SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ HAEFLIGER

Sphères d'homotopie nouées

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 280, p. 57-68
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__57_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 280

Décembre 1964

SPHÈRES D'HOMOTOPIE NOUÉES

par André HAEFLIGER

(d'après KERVAIRE-MILNOR-LEVINE)

On se propose d'exposer ici le cadre géométrique qui conduit au calcul des groupes θ_n des sphères d'homotopie (KERVAIRE-MILNOR [6]) et des groupes θ_n^q des sphères d'homotopie nouées (LEVINE [7]).

1. Définition du groupe θ_n^q.

1.1. - Soit H l'espace de Hilbert des suites $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ de nombres réels telles que $\sum x_i^2 < \infty$. Alors R^n est le sous-espace défini par $x_i = 0$ pour $i > n$, D^n est le sous-espace de R^n formé des points x tels que $|x| \leqslant 1$, et S^{n-1} des points $|x| = 1$. On oriente S^{n-1} comme le bord de D^n. Ainsi, S^n est une sous-sphère de S^{n+q}. Enfin, D_+^n (resp. D_-^n) est l'hémisphère de S^n défini par $x_1 > 0$ (resp. $x_1 < 0$).

1.2. - On dit que deux sous-variétés différentiables compactes V_o, V_1, orientées de S^{n+q} et de dimension n, sont <u>isotopes</u>, s'il existe un difféomorphisme h de degré 1 de S^{n+q} appliquant V_o sur V_1 et préservant les orientations. On dit que V_o et V_1 sont <u>h-cobordantes</u> s'il existe une sous-variété orientée W de $S^{n+q} \times I$ dont la frontière ∂W est l'union de $V_o^n \times 0$, avec l'orientation renversée, et de $V_1^n \times 1$, et si W peut se rétracter par déformation sur $V_i \times i$, $i = 0, 1$.

SMALE a démontré ([10]) que, pour $q \geqslant 3$, $n \geqslant 5$ et V_i simplement connexe, la relation de h-cobordisme est équivalente à celle d'isotopie.

Par définition, θ_n^q est l'ensemble des classes de h-cobordisme des sous-variétés compactes orientées de S^{n+q} qui ont le type d'homotopie de S^n. Si $q > n+1$, d'après les théorèmes de position générale de Whitney, alors θ_n^q est indépendant de q et est égal à θ_n, l'ensemble des classes de h-cobordisme des n-sphères d'homotopie. On introduit dans l'ensemble θ_n^q une structure de groupe abélien. Pour cela, on utilise le lemme suivant.

1.3. LEMME.

(a) Toute sous-variété compacte, orientée, de dimension n, de S^{n+q}, $q > 0$, est isotope à une sous-variété V telle que

$$V \cap D_-^{n+q} = D_-^n$$

(avec concordance des orientations).

(b) Si W est une sous-variété de $S^{n+q} \times I$, connexe, telle que

$$W \cap (D_-^{n+q} \times i) = D_-^n \times i , \quad i = 0 , 1 ,$$

il existe un difféomorphisme h de $S^{n+q} \times I$, fixe sur le bord, tel que

$$h(W) \cap (D_-^{n+q} \times I) = D_-^n \times I \qquad \text{pour} \quad n + q \geqslant 3 .$$

1.4. Définition de la somme. - Soient K_1, $K_2 \subset S^{n+q}$ des sous-variétés représentant des éléments a_1 et a_2 de θ_n^q, et telles que

$$K_1 \cap D_-^{n+q} = D_-^n \qquad \text{et} \qquad K_2 \cap D_+^{n+q} = D_+^n .$$

La somme $a_1 + a_2$ est représentée par la sous-variété $K_1 + K_2$, union de $K_1 \cap D_+^{n+q}$ et de $K_2 \cap D_-^{n+q}$. On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix particulier des représentants K_i, en utilisant notamment 1.3 (b).

