ADRIEN DOUADY

Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 277, p. 7-13
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__7_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 277

Décembre 1964

LE PROBLÈME DES MODULES POUR LES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

par Adrien DOUADY

(d'après Masatake KURANISHI [2])

A partir du n° 3, on utilisera constamment la notion, désormais familière, de variété banachique, ainsi que celle d'espace $\underset{\sim}{C}$-analytique banachique.

Si U est un ouvert d'un espace de Banach E, et θ une application $\underset{\sim}{C}$-analytique de U dans un espace de Banach F, les fonctions $\underset{\sim}{C}$-analytiques h sur un ouvert de U à valeurs dans $\underset{\sim}{C}$ de la forme $h(u) = \langle \theta(u) , f(u) \rangle$, où f est une application $\underset{\sim}{C}$-analytique à valeurs dans le dual F' de F, forment un idéal $\mathfrak{J}$ du faisceau $\mathcal{O}(U)$. On munit $X = \theta^{-1}(0)$ du faisceau $\mathcal{O}/\mathfrak{J}$. Pour les besoins de cet exposé, il suffit de définir un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique banachique comme un espace annelé localement isomorphe à un modèle de ce type.

1. La variété des structures complexes sur un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$ sur $\underset{\sim}{R}$. Pour toute structure complexe φ sur E, il existe une application $\underset{\sim}{C}$-linéaire, et une seule, de $\underset{\sim}{C} \otimes E$ dans (E , φ) prolongeant l'identité ; son noyau K_φ est un sous-espace vectoriel complexe de $\underset{\sim}{C} \otimes E$. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble $\Psi(E)$ des structures complexes sur E sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes K de $\underset{\sim}{C} \otimes E$ tels que $\underset{\sim}{C} \otimes E = K \oplus \bar{K}$. Ainsi $\Psi(E)$ s'identifie à un ouvert de la grassmannienne de $\underset{\sim}{C} \otimes E$, et à ce titre est muni d'une structure de variété analytique complexe.

Soit φ_o une structure complexe sur E ; posons $K_o = K_{\varphi_o}$. Pour toute structure complexe φ suffisamment voisine de φ_o, K_φ est le graphe d'une application $\underset{\sim}{C}$-linéaire u_φ de K_o dans $\bar{K}_o$. La projection p'' (resp. p') de E sur $\bar{K}_o$ (resp. K_o) est un isomorphisme (resp. un antiisomorphisme) pour φ_o. A φ correspond donc une application C-antilinéaire $\omega_\varphi = p''^{-1} \circ u_\varphi \circ p'$ de (E , φ_o) dans lui-même, et la correspondance $\varphi \mapsto \omega_\varphi$ est la carte de $\Psi(E)$ définie par φ_o.

L'application identique $(E , \varphi_o) \to (E , \varphi)$, qui est $\underset{\sim}{R}$-linéaire, se met sous la forme $f' + f''$, où f' est $\underset{\sim}{C}$-linéaire et f'' est $\underset{\sim}{C}$-antilinéaire. On a alors $\omega_\varphi = f'^{-1} \circ f''$.

2. Un Frobenius complexe relatif.

Soit $V_0 = (V , \varphi_0)$ une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique compacte, V étant la variété $\underset{\sim}{R}$-analytique sous-jacente et φ_0 sa structure complexe. En considérant pour chaque point x de V la carte de $\Psi(T_x(V))$ définie par $\varphi_0(x)$, on associe, à toute structure presque complexe $\underset{\sim}{R}$-analytique ψ sur V assez voisine de φ_0 au sens C^1, un morphisme $\underset{\sim}{R}$-analytique $\underset{\sim}{C}$-antilinéaire du fibré tangent $T(V_0)$ dans lui-même, i. e. une forme ω_ψ de type $(0 , 1)$ à valeurs dans $T(V_0)$. Pour que ψ soit intégrable, il faut et il suffit que $\omega = \omega_\psi$ vérifie $d''\omega - [\omega , \omega] = 0$ [1]. Ceci entraîne que ψ est sous-jacente à une structure $\underset{\sim}{C}$-analytique et une seule (voir par exemple [3], p. 36).

