phi\,(x) = \int_{G_A/G_Q} K_F(x,y)\phi(y)dy \qquad \text{où} \qquad K_F(x,y) = \sum_{G_Q} F(x\gamma y^{-1}) ,$$

et d'après Cauchy-Schwarz tout revient à montrer que l'expression

(5.5) $$\int_{G_A/G_Q} |K_F(x,y)|^2 dy = \int_{G_A} K_F(x,y)\overline{F(xy^{-1})}dy = \sum_{G_Q} F * \tilde{F}(x\gamma x^{-1})$$

est à croissance lente en x, où l'on pose $\tilde{F}(x) = \overline{F(x^{-1})}$; comme $F * \tilde{F}$ est encore continue à support compact, on est finalement ramené à évaluer la somme $\sum F(x\gamma x^{-1})$ où F est continue à support compact, et où x reste dans un domaine de Siegel

(5.6) $$\mathfrak{S} = K.H^+_\infty(c).F$$

où K est compact, où $H^+_\infty(c)$ est la partie de H^+_∞ définie par les relations $\alpha_i(h) < c$, et où F est un compact dans P^o_A ;on note H un tore déployé maximal et P un sous-groupe parabolique minimal contenant H. Posant $x = k_x h_x p_x$ comme au n° 2 il est clair que xh_x^{-1} reste dans un compact fixe, et par suite il existe dans G_A un compact fixe Ω_G (dépendant de F) tel que $F(x\gamma x^{-1}) \neq 0$ implique $h_x \gamma h_x^{-1} \in \Omega_G$; on a donc

(5.7) $$\sum F(x\gamma x^{-1}) \prec \mathrm{Card}(\Omega_G \cap h_x G_Q h_x^{-1}) \qquad \text{dans } G_A .$$

Nous pouvons donc supposer $x = h_x$ i.e. $x = h \in H^+_\infty(c)$, et pour évaluer le second membre nous utiliserons le théorème de Bruhat-Borel-Tits

$$(5.8) \qquad G_Q = \bigcup_{N(H)_Q/Z(H)_Q} U_Q(w).w.P_Q$$

où U est le radical unipotent de P, et où U(w) est le sous-groupe de U engendré par les racines $\alpha > 0$ telles que $w(\alpha) < 0$, et tout revient à compter, pour chaque w, les $\gamma = \xi w \pi \in U_Q(w).w.P_Q$ telles que $h\gamma h^{-1}$ appartienne à un compact donné. Mais en écrivant

$$(5.9) \qquad w^{-1}h\gamma h^{-1} = w^{-1}h\xi h^{-1}w.w^{-1}hwh^{-1}.h\pi h^{-1}$$

et en tenant compte du fait que $w^{-1}h\xi h^{-1}w$ reste dans le sous-groupe unipotent "opposé" à U on voit aussitôt que $h\xi h^{-1}$ et $h\pi h^{-1}$ restent dans des compacts fixes. Ecrivons maintenant $\pi = \zeta\eta$ avec $\zeta \in Z(H)_Q$ et $\eta \in U_Q$; on voit tout d'abord, puisque $h\pi h^{-1} = \zeta.h\eta h^{-1}$, que ζ reste dans un compact fixe, donc ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, indépendant du choix de h; et comme $h\xi h^{-1}$ et $h\eta h^{-1}$ restent dans des compacts fixes il reste finalement à évaluer l'entier

$$(5.10) \qquad \mathrm{Card}(\Omega_G \cap hU_Q h^{-1}) \quad .$$

Remplaçant U par son algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ grâce à l'application exponentielle, et écrivant

$$(5.11) \qquad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}(\alpha) \qquad \text{d'où} \quad \mathfrak{n}_A = \bigoplus \mathfrak{g}(\alpha)_A$$

il est clair que (5.10) a pour ordre de grandeur le produit, pour toutes les $\alpha > 0$, des nombres de $\xi \in \mathfrak{g}(\alpha)$ <u>rationnels</u> tels que $\alpha(h)\xi$ appartienne à un compact donné dans $\mathfrak{g}(\alpha)_A$, ce qui se ramène à compter, dans un vectoriel R^n , les vecteurs entiers contenus dans la boule de rayon $\alpha(h)^{-1}$, ce que tout le monde sait faire pour peu qu'on ne soit pas trop exigeant quant à la précision des mesures... Bref on trouve que

$$(5.12) \qquad \mathrm{Card}(\Omega_G \cap hU_Q h^{-1}) \prec \prod_{\alpha > 0} \alpha(h)^{-\dim \mathfrak{g}(\alpha)} \prec \eta(h)^{-\sum \dim \mathfrak{g}(\alpha)}$$

et le théorème 6 s'ensuit trivialement.