Cette addition est commutative, car si s est l'application

$$x_1' = - x_1 , \qquad x_2' = - x_2 , \qquad x_i' = x_i \quad \text{pour} \quad i > 2 ,$$

$sK_2 + sK_1 = s(K_1 + K_2)$ est isotope à $K_1 + K_2$ et représente $a_2 + a_1$.

Pour montrer l'associativité, on représente les éléments a_1, a_2, a_3 de θ_n^q par des sous-variétés K_1, K_2, K_3 dont les intersections respectives avec $\{x_1 \leqslant 0 , x_2 \leqslant 0\}$, $\{x_1 \geqslant 0 , x_2 \leqslant 0\}$, $\{x_1 \leqslant 0 , x_2 \geqslant 0\}$, sont égales aux intersections de S^n avec ces sous-espaces. Alors, la réunion des intersections respectives de K_1, K_2, K_3 avec les complémentaires de ces sous-espaces représente $(a_1 + a_2) + a_3$ et $a_1 + (a_2 + a_3)$.

L'élément neutre est représenté par $S^n \subset S^{n+q}$. Une sous-variété K est h-cobordante à zéro (c'est-à-dire à S^n) si et seulement si c'est le bord d'une sous-variété contractile D dans D^{n+q+1}.

Soit K un représentant de $a \in \theta_n^q$ tel que $K \cap D_-^{n+q} = D_-^n$. Soit σ la symétrie

relativement au plan $x_1 = 0$. Alors $-\sigma K$ (c'est-à-dire σK avec l'orientation opposée) est l'inverse de K. En effet, $K + (-\sigma K)$ borde dans D^{n+q+1} la sous-variété contractile, union des segments $[x, \sigma x]$ où $x \in K \cap D^{n+q}_+$.

1.5. - L'inclusion de S^{n+q} dans S^{n+q+1} permet de considérer $K \subset S^{n+q}$ comme une sous-variété de S^{n+q+1} ; ceci induit un homomorphisme, dit de suspension, de θ^q_n dans θ^{q+1}_n.

2. Les résultats.

2.1. Soit G_q l'espace des applications de S^{q-1} sur elle-même de degré 1 ; le groupe des rotations SO_q est un sous-espace de G_q. Soit G la limite des G_q par suspension itérée.

THÉORÈME (Kervaire-Milnor-Levine). - Pour tout entier $q \geqslant 3$ et $n \neq 4$, il existe une suite exacte

$$(q) \qquad \dots \to P_{n+1} \to \theta^q_n \to \pi_n(G_q, SO_q) \to P_n \to \dots$$

où P_n est isomorphe à Z pour $n = 4k$ $(k > 1)$, à Z_2 pour $n = 4k + 2$, et à zéro pour n impair.

La suspension induit un homomorphisme de la suite exacte (q) dans $(q + 1)$ (qui est un isomorphisme sur P_n). A la limite, on a la suite exacte

$$(\infty) \qquad \dots \to P_{n+1} \to \theta_n \to \pi_n(G, SO) \to P_n \to \dots .$$

2.2. - L'homomorphisme $\theta^q_n \to \pi_n(G_q, SO_q)$ peut être décrit comme suit. On représente un élément donné de θ^q_n par une n-sphère K dans S^{n+q}, telle que $K \cap D^{n+q}_- = D^n_-$. Alors $K \cap D^{n+q}_+$ est un n-disque Δ^n plongé dans D^{n+q}_+ identifié à D^{n+q}, et dont le bord est S^{n-1}. Soit

$$x = (y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_q) = (y, z) \in S^{n+q-1} \subset R^{n+q} = R^n \times R^q .$$