Considérons l'ensemble $\Psi(V)$ des couples (x , ψ), où $x \in V$ et $\psi \in \Psi(T_x(V))$; c'est une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique au-dessus de V (i. e. une variété $\underset{\sim}{R}$-analytique munie d'une submersion sur V et d'une structure $\underset{\sim}{C}$-analytique sur les fibres). Si S est un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique, $S \times V$ est un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique au-dessus de V. On appellera <u>structure presque complexe</u> <u>$\underset{\sim}{R}$-analytique sur</u> V, <u>paramétrée par</u> S, un morphisme $\underset{\sim}{R}$-analytique, $\underset{\sim}{C}$-analytique sur les fibres, d'espaces $\underset{\sim}{C}$-analytiques au-dessus de V : $S \times V \to \Psi(V)$. On définit de même les formes de type (p , q) à valeurs dans $T(V_0)$ paramétrées par S. On peut définir les opérations d'' et $[\ , \ ]$ sur les formes paramétrées par S. Une structure presque complexe ψ sur V paramétrée par S sera dite intégrable si la forme $\omega = \omega_\psi$ paramétrée par S correspondante vérifie $d''\omega - [\omega , \omega] = 0$.

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> ψ <u>une structure presque complexe</u> <u>$\underset{\sim}{R}$-analytique sur</u> V <u>paramétrée par</u> S <u>intégrable. Alors</u> ψ <u>est sous-jacente à une structure</u> <u>$\underset{\sim}{C}$-analytique et une seule sur</u> $S \times V$, <u>qu'on notera encore</u> ψ. <u>En posant</u> $X = (S \times V , \psi)$, <u>la projection</u> $X \to S$ <u>est un morphisme lisse, et pour tout</u> $x \in X$, $S \times \{x\}$ <u>est un sous-espace</u> <u>$\underset{\sim}{C}$-analytique de</u> X.

La démonstration est analogue à celle de [3] (1).

3. Variétés d'applications.

Soient M une variété compacte de classe C^r, et V une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique. L'ensemble $C^r(M ; V)$ des applications de classe C^r de M dans V est muni d'une structure de variété $\underset{\sim}{C}$-analytique banachique, et $T_f\, C^r(M ; V)$ s'identifie

---

(1) Il n'y a pas de difficulté parce qu'on a supposé ψ $\underset{\sim}{R}$-analytique. Il serait beaucoup plus délicat d'introduire des paramètres dans la démonstration de NIRENBERG dans le cas C^∞.

à l'espace de Banach des sections de classe C^r du fibré $f^*T(V)$ sur M.

Plus généralement, soient S un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique et X un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique lisse au-dessus de S. L'ensemble $C^r(M ; X)$ des applications de classe C^r de M dans une fibre de X est un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique banachique simple au-dessus de S, c'est-à-dire que tout point $f : M \to X_s$ a un voisinage qui est S-isomorphe au produit d'un voisinage de s dans S par un ouvert d'un espace de Banach.

D'autre part, si E est une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique au-dessus de M, l'ensemble des sections de classe C^r de E est muni d'une structure de variété $\underset{\sim}{C}$-analytique banachique. En particulier, si M est une variété de classe C^{r+1}, l'ensemble $\Psi^r(M)$ des structures presque complexes de classe C^r sur M est une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique banachique.

Avec les notations ci-dessus, l'ensemble $\mathrm{Diff}^{r+1}(M ; X)$ des difféomorphismes de classe C^{r+1} de M sur une fibre de X est un ouvert de $C^{r+1}(M ; X)$, et on a un morphisme $\underset{\sim}{C}$-analytique de $\mathrm{Diff}^{r+1}(M ; X)$ dans $\Psi^r(M)$ qui à $f : M \to X_s$ associe $f^*(\varphi_s)$, où φ_s est la structure complexe de X_s.

Ces considérations s'appliquent au cas $r = k + \alpha$ non entier [1]. On pourrait aussi utiliser les applications de classe $\mathcal{H}^s$ avec s suffisamment grand.

4. Etude locale de $\Phi^r(V)$.

Soit, comme au n° 2, $V_o = (V , \varphi_o)$ une variété $\underset{\sim}{C}$-analytique compacte. On notera ${}^r\Omega^{p,q}$ l'espace de Banach des formes de type (p , q) de classe C^r sur V_o à valeurs dans le fibré tangent $T(V_o)$. La carte définie par φ_o représente un voisinage de φ_o dans $\Psi^r(V)$ sur un voisinage de 0 dans ${}^r\Omega^{0,1}$.