<u>Démonstration du théorème</u> 7 - Il n'y a rien à démontrer si le groupe G est anisotrope, de sorte qu'on va raisonner par récurrence sur le rang rationnel r = dim H de G. Considérons alors un sous-groupe parabolique P(I) = T(I)M(I)U(I) distinct de G et une série (5.1) relative à P(I); on a

$$(5.13) \qquad \int_{G_A/G_Q} \phi(g)\theta_\varphi(g)dg = \int_{G_A/G_Q} dg \sum_{G_Q/P(I)_Q} \phi(g\gamma)\varphi(g\gamma) = \int_{G_A/P(I)_Q} \phi(g)\varphi(g)dg$$

et cette fois le calcul formel du n° 1 est justifié parce que la série des <u>valeurs absolues</u> $\sum |\phi(g\gamma)\varphi(g\gamma)| = |\phi(g)|\,\theta_{|\varphi|}(g)$ est à décroissance rapide (donc <u>intégrable</u>) en vertu du théorème 4 appliqué à la fonction $|\varphi(g)|$ [en passant de φ à $|\varphi|$ on détruit la condition $(4)_I$, ce qui est sans importance puisqu'elle ne figure pas dans les hypothèses du théorème 4] ; ce raisonnement s'appliquerait encore si ϕ , au lieu d'être à croissance lente, était dans $L^2(G_A/G_Q)$ puisqu'alors $\sum |\phi(g\gamma)\varphi(g\gamma)| = |\phi(g)|\,\theta_{|\varphi|}(g)$ est produit de deux fonctions de carré intégrable.

Comme g est invariante par $U(I)_A$ la formule (5.13) montre encore que

$$(5.14) \qquad \int_{G_A/G_Q} \phi(g)\theta_\varphi(g)dg = \int_{G_A/P(I)_Q U(I)_A} \phi^I(g)\varphi(g)dg \qquad \text{où } \phi^I(g) = \int_{U(I)_A/U(I)_Q} \phi(gu)du.$$

Considérons maintenant un sous-groupe parabolique $P(J) \subset P(I)$ et une série

$$(5.15) \qquad \theta_\psi(g) = \sum_{G_Q/P(J)_Q} \psi(g\gamma) = \sum_{G_Q/P(I)_Q} \psi_I(g\gamma) \qquad \text{où } \psi_I(g) = \sum_{P(I)_Q/P(J)_Q} \psi(g\pi)$$

relative à $P(J)$, i.e. où ψ vérifie les conditions $(1)_J$,..., $(4)_J$; on trouve de même

$$(5.16) \qquad \int_{G_A/G_Q} \phi(g)\theta_\psi(g)dg = \int_{G_A/P(I)_Q U(I)_A} \phi^I(g)\psi_I(g)dg \quad .$$

Il est clair d'autre part que l'intégration sur $G_A/P(I)_Q U(I)_A$ passe à travers une intégration partielle sur $M(I)_A P(I)_Q U(I)_A / P(I)_Q U(I)_A = M(I)_A/M(I)_Q$, de sorte que

$$(5.17) \qquad \int_{G_A/G_Q} \phi(g)\theta_\psi(g)dg = \int_{G_A/P(I)_Q M(I)_A U(I)_A} dg \int_{M(I)_A/M(I)_Q} \phi^I(gm)\psi_I(gm)dm \quad .$$

D'autre part, il est évident que, si ψ vérifie les conditions $(1)_J$,..., $(4)_J$, il en est encore de même de la fonction obtenue en multipliant ψ par une fonction continue, invariante par $P(I)_Q M(I)_A U(I)_A$, à support compact modulo ce sous-groupe, et par ailleurs quelconque; on déduit immédiatement de là que si ϕ est orthogonale aux séries θ_ψ on a

$$(5.18) \qquad \int_{M(I)_A/M(I)_Q} \phi^I(gm)\psi_I(gm)dm = 0 \qquad \text{pour tout } g ,$$

pour tout $P(J) \subset P(I)$ et toute fonction ψ vérifiant $(1)_J$,..., $(4)_J$. Comme l'ensemble de ces fonctions ψ est invariant par les translations à gauche il suffit du reste d'écrire que l'on a

$$(5.19) \qquad \int_{M(I)_A/M(I)_Q} \phi^I(gm)\psi_I(m)dm = 0 \quad \text{pour tout } g \in G_A$$

et pour toute fonction ψ .

Mais il est clair que la fonction

$$(5.20) \qquad \psi_I(m) = \sum_{P(I)_Q/P(J)_Q} \psi(m\pi) = \sum_{M(I)_Q/M(I)_Q\cap P(J)_Q} \psi(m\mu)$$

est une série du type (5.1) pour le sous-groupe réductif $M(I)$; comme les $M(I)\cap P(J)$ sont, à conjugaison près, tous les sous-groupes paraboliques de $M(I)$, et comme on peut vérifier par des arguments triviaux que les restrictions à $M(I)_A$ des fonctions ψ qui vérifient $(1)_J$,..., $(4)_J$ sont précisément les fonctions définies sur $M(I)_A$ et vérifiant les conditions $(1)_J$,..., $(4)_J$ relativement au sous-groupe $M(I)\cap P(J)$, l'<u>hypothèse de récurrence</u> montre que (5.19) implique $\phi^I(g) = 0$.

Ce résultat s'appliquant toutes les fois que $P(I) \neq G$ on a maintenant établi que la fonction ϕ est <u>parabolique</u>. Comme elle est à croissance lente, $F * \phi$ est dans $L_0^2(G_A/G_Q) = L_\emptyset^2(G_A/G_Q)$ pour toute $F \in \mathcal{D}(G_A)$ d'après le théorème 2; mais si ϕ est orthogonale aux séries θ_φ il en est évidemment de même de $F * \phi$, de sorte qu'en particulier $F * \phi$ est orthogonale aux fonctions à décroissance rapide situées dans $L_0^2(G_A/G_Q)$, donc à tout $L_0^2(G_A/G_Q)$, donc à elle-même, donc est nulle, et comme on a $F * \phi = 0$ pour toute $F \in \mathcal{D}(G_A)$ il vient $\phi = 0$, ce qui termine la démonstration.