Soit τ l'application dans D^q du voisinage tubulaire $|z|^2 \leqslant 1/2$ de S^{n-1}, définie par $\tau(y, z) = \sqrt{2}\, z$. Nous identifierons le voisinage tubulaire $|y|^2 \leqslant 1/2$ de la $(q-1)$-sphère $y = 0$, à $D^n \times S^{q-1}$, par l'application $(y, z) \to (\sqrt{2}\, y, z/|z|)$. Soit $T : \Delta^n \times D^q \to D^{n+q}$ un voisinage tubulaire de Δ^n, tel que l'application $v \to T(u, v)$ de D^q dans D^q soit une rotation pour $u \in S^{n-1}$. L'application de $T(\Delta^n \times D^q) - \Delta^n$ dans S^{q-1} donnée par $T(u, v) \to v/|v|$ peut être étendue suivant une application $h : D^{n+q} - \Delta^n \to S^{q-1}$, et deux telles applications sont

homotopes, car les groupes $H^i(D^{n+q}, \Delta^n)$ sont nuls. La restriction de h au sous-espace $D^n \times S^{q-1}$ de S^{n+q-1} représente l'élément désiré de $\pi_n(G_q, SO_q)$. Nous verrons que cet élément est l'obstruction pour construire une sous-variété dans S^{n+q-1}, avec un champ de $(q-1)$-repères normaux et dont le bord est K.

2.3. - Les éléments de P_n (cf. 3) seront représentés comme des classes de cobordisme de sous-variétés V de dimension n de S^{n+q-1} avec champ normal, et dont le bord est une sphère d'homotopie. Ces classes sont caractérisées, pour $n = 4k$, par la signature de V divisée par 8, et pour $n = 4k+2$, par l'invariant d'Arf d'une certaine forme quadratique (cf. 4). L'homomorphisme $P_n \to \theta^q_{n-1}$ fera correspondre à V son bord. A un élément de $\pi_n(G_q, SO_q)$ représenté par $f : D^n \times S^{q-1} \to S^{q-1}$ correspondra la classe, dans P_n, de la sous-variété avec champ normal $f^{-1}(e)$, où e est une valeur régulière de f.

2.4. - On peut définir le groupe $F\theta^q_n$ des classes de h-cobordisme de n-sphères d'homotopie plongées dans S^{n+q} avec un champ de q-repères normaux donnés. On a une suite exacte facile à établir :

2.5. - $\to \pi_n(SO_q) \to F\theta^q_n \to \theta^q_n \to \pi_{n-1}(SO_q) \to \dots$, où l'homomorphisme $\theta^q_n \to \pi_{n-1}(SO_q)$ fait correspondre à la classe de K l'obstruction pour trivialiser le fibré normal de K ; l'homomorphisme $\pi_n(SO_q) \to F\theta^q_n$ associe à un élément $a \in \pi_n(SO_q)$ la sphère $S^n \subset S^{n+q}$ avec la trivialisation de son fibré normal définie par a.

On a également une suite exacte :

2.6. - $\to P_{n+1} \to F\theta^q_n \to \pi_n(G_q) \to P_n$.

Les suites (q), 2.5, 2.6 et la suite exacte de la paire (G_q, SO_q) forment un diagramme commutatif en tresse :

$$\begin{tikzcd}
 & P_{n+1} \arrow[rr, bend left] & & \theta^q_n \arrow[rr, bend left] & & \\
\pi_{n+1}(G_q, SO_q) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rrr, bend left] & & F\theta^q_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_n(G_q, SO_q) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \pi_n(SO_q) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \pi_n(G_q) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Nous nous contenterons d'établir dans 3 et 4 la suite exacte (q), car 2.6 se montre facilement par la même méthode.

2.7. <u>Conséquences générales du théorème</u> 2.1.

(a) <u>Finitude de</u> θ_n. - Le groupe $\pi_n(G)$ est isomorphe à $\pi_{n+N}(S^N)$, N grand ;

il est donc fini, d'après SERRE [9]. Quant à $\pi_{n-1}(SO)$, il est isomorphe à Z pour $n = 4k$, et fini pour $n \neq 4k$, d'après BOTT [2]. Donc $\pi_n(G , SO)$ est fini pour $n \neq 4k$, et de rang 1 (sur Q) pour $n = 4k$. Il résulte du travail de KERVAIRE-MILNOR [5] que tout élément d'ordre infini de $\pi_{4k}(G , SO)$ est appliqué sur un élément d'ordre infini de P_{4k} . Donc θ_n est fini, $n \geq 4$, d'après (∞).