L'espace $\underset{\sim}{C}$-analytique banachique $\Phi^r(V)$ des structures intégrables est défini dans cette carte par l'équation $\theta(\omega) = 0$, où $\theta : {}^r\Omega^{0,1} \to {}^{r-1}\Omega^{0,2}$ est l'application analytique définie par $\theta(\omega) = d''\omega - [\omega , \omega]$. L'application tangente à θ est $d'' = d''_1$. Si $r > 1$ est non entier, ce que nous supposerons désormais,

$$d''_o : {}^{r+1}\Omega^{0,0} \to {}^r\Omega^{0,1} \qquad \text{et} \qquad d''_1 : {}^r\Omega^{0,1} \to {}^{r-1}\Omega^{0,2}$$

sont des homomorphismes d'image fermée. Munissons V_o d'une structure hermitienne $\underset{\sim}{R}$-analytique, et notons δ'_1 et δ'_2 les adjoints de d''_o et d''_1 par rapport à cette métrique. On a alors

$${}^r\Omega^{0,1} = \mathrm{Im}\, d''_o \oplus \mathrm{Ker}\, \delta'_1 \qquad \text{et} \qquad {}^{r+1}\Omega^{0,2} = \mathrm{Im}\, d''_1 \oplus \mathrm{Ker}\, \delta'_2 .$$

Posons $\Sigma = \theta^{-1}(\mathrm{Ker}\ \delta_2')$. Le théorème des fonctions implicites montre que, au voisinage de 0, Σ est une sous-variété banachique $\underset{\sim}{C}$-analytique de ${}^r\Omega^{0,1}$ contenant $\Phi^r(V)$, et $T_0(\Sigma) = \mathrm{Ker}\ d_1''$.

Posons $H = \Sigma \cap \mathrm{Ker}\ \delta_1'$; au voisinage de 0, H est une sous-variété $\underset{\sim}{C}$-analytique de dimension finie de Σ, et $T_0(H)$ est l'espace vectoriel des formes harmoniques de type $(0, 1)$ à valeurs dans $T(V_0)$, espace qui s'identifie à $H^1(V_0 ; \Theta)$, où Θ est le faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur V_0. H peut être défini par l'équation

$$\delta'(d''\omega - [\omega , \omega]) + d''\delta'\omega = 0 .$$

Il résulte des théorèmes connus sur les équations elliptiques que toute forme $\omega \in H$ est $\underset{\sim}{R}$-analytique, et que l'injection de H dans ${}^r\Omega^{0,1}(V)$ définit sur V une structure presque complexe paramétrée par H.

Considérons le sous-espace S de H défini par $\theta(\omega) = 0$. Son espace tangent de Zariski en 0 est $T_0(H)$. L'injection de S dans H définit sur V une structure presque complexe $\underset{\sim}{R}$-analytique paramétrée par S intégrable. Nous noterons X l'espace $\underset{\sim}{C}$-analytique obtenu en munissant $S \times V$ de la structure ainsi définie.

5. Le théorème de Kuranishi.

L'espace $\underset{\sim}{C}$-analytique X, **lisse** et propre au-dessus de l'espace pointé $(S , s_0 = 0)$, muni de l'identification $i : V_0 \to X_0$, jouit de la propriété semi-universelle suivante :

THÉORÈME. - Pour tout espace $\underset{\sim}{C}$-analytique pointé (S' , s_0'), pour tout espace $\underset{\sim}{C}$-analytique X' lisse et propre au-dessus de S', et pour tout isomorphisme $i' : V_0 \to X_0'$, il existe un voisinage S'' de s_0' dans S', un morphisme f (non nécessairement unique) de (S'' , s_0') dans (S , s_0), et un S''-isomorphisme $g : X'_{|S''} \to f^*(X)$ tel que $g_{s_0'} = i \circ i'^{-1}$.

Démonstration. - Considérons l'espace C-analytique $\mathfrak{D} = \mathrm{Diff}^{r+1}(V ; X)$ lisse au-dessus de S, muni du point de base $e = I_{V_0}$. On a une section $\sigma : S \to \mathfrak{D}$ provenant de l'identité $S \times V = X$, et un morphisme $\rho : \mathfrak{D} \to \Phi^r(V)$ tel que, pour $f : V \to X_s$, $\rho(f) = f^*(\varphi_s)$, où φ_s est la structure complexe de X_s. Le composé $\rho \circ \sigma : S \to \Psi^r(V)$ est l'injection canonique. L'application tangente à $\rho_0 : \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_{s_0} \to \Psi^r(V)$ en e est $d_0'' : {}^{r+1}\Omega^{0,0} \to {}^r\Omega^{0,1}$, qui est un homomorphisme de noyau de dimension finie.

Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace $\underset{\sim}{C}$-analytique banachique de $\mathfrak{D}$, lisse au-dessus de S, contenant $\sigma(S)$, et tel que ${}^{r+1}\Omega^{0,0} = \operatorname{Ker} d''_o \oplus T(\mathcal{E}_o)$. La restriction de ρ à $\mathcal{E}$ est une immersion de $\mathcal{E}$ dans Σ en e, car son application linéaire tangente est un isomorphisme. On a $S \subset \rho(\mathcal{E}) \subset \Phi^r(V) \subset \Sigma$, ces inclusions ayant lieu au sens des espaces analytiques. Il résultera du lemme qui suit que

(1) $$\rho(\mathcal{E}) = \Phi^r(V) \quad \text{au voisinage de } 0 .$$

LEMME 1. - <u>Soient</u> H <u>un voisinage de</u> 0 <u>dans</u> C^k, U <u>un voisinage de</u> 0 <u>dans un espace de Banach,</u> Φ <u>un sous-espace</u> C-<u>analytique de</u> $H \times U$. <u>Posons</u> $S = (H \times \{0\}) \cap \Phi$. <u>Si</u> $\Phi \supset S \times U$ [2], <u>on a</u> $\Phi = S \times U$ <u>au voisinage de</u> 0 <u>dans</u> $H \times U$.

Ce lemme sera démontré au n° 6.

Pour déduire l'assertion (1) du lemme, il suffit de trivialiser $\mathcal{E}$ au voisinage de e, et de prolonger $\rho : \mathcal{E} = S \times U \to \Sigma$ en une application $\underset{\sim}{C}$-analytique de $H \times U$ dans Σ, qui est alors une carte de Σ.

Soient maintenant (S', s'_o) un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique pointé, X' un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique lisse et propre au-dessus de S', et $i' : V_o \to X'$ un isomorphisme. L'espace analytique $\mathfrak{D}' = \operatorname{Diff}^{r+1}(V , X')$ étant lisse, il existe une section $\underset{\sim}{C}$-analytique $\sigma' : S'' \to \mathfrak{D}'$ sur un voisinage S'' de s'_o dans S' telle que $\sigma'(s'_o) = i'$. D'autre part, on a comme précédemment un morphisme $\sigma' : \mathfrak{D}' \to \Phi^r(V)$ tel que, pour $f' : V \to X'_{s'}$, $\rho(f) = f^*(\varphi'_{s'})$. Comme $\rho : \mathcal{E} \to \Phi^r(V)$ est un isomorphisme local au point $e = i$, on peut, quitte à diminuer S'', mettre de façon unique $\rho' \circ \sigma'$ sous la forme $\rho \circ h$, où h est un morphisme $\underset{\sim}{C}$-analytique de (S'' , s'_o) dans $(\mathcal{E} , e)$.

Composant h avec la projection $\mathcal{E} \to S$, on obtient un morphisme $f : (S'' , s'_o) \to (S , s_o)$. A h (resp. à σ') correspond un f-morphisme (resp. un S''-morphisme) $\tilde{h}$ (resp. $\tilde{\sigma}'$) de $S'' \times V$ dans X (resp. dans X'), de classe $\mathcal{C}^r$, partiellement $\underset{\sim}{C}$-analytique par rapport à S''. La relation $\rho' \circ \sigma' = \rho \circ h$ montre que les structures presque complexes paramétrées par S'' induites sur V par X et X' au moyen de $\tilde{h}$ et $\tilde{\sigma}'$ coïncident, ce qui montre que $g = \tilde{h} \circ \tilde{\sigma}'^{-1} : X'_{S''} \to X$ est un morphisme $\underset{\sim}{C}$-analytique, et achève la démonstration du théorème.

<u>Remarque</u>. - f dépend du choix de $\mathcal{E}$. Si $H^0(V_o ; \Theta) = 0$, on a nécessairement

---

[2] Au sens des espaces analytiques. Le lemme serait faux, si on supposait seulement l'inclusion ensembliste.

$\mathcal{E} = \mathcal{Q}$ au voisinage de e ; dans ce cas, f et g sont uniques, et $X \to S$ jouit d'une propriété universelle.

6. Démonstration du lemme 1.

Si f est une fonction sur $H \times U$ et $u \in U$, on notera f_u la fonction $x \to f(u, x)$. Pour tout polycylindre $K \subset H$ de rayons $r_1, \dots, r_k$, notons B_K l'espace de Banach des fonctions continues sur B_K, holomorphes à l'intérieur [4].