<u>Remarque</u> - Il est clair que les raisonnements et résultats précédents subsistent si l'on renforce, pour chaque I, la condition $(4)_I$ en imposant aux fonctions $\varphi(gm)$ de rester dans des sous-espaces vectoriels de $L_0^2(M(I)_A/M(I)_Q)$ dont la somme est partout dense dans $L_0^2(M(I)_A/M(I)_Q)$, par exemple, comme on le verra plus loin, si l'on impose à ces fonctions d'être des "formes automorphes" au sens de Harish-Chandra.

6 - <u>Produit scalaire de deux séries thêta</u>.

Il serait évidemment très agréable de pouvoir démontrer que les sous-espaces $L_I^2(G_A/G_Q)$ sont deux à deux orthogonaux, mais ce n'est pas tout à fait exact comme on va le voir.

Considérons pour cela deux sous-groupes paraboliques P' et P" de G. Choisissons des tores déployés T' et T'' tels que $P' = Z(T')U'$, $P'' = Z(T'')U''$ ou, si l'on préfère, choisissons des sous-groupes de Levi Z' et Z'' de P' et P'', et soient T' et T'' les tores déployés maximaux du centre de Z' et Z'' . Nous dirons que P' et P'' sont <u>associés</u> si T' et T'' sont conjugués par un élément de G_Q ; comme T' et T'' sont uniques à conjugaison près dans P' et P'', cette définition ne dépend réellement que de P' et P''. Il est évident que des sous-groupes paraboliques conjugués sont associés, mais la réciproque est fausse (contre-exemple : prendre dans $SL(3)$ le sous-groupe P' des matrices qui sont triangulaires supérieures dans la partition $3 = 2 + 1$, et pour P'' le sous-groupe analogue relatif à la partition $3 = 1 + 2$). Si l'on désigne par P un sous-groupe parabolique minimal et par H un tore déployé maximal dans P, on peut, modulo conjugaison, se ramener au cas où $P' = P(I)$ et $P'' = P(J)$; alors P' et P'' sont associés si et seulement si les tores

$$(6.1) \qquad T(I) = \bigcap_{k \notin I} \operatorname{Ker}(\alpha_k) \quad , \quad T(J) = \bigcap_{k \notin J} \operatorname{Ker}(\alpha_k)$$

sont conjugués dans G_Q ; mais si γ transforme $T(I)$ en $T(J)$, il transforme $Z(I)$ en $Z(J)$, donc applique H sur un tore déployé maximal de $Z(J)$, i.e. sur un conjugué de H dans $Z(J)$, et par suite on peut supposer que γ normalise H. Autrement dit, $P(I)$ et $P(J)$ sont associés si et seulement s'il existe un $w \in N(H)$ tel que $wT(J)w^{-1} = T(I)$, ce qu'on pourrait naturellement exprimer en termes de racines simples. L'ensemble des isomorphismes de $T(J) = T''$ sur $T(I) = T'$ induits par les w en question sera noté $W(T'' , T')$; il s'identifie canoniquement à $W'\backslash W/W''$, où $W = N(H)_Q/Z(H)_Q$ est le groupe de Weyl de G par rapport à H, et où W' et W'' sont les groupes de Weyl de Z' et Z'' .

<u>Théorème</u> 8 - <u>Si</u> $P(I)$ <u>et</u> $P(J)$ <u>ne sont pas associés, les sous-espaces</u> $L^2_I(G_A/G_Q)$ <u>et</u> $L^2_J(G_A/G_Q)$ <u>sont orthogonaux. Si</u> $P(I) = P'$ <u>et</u> $P(J) = P''$ <u>sont associés, le produit scalaire de deux séries thêta</u> $\theta_{\varphi'} \in L^2_I(G_A/G_Q)$ <u>et</u> $\theta_{\varphi''} \in L^2_J(G_A/G_Q)$ <u>est donné par</u>

$$(6.2) \qquad \int_{G_A/G_Q} \theta_{\varphi'}(g)\overline{\theta_{\varphi''}(g)}dg = \sum_{W(T'',T')} \int_{G_A/P'_Q U'_A \cap w(U''_A)} \varphi'(g)\overline{\varphi''(gw)}dg \quad .$$

On désigne naturellement par $U' = U(I)$ et $U'' = U(J)$ les radicaux unipotents de P' et P'' , et on pose d'une façon générale $w(N) = wNw^{-1}$ pour tout $w \in G$ et tout sous-groupe N de G.

Comme il est utile de démontrer la formule (6.2) dans un cadre plus général (par exemple pour calculer le produit scalaire d'une série thêta et d'une série d'Eisenstein) nous ne ferons sur les fonctions φ' et φ'' que les hypothèses suivantes :

(a) la fonction φ' (resp. φ'') est invariante par $P'_Q U'_A$ (resp. $P''_Q U''_A$) ;

(b) la série $\sum |\varphi'(g\gamma)|$ converge et sa somme est à croissance lente ;

(c) la série $\sum |\varphi''(g\gamma)|$ converge et sa somme est à décroissance rapide;

(d) la fonction φ' est parabolique le long de P' ;

(e) la fonction φ'' est parabolique le long de P'' .

Les hypothèses (b) et (c) suffisent évidemment pour justifier le calcul formel

$$(6.3) \qquad \int_{G_A/G_Q} \theta_{\varphi'}(g)\theta_{\varphi''}(g)dg = \int_{G_A/P'_Q} \varphi'(g)\theta_{\varphi''}(g)dg = \int_{G_A/P'_Q U'_A} \varphi'(g)\theta^{U'}_{\varphi''}(g)dg$$

(on "oublie" les signes $\overline{}$ pour faciliter le travail du dactylographe), et tout revient par conséquent à calculer

$$(6.4) \qquad \theta^{U'}_{\varphi''}(g) = \int_{U'_Q/U'_A} du' \sum_{G_Q/P''_Q} \varphi''(gu'\gamma) \quad ,$$

ce qu'on va faire en utilisant le théorème de Bruhat (Borel-Tits, p.102), à savoir que

$$(6.5) \qquad G_Q = \bigcup_{W'\backslash W/W''} P'_Q w P''_Q = \bigcup_{W'\backslash W/W''} \bigcup_{P'_Q/P'_Q\cap w(P''_Q)} \pi' w P''_Q \quad ;$$

mais si l'on écrit $P' = T'M'U'$ il est clair que $P'\cap w(P'')$ est produit de S' , de $M'\cap w(P'')$ et de $U'\cap w(P'')$, d'où, par des calculs triviaux,

$$(6.6) \qquad \theta^{U'}_{\varphi''}(g) = \sum_{W'\backslash W/W''} \ \sum_{M'_Q/M'_Q\cap w(P''_Q)} \ \int_{U'_A/U'_A\cap w(P''_A)} \varphi''(g\mu' u' w)du' \quad .$$

Le terme général s'écrit encore sous la forme

$$(6.7) \qquad \int_{w^{-1}(U'_A)/w^{-1}(U'_A)\cap P''_Q} \varphi''(g\mu' wx)dx \quad ,$$

et comme l'intersection de $w^{-1}(U')$ avec P'' est produit semi-direct de ses intersections avec M'' et U'' il est clair que (6.7) comporte une intégration partielle sur le quotient $w^{-1}(U'_A)\cap M''_A/w^{-1}(U'_Q)\cap M''_Q$; or $w^{-1}(U')\cap M''$ est un horicycle de M'' ; <u>si φ'' est parabolique le long de</u> P'' , ce que nous avons supposé ci-dessus en (e), l'intégrale (6.7) est nulle sauf si l'on a

$$(6.8) \qquad w^{-1}(U')\cap M'' = e \quad , \text{ i.e. } \ w(T'')\supset T'$$

comme on le voit facilement. Ceci suppose à tout le moins $\dim(T'')\geqslant \dim(T')$, et par suite on voit que

(6.9) $\quad \theta^{U'}_{\varphi''}(g) = 0$ si $rg(P') > rg(P'')$ et si φ'' est parabolique le long de P'' ;

il est évidemment inutile de supposer (c) ici, il suffit de savoir que la série $\theta_{\varphi''}$ converge normalement sur tout compact pour justifier les calculs formels (cas des séries d'Eisenstein par exemple - on obtient alors des conditions suffisantes de convergence des intégrales (6.7) pour les fonctions du type considéré au n° 3). D'autre part, si $rg(P') = rg(P'')$, la relation $w(T'') \supset T'$ suppose évidemment que w induit un isomorphisme de T'' sur T' , ce qui ne peut se produire que si P' et P'' sont associés. Par suite

(6.10) $\quad \theta^{U'}_{\varphi''}(g) = 0$ si φ'' est parabolique le long de P'' , si $rg(P') = rg(P'')$, et si P' et P'' ne sont pas associés.

Enfin, si P' et P'' sont associés, il ne reste dans (6.6) que les termes pour lesquels $w(T'') = T'$, auquel cas la sommation intermédiaire disparait, et il reste alors

(6.11) $$\theta^{U'}_{\varphi''}(g) = \sum_{W(T'',\, T')} \int_{U'_A/U'_A \cap w(U''_A)} \varphi''(gu'w)du' \qquad \text{si P' et P'' sont associés.}$$

La formule (6.2) à démontrer résulte aussitôt de là.

Quant à l'orthogonalité des deux séries thêta lorsque P' et P'' ne sont pas associés, on l'obtient en écrivant que

(6.12) $$\int_{G_A/G_Q} \theta_{\varphi'}(g)\theta_{\varphi''}(g)dg = \int_{G_A/P'_QU'_A} \varphi'(g)\theta^{U'}_{\varphi''}(g)dg = \int_{G_A/P''_QU''_A} \theta^{U''}_{\varphi'}(g)\varphi''(g)dg \quad ;$$

si P' et P'' ne sont pas associés, alors, modulo les hypothèses (d) et (e) ci-dessus, on a $\theta^{U'}_{\varphi''}(g) = 0$ si $rg(P') \geqslant rg(P'')$ d'après (6.9) et (6.10), tandis que si $rg(P'') \geqslant rg(P')$ le même raisonnement montre que $\theta^{U''}_{\varphi'}(g) = 0$, d'où le théorème.