Soient $f_1^1, \dots, f_p^p$ des fonctions $\underset{\sim}{C}$-analytiques au voisinage de 0 dans $H \times U$, appartenant à l'idéal définissant Φ, et telles que $f_o^1, \dots, f_o^p$ engendrent l'idéal $\mathfrak{J}$ définissant S au voisinage de 0 ; notons f_u l'homomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}^p \to \mathcal{O}$ défini par $f_u(h_1, \dots, h_p) = \Sigma f_u^j h_j$. Soit K un voisinage privilégié de 0 dans H pour f_o, i. e. un polycylindre tel que f_o induise un homomorphisme $B_K^p \to B_K$ ayant pour image le sous-espace fermé I_K de B_K formé des fonctions h dont le germe en 0 est dans $\mathfrak{J}$. Comme $\Phi \supset S \times U$, on a $f_u(B_K) \subset I_K$ pour tout u et, f_o étant un épimorphisme, f_u sera un épimorphisme pour u suffisamment voisin de 0. On peut donc mettre f_o^i sous la forme $\Sigma g_u^{ij} f_u^j$, et, en utilisant un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f_o$, on peut choisir les g_u^{ij} dépendant analytiquement de u. Ceci montre que les fonctions $(x, u) \mapsto f_o^i(x)$, qui engendrent l'idéal définissant $S \times U$, appartiennent à l'idéal définissant Φ.

C. Q. F. D.

7. Description de S.

H est une sous-variété de ${}^r\Omega^{0,1}$, et $T_o(H) = H^1 = \operatorname{Ker} d_1'' \cap \operatorname{Ker} \delta_1'$ s'identifie à $H^1(V_o ; \Theta)$; il existe un voisinage U de 0 dans H^1 et une carte $\eta : U \to H$ telle que $\eta(u) = u + o(\|u\|)$. Le sous-espace S de H est défini par $\theta(\omega) = 0$, où θ est l'application analytique de H dans ${}^{r-1}\Omega^{0,2}$ définie par $\theta(\omega) = d''\omega + [\omega, \omega]$.

PROPOSITION 2. - <u>Il existe une application</u> $\underset{\sim}{C}$-<u>analytique</u> $\zeta : U \to H^2(V_o ; \Theta)$ <u>telle que</u> η <u>induise un isomorphisme local</u> $\overset{-1}{\zeta}(0) \to S$. <u>On peut choisir</u> ζ <u>de la forme</u> $\zeta(u) = [u \smile u] + o(\|u\|^2)$, <u>où</u> $[u \smile u]$ <u>est le cup-crochet</u>.

<u>Démonstration</u>. – On a les relations $\theta(\omega) \in \operatorname{Ker} \delta_2'$ et $d''(\theta(\omega)) = 2[\omega , \theta(\omega)]$ pour $\omega \in H$. D'autre part,

$$ {}^{r-2}\Omega^{0,3} = \operatorname{Im} d_2'' \oplus \operatorname{Ker} \delta_3' . $$

Considérons l'ensemble $\mathfrak{F}$ des couples $(\omega , \alpha) \in H \operatorname{Ker} \delta_2'$ tels que $d''\alpha - 2[\omega , \alpha] \in \operatorname{Ker} \delta_3'$. Le théorème des fonctions implicites montre que $\mathfrak{F}$ est un sous-fibré vectoriel de $H \times \operatorname{Ker} \delta_2'$ et que la projection

$$ p : {}^{r-1}\Omega^{0,2} \to H^2 = \operatorname{Ker} d_2'' \cap \operatorname{Ker} \delta_2' $$

induit un isomorphisme local de $\mathfrak{F}$ sur $H \times H^2$. Comme θ définit une section de $\mathfrak{F}$, on a

$$ \theta^{-1}(0) = (p \circ \theta)^{-1}(0) , $$

et $\zeta = - p \circ \theta \circ \eta$ satisfait la première condition.

On a

$$ - p(\theta(\omega)) = p([\omega , \omega]) , $$

et

$$ \zeta(u) = p([\eta(u) , \eta(u)]) = p([u , u]) + o(\|u\|^2) . $$

Or, $[u \smile u] = p([u , u])$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KODAIRA (K.), NIRENBERG (L.) and SPENCER (D. C.). – On the existence of deformations of complex analytic structures, Annals of Math., t. 68, 1958, p. 450-459.

[2] KURANISHI (Masatake). – On the locally complete families of complex analytic structures, Annals of Math., t. 75, 1962, p. 536-577.

[3] WEIL (André). – Introduction à l'étude des variétés kählériennes. – Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1267 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 6).

Voir aussi :

[4] DOUADY (Adrien). – Théorème des voisinages privilégiés, Séminaire Leray, Sur les équations aux dérivées partielles, 4e année, 1964/65 (Collège de France).