Le terme général de (6.11) est évidemment une fonction invariante par $P'_QU'_A = Z'_QU'_A$, et nous allons voir qu'il est en outre <u>parabolique le long de</u> P' , autrement dit qu'on a la relation

(6.13) $$\int_{V'_A/V'_Q} dv' \int_{U'_A/U'_A \cap w(U''_A)} \varphi''(gv'u'w)du' = 0$$

pour tout horicycle $V' \neq \{e\}$ de M' ; on suppose naturellement φ'' parabolique le long de P", et P' et P" associés. Comme w applique T" sur T' et donc M" sur M' , il suffit évidemment de montrer que l'on a

$$\int_{V''_A/V''_Q} dv'' \int_{w^{-1}(U'_A)/w^{-1}(U'_A)\cap U''_A} \varphi''(gv''x)dx = 0 \tag{6.14}$$

pour tout horicycle $V'' \neq \{e\}$ de M" . Mais il est clair que $w^{-1}(U')$, comme U", est le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de G contenant M" , de sorte que $w^{-1}(U')$ et $w^{-1}(U')\cap U''$ sont normalisés par les éléments de V" . L'intégrale (6.14) s'écrit donc

$$\int_{w^{-1}(U'_A)/w^{-1}(U'_A)\cap U''_A} dx \int_{V''_A/V''_Q} \varphi''(gxv'')dv'' = 0 \quad , \tag{6.15}$$

et est nulle puisque l'on a par hypothèse

$$\int_{V''_A/V''_Q} \varphi''(gv'')dv'' = 0 \tag{6.16}$$

pour tout horicycle $V'' \neq \{e\}$ de M", cqfd.

Dans le cas où P' = P" = P, sous-groupe parabolique minimal de G (il est clair que, pour les sous-groupes paraboliques minimaux, être "associés" signifie être "conjugués" , i.e. est une condition vide), la sommation dans (6.2) est étendu au groupe de Weyl W de G par rapport au tore décomposé maximal H, et la condition que φ' ou φ'' soit parabolique, ou à croissante lente, ou à décroissance rapide, le long de P est toujours trivialement vérifiée. La formule (6.11) conduit alors, dans ce cas, à associer à chaque $w \in W$ l'opération qui transforme une fonction φ continue à support compact modulo P_QU_A en la fonction

$$M_w\,\varphi(g) = \int_{U_A/U_A\cap w(U_A)} \varphi(guw)du \quad ,$$

laquelle n'est malheureusement plus à support compact modulo P_QU_A; on aurait très envie de montrer que $M_{w'w''} = M_{w'}M_{w''}$, mais on se heurte à des difficultés de convergence des intégrales qu'il ne semble pas possible de surmonter trivialement. On trouvera dans les §§ 5 et 6 du chapitre III de 4 des considérations sur ce genre de questions, considération qui, malheureusement, reposent sur une définition des fonctions "de Schwartz-Bruhat" mod P_QU_A qu'on ne trouve pas dans 4 - sauf pour le groupe SL(2), auquel cas il est faux que la série θ_φ soit dans $L^2(G_A/G_Q)$ si l'on n'impose pas à φ de condition supplémentaire (voir p. 398 de 4 , ou bien p. 25 de 6). On se trouve donc ici sur un terrain glissant où il est indispensable de faire preuve d'une grande prudence si l'on désire éviter les accidents.

7 - Effet d'une transformation de Laplace.

Si l'on attache à chaque classe de sous-groupes paraboliques deux à deux associés le sous-espace de $L^2(G_A/G_Q)$ engendré par la somme des $L^2_I(G_A/G_Q)$ pour les I tels que P(I) appartienne à la classe donnée, on obtient une décomposition de $L^2(G_A/G_Q)$ en somme directe finie de sous-espaces invariants deux à deux orthogonaux d'après le théorème 8. Il reste alors (sic) à décomposer chacun de ces sous-espaces en composantes irréductibles, ou aussi peu réductibles que possible. Le premier pas dans cette voie est d'effectuer, dans (6.3), une transformation de Laplace par rapport à T' = T(I). Pour cela, partons plus généralement de la formule triviale

$$(7.1) \qquad \int_{G_A/G_Q} \theta_{\varphi'}(g)\overline{\phi(g)}dg = \int_{G_A/P'_QU'_A} \varphi'(g)\overline{\phi^{U'}(g)}dg$$

valable dès que la série $\sum|\varphi'(g)|$ est à croissance lente, et la fonction ϕ à décroissance rapide sur G_A/G_Q . En utilisant les formules sempiternelles d'intégration dans les espaces homogènes on trouve évidemment que

$$(7.2) \qquad \langle\theta_{\varphi'}, \phi\rangle = \oint_{G_A/T'_AM'_QU'_A} dg \int_{T'_A/T'_Q} \varphi'(gt')\overline{\phi^{U'}(gt')}\langle t', 2\rho\rangle d^*t'$$

où 2ρ désigne la somme des racines positives (laquelle, sur T', se réduit à la somme des $\alpha \in U'$), et où le symbole $\oint dg$ désigne la soit-disant mesure invariante d'un espace homogène qui n'en admet pas (voir 6 , note au bas de la page 14) ; enfin, dans cette formule, et étant donné un caractère λ de T'_A , à valeurs dans C^* , lequel peut par exemple, comme c'est le cas en l'occurence, provenir de façon évidente d'un caractère rationnel du tore T', on écrit $\langle t', \lambda\rangle$ ce qu'on note ailleurs $\lambda(t')$, ou t'^{λ} , pour faciliter la typographie. Ceci fait, l'intégrale intermédiaire, dans (7.2), peut encore s'écrire sous la forme

$$(7.3) \qquad \int \varphi'(gt')\langle t', \rho+\sigma\rangle \overline{\phi^{U'}(gt')\langle t', \rho-\sigma\rangle} d^*t'$$

pour tout homomorphisme continu $\sigma : T'_A/T'_Q \longrightarrow R^*_+$ (caractères "réels" de T'_A/T'_Q), et il reste à effectuer une transformation de Fourier sur T'_A/T'_Q , en utilisant les caractères de module 1 de ce groupe. On est ainsi conduit, pour tout caractère complexe λ'

de T'_A/T'_Q ("Grössencharakter" de T'), à introduire les fonctions

$$(7.4) \qquad L_{\varphi'}(g, \lambda') = \int_{T'_A/T'_Q} \varphi'(gt')\langle t', \rho+\lambda'\rangle d^*t' \quad ,$$

$$(7.5) \qquad L_{\phi}^{U'}(g, \lambda') = \int_{T'_A/T'_Q} \phi^{U'}(gt')\langle t', \rho-\lambda'\rangle d^*t' \quad ,$$

à supposer qu'elles existent; en transformant (7.3) à l'aide de la formule de Plancherel sur T'_A/T'_Q et en permutant dans (7.2) l'ordre des intégrations on trouve aussitôt que

$$(7.6) \qquad \langle \theta_{\varphi'}, \phi\rangle = \int_{\mathrm{Re}(\lambda')=\sigma} d\lambda' \int_{G_A/T'_AM'_QU'_A} L_{\varphi'}(g,\lambda')\overline{L_{\phi}^{U'}(g, \overline{\lambda'})}dg \quad .$$

Il reste à justifier ces calculs, et à les expliciter dans la situation (6.3). Si φ' satisfait aux hypothèses du théorème 4 et est C^∞ comme fonction de t', il est clair que (7.4) converge toujours, est une fonction analytique entière de λ' (pour la structure complexe évidente sur l'ensemble des caractères de T'_A/T'_Q - voir la thèse de Tate...) à décroissance rapide dans toute bande verticale, et qu'on peut appliquer à (7.4), sans précautions, la formule d'inversion de Laplace. Pour (7.5), nous allons voir que, si ϕ est à décroissance rapide, il y a convergence pour les λ' tels que $\mathrm{Re}(\lambda')$ appartienne (modulo la translation ρ, qu'on a effectuée subrepticement pour ménager une transition insensible vers les yogas de Langlands et de Harish-Chandra) au domaine de convergence des <u>séries d'Eisenstein</u>, donné par le théorème 3. En effet soit $L(g)$ une fonction sur $G_A/P'_QU'_A$ vérifiant la relation

$$(7.7) \qquad L(gt') = L(g)\langle t', -\rho-\lambda'\rangle \ ,$$

et formons, en supposant qu'elle converge absolument, la série d'Eisenstein

$$(7.8) \qquad E(g) = \sum_{G_Q/P'_Q} L(g\gamma) \quad ;$$

elle est à croissance lente, la fonction ϕ est à décroissance rapide, on a donc évidemment une relation

$$(7.9) \qquad \int_{G_A/G_Q} E(g)\phi(g)dg = \int_{G_A/P'_QU'_A} L(g)\phi^{U'}(g)dg = \oint_{G_A/T'_AP'_QU'_A} dg \int_{T'_A/T'_Q} L(gt')\phi^{U'}(gt')\langle t', 2\rho\rangle d^*t'$$

$$= \oint_{G_A/T'_AM'_QU'_A} L(g)dg \int_{T'_A/T'_Q} \phi^{U'}(gt')\langle t', \rho-\lambda'\rangle d^*t' \quad ;$$

on en conclut comme annoncé que l'intégrale (7.5) converge au minimum en même temps que les séries du type (7.8), et qu'on a au surplus, dans ce cas,

$$(7.10)\qquad \int_{G_A/G_Q} E(g)\phi(g)dg = \int_{G_A/T'_A M'_Q U'_A} L(g)L_{\phi}^{U'}(g\ ,\lambda')dg \quad .$$

La formule (7.6) s'applique en particulier, dans le domaine de convergence des séries d'Eisenstein, lorsque $\phi = \theta_{\varphi''}$ où l'on suppose maintenant que φ' et φ'' satisfont aux hypothèses du théorème 4 relativement à P' et P" , et sont C^∞ par rapport à t' et t" respectivement.

$$\int_{T'_A/T'_Q} \theta_{\varphi''}^{U'}(gt')\langle t'\ ,\rho-\lambda'\rangle d^*t' = \sum_{W(T'',T')} \iint_{T'_A U'_A/T'_Q U'_A \cap w(U''_A)} \varphi''(gt'u'w)\langle t',\rho-\lambda'\rangle d^*t'du'$$

$$(7.11)\qquad = \sum_{W(T'',T')} \int_{U'_A/U'_A \cap w(U''_A)} L_{\varphi''}(gu'w, -w^{-1}(\lambda'))du' \quad .$$

On le voit comme suit. Tout d'abord on effectue au second membre le changement de variable $u' \mapsto t'^{-1}u't'$; cela introduit un jacobien opposé au déterminant de ad(t') dans l'algèbre de Lie de $U'/U'\cap w(U'')$, i.e. égal (au signe près si l'on note additivement les caractères) à la somme des racines $\alpha \in U'$ telles que $w^{-1}(\alpha) \notin U''$; mais si $w^{-1}(\alpha) \notin U''$ on a soit $w^{-1}(\alpha) \in M''$, ce qui est impossible car alors α serait dans $w(M'') = M'$, soit $w^{-1}(\alpha) < 0$; inversement il est clair que la relation $w^{-1}(\alpha) < 0$ implique $w^{-1}(\alpha) \notin U''$; le jacobien à calculer est donc formé de la somme des racines α telles que $\alpha \in U'$ et $w^{-1}(\alpha) < 0$; comme d'ailleurs les autres racines positives sont nulles sur T' , le jacobien cherché est égal à

$$(7.12)\qquad \sum_{\alpha > 0\ ,\ w^{-1}(\alpha) < 0} \alpha = \rho - w(\rho) \quad .$$

Ceci fait, on effectue le changement de variable t'w = wt" , qui remplace T' par T", et on trouve aussitôt (7.11).

En conclusion, on voit que, si φ'(resp. φ'') est invariante par $P'_Q U'_A$ (resp. $P''_Q U''_A$), parabolique le long de P' (resp. P"), C^∞ relativement à T' (resp. T"), et à support compact modulo $P'^{\,0}_A$ (resp. $P''^{\,0}_A$), et si les hypothèses du théorème 4 sont vérifiées de façon que les séries $\sum|\varphi'(g\gamma)|$ et $\sum|\varphi''(g\gamma)|$ soient à décroissance rapide, alors on a la relation

$$(7.13)\quad \langle \theta_{\varphi'}, \theta_{\varphi''}\rangle = \sum_{W(T'',T')} \int_{\mathrm{Re}(\lambda') = \sigma} d\lambda' \int_{G_A/T'_A M'_Q U'_A} L_{\varphi'}(g,\lambda')dg \int_{U'_A/U'_A \cap w(U''_A)} \overline{L_{\varphi''}(gu'w\,,\, -w^{-1}(\overline{\lambda'}))du'}$$

pourvu que σ se trouve dans le domaine de convergence des séries d'Eisenstein relatives à P'. Voir la relation (7.2) de 6 . Si, dans cette formule, on pouvait supposer $\mathrm{Re}(\lambda') = \sigma = C$, les fonctions $L_{\varphi'}(g, \lambda')$ et $\int L_{\varphi''}(gu'w, -w^{-1}(\lambda'))du'$ appartiendraient à l'espace de la représentation unitaire de G_A induite par la représentation unitaire de $P'_A = T'_A M'_A U'_A$ obtenue en faisant opérer ce groupe sur $L^2_o(M'_A/M'_Q)$ de la façon évidente : U'_A opère trivialement, M'_A opère par les translations à gauche, et T'_A opère par le caractère λ' ; les représentations de G_A obtenues de cette façon généralisent les "séries principales" de Gelfand et Naimark, et ont tendance à être irréductibles comme l'a démontré Bruhat, modulo bien entendu une décomposition préalable de $L^2_o(M'_A/M'_Q)$.

Le problème de prolongement analytique qu'on rencontre ici est directement lié à celui des séries d'Eisenstein. Remplaçons en effet φ' et P' par φ'' et P'' dans (7.4) : on trouve

$$(7.14)\qquad L_{\varphi''}(g,\lambda'') = \int_{T''_A/T''_Q} \varphi''(gt'')\langle t'', \rho+\lambda''\rangle d^*t'' \qquad ;$$

à l'aide de cette fonction, on peut construire une série d'Eisenstein

$$(7.15)\qquad E_{\varphi''}(g,\lambda'') = \sum_{G_Q/P''_Q} L_{\varphi''}(g\gamma, \lambda'') \qquad ,$$

qui converge dans le domaine indiqué par le théorème 3. On peut lui appliquer la formule (6.11), d'où

$$(7.16)\qquad E^{U'}_{\varphi''}(g,\lambda'') = \sum_{W(T'',T')} \int_{U'_A/U'_A\cap w(U''_A)} L_{\varphi''}(gu'w,\lambda'')du' \quad :$$

on retrouve les intégrales figurant au second membre de (7.13), pour $\lambda'' = -w^{-1}(\lambda')$. Il est donc clair que le prolongement analytique par rapport à λ'' des séries (7.15) impliquerait automatiquement le prolongement analytique de ces intégrales. Il est facile (i.e. pas <u>très</u> difficile) de voir qu'inversement, pour les fonctions φ'' particulières que nous allons définir ci-dessous, le prolongement analytique de (7.16) suffirait à effectuer celui des séries (7.15) elles-mêmes.

Les fonctions φ'' pour lesquelles Langlands parvient à effectuer le prolongement analytique sont les suivantes. On observe tout d'abord que (théorème 1) $L^2_o(M''_A/M''_Q)$ est somme directe hilbertienne de sous-espaces invariants fermés irréductibles; dans chacun de ces sous-espaces, le centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m}'')$ de l'algèbre enveloppante universelle (sur C) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}''$ de M" opère scalairement, de sorte qu'une telle composante irréductible définit un homomorphisme $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m}'') \longrightarrow C$. D'autre part, chaque élément de G_Q normalisant M" induit de façon évidente aussi bien un automorphisme de $L^2(M''_A/M''_Q)$ que de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m}'')$: on dira alors qu'un sous-espace invariant fermé V de $L^2(M''_A/M''_Q)$ est <u>admissible</u> s'il est stable par le normalisateur de M" - i.e. par ce qui induit le sous-groupe W(T",T") du groupe de Weyl - et si les homomorphismes $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m}'') \longrightarrow C$ qui interviennent dans sa décomposition sont en nombre <u>fini</u>. Ceci fait, on choisit dans G_A un sous-groupe compact "presque maximal" K (prendre $K = \prod K_p$, où K_∞ est un sous-groupe compact maximal de G "adapté à P", et où K_p, pour p fini, est le stabilisateur dans G_p d'un réseau rationnel) et on observe, d'une part que $G_A = \bigcup K.g_i.P_A$ avec un nombre <u>fini</u> de g_i (compacité de G_A/P_A), d'autre part que $K \cap M''_A$ est un sous-groupe compact "presque maximal" de M''_A ; on déduit immédiatement de là que, si $k \longmapsto \mathcal{V}(k)$ est une représentation de dimension finie de K, et si V est un sous-espace admissible de $L^2_o(M''_A/M''_Q)$, la composante isotypique de type $\mathcal{V}$ de V (obtenue en faisant opérer, par les translations à gauche, $K \cap M''_A$ sur V) est de dimension finie. Les fonctions φ'' pour lesquelles on peut effectuer le prolongement analytique sont alors celles qui vérifient les conditions suivantes : les fonctions $m'' \longmapsto \varphi''(gm'')$ appartiennent à un sous-espace admissible donné V de $L^2_o(M''_A/M''_Q)$; on a $\varphi''(kg) = \mathcal{V}(k)\varphi''(g)$ pour tout $k \in K$; enfin, φ'' est à support compact modulo P''°_A ou, ce qui revient au même, modulo $T''_Q M''_A U''_A$, et pour tout $g \in G_A$ l'expression $\varphi(gt'')$ est C^∞ sur le tore réel T''^{+}_∞. Pour ces fonctions, les séries d'Eisenstein (7.15) se prolongent analytiquement en des fonctions méromorphes dont les singularités ne dépendent que du choix de $\mathcal{V}$ et de V; et on a une équation fonctionnelle que l'on peut exprimer en écrivant que, pour $w \in W(T'',T')$, on a la relation

$$(7.17) \qquad \sum_{G_Q/P'_Q} \int_{U'_A/U'_A \cap w(U''_A)} L_{\varphi''}(g\gamma u'w, \lambda'')du' = E_{\varphi''}(g, \lambda'')$$

on aura soin de faire attention au fait que les valeurs de λ'' pour lesquelles le premier membre a un sens n'ont aucune chance de rendre convergente la série (7.15) qui définit le second membre; la relation (7.17) suppose donc qu'on a d'abord effectué le prolongement analytique des séries d'Eisenstein! On laisse au lecteur le soin d'écrire sous cette forme l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein dans le cas du groupe SL(2), que l'on trouvera dans 6 , relations (3.10) et (3.15).

Comme nous l'avons dit au début, il serait intéressant de poursuivre cet exposé en indiquant les méthodes utilisées pour établir la relation (7.17), et pour en déduire (ce qui demande encore beaucoup de travail) la décomposition spectrale de $L^2(G_A/G_Q)$. Comme les quatre-vingt dix minutes dont dispose le conférencier sont, maintenant, sur le point d'être épuisées, et comme il n'a pas encore suffisamment compris certains aspects de la théorie de Langlands pour être vraiment en mesure de tout exposer, il lui semble préférable de remettre la suite à plus tard.

BIBLIOGRAPHIE

1 A. BOREL et J. TITS , Groupes réductifs (Publications de l'IHES, n° 27, 1965).

2 L.D. FADDEEV , Razlojenie po sobstvennim funktiam operatora Laplaca na fundamental'noi oblasti disktretnoi gruppi na ploskosti Lobatchevskogo (à paraître aux Izvestiia Akad. Nauk)

3 I.M. GEL'FAND et I.I. PIATECKIJ-SAPIRO , Unitarnie predstavlenia v prostranstve G/Γ , gde G - gruppa vechestvennix matrits n-go poriadka, Γ - podgruppa tselotchislennix matrits (DAN 147, 1962, p. 275 - 278)

4 I.M. GEL'FAND , M.I. GRAEV et I.I. PIATECKIJ-SAPIRO , Obobchennie Funktsii , tome VI (Moscou, 1966)

5 R. GODEMENT , Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques (Séminaire Bourbaki n° 257, mai 1963).

6 R. GODEMENT , Analyse spectrale des fonctions modulaires (Séminaire Bourbaki, n° 278, décembre 1964, révisé en mars 1966).

7 R. GODEMENT , The decomposition of $L^2(G/\Gamma)$ for $\Gamma = SL(2,Z)$ (Proceedings of the Boulder Institute on Algebraic groups and discontinuous subgroups, AMS , 1966 , p. 211 - 224).

8 R. GODEMENT , The spectral decomposition of cusp-forms (id, p. 225 - 234)

9 HARISH-CHANDRA , Automorphic forms on a semi-simple Lie group (Proc. Nat. Acad. Sci. USA , 45 , 1959, p. 570-573)

10 R.P. LANGLANDS , On the functional equations satisfied by Eisenstein series (non publié).

11 R.P. LANGLANDS , Eisenstein series (Proceedings of the Boulder Institute, p. 235 - 252).

12 H. MAAS , Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen... (Math. Annalen, 121 , 1949, p. 141-183)

13 W. ROELCKE, Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene (Math. Annalen, 167 , 1966, p. 292 - 337 et 168 , 1967 , p. 261 - 324)

14 A. SELBERG, Harmonic analysis and discontinuous groups (J. Indian Math. Soc., 20 , 1956, p. 47-87)

15 A. SELBERG, Discontinuous groups and harmonic analysis (Proceedings of the international Congress, Stokholm , 1962 , p. 177 - 189)

1 bis A. BOREL , Introduction to automorphic forms (Proceedings of the Boulder Institute, p. 199 - 210) .