(b) Stabilité de θ_n^q . - D'après JAMES [4], l'homomorphisme de suspension $\pi_n(G_q , SO_q) \to \pi_n(G , SO)$ est un isomorphisme pour $n < 2q - 3$, et est surjectif pour $n = 2q - 3$. L'homomorphisme de la suite exacte (q) dans (∞) montre que $\theta_n^q \to \theta_n$ est un isomorphisme pour $n < 2q - 3$, et est surjectif pour $n = 2q - 3$.

(c) Caractère de finitude de θ_n^q . - Le groupe $\pi_n(G_q , SO_q)$ est de rang 1 sur Q pour $n = 4k$ et $q > 2k + 1$, et fini autrement. Il résulte de la suite exacte (q), de (a) et (b), que θ_n^q est de rang 1 pour $n = 4k - 1$ et $q \leq 2k + 1$, et qu'il est fini autrement.

2.8. Autres résultats généraux sur θ_n . - Il résulte des travaux d'ADAMS sur le J-homomorphisme [1] que, pour q grand, le fibré normal à toute sphère d'homotopie $K^n \subset S^{n+q}$ est trivial. D'autre part, en utilisant également des résultats d'ADAMS, KERVAIRE et MILNOR ont déterminé l'ordre de l'image bP_{4k} dans θ_{4k-1} . Quant à bP_{4k+2} , il est zéro pour $k = 0 , 1 , 3$, et probablement non trivial pour $k \neq 0 , 1 , 3$.

3. Suite exacte de cobordisme.

3.1. Définition des groupes P_n^q et Φ_n^q . - Un élément de P_n^q (resp. Φ_n^q) est représenté par une n-sous-variété V dans S^{n+q-1} avec un champ normal (i. e. de $(q - 1)$-repères normaux), telle que ∂V soit une sphère d'homotopie (resp. la sphère $S^{n-1} \subset S^{n+q-1}$). Deux telles sous-variétés V_o et V_1 sont cobordantes (i. e. représentent le même élément de P_n^q , resp. Φ_n^q), s'il existe une sous-variété $W \subset S^{n+q-1} \times I$ avec champ normal telle que ∂W soit l'union de $V_o \times 0$ avec son champ, $V_1 \times 1$ avec son champ, et d'une sous-variété X pouvant se rétracter par déformation sur $\partial V_1 \times 1$ (resp. X est la sous-variété $S^{n-1} \times I$).

On définit, dans P_n^q et Φ_n^q , une addition comme dans 1 : on choisit des représentants V_1 et V_2 tels que $V_1 \cap D_-^{n+q-1}$ et $V_2 \cap D_+^{n+q-1}$ soient les sous-espaces définis par $x_i = 0$ pour $i > n + 1$, $x_{n+1} \geq 0$ et $x_1 \leq 0$ (resp. $x_1 \geq 0$) avec le champ normal standard. On pose

$$V_1 + V_2 = (V_1 \cap D_+^{n+q-1}) \cup (V_2 \cap D_-^{n+q-1}) .$$

Un analogue du lemme 1.3 montre que cette addition est bien définie ; la commutativité et l'associativité s'établissent comme dans 1.

Le n-disque défini dans S^{n+q-1} par $x_{n+1} \geqslant 0$, $x_i = 0$ pour $i > n+1$, représente l'élément neutre. Une sous-variété $V \subset S^{n+q-1}$ est cobordante à zéro, s'il existe une sous-variété W de D^{n+q} avec champ normal (et une arête le long de ∂V), telle que ∂W soit l'union de V et d'un disque d'homotopie dans le cas de P_n^q , du disque D^n dans le cas de Φ_n^q . L'inverse de V est représenté par le symétrique σV .

3.2. Ainsi, P_n^q et Φ_n^q sont des groupes abéliens. On a des homomorphismes évidents $\Phi_n^q \to P_n^q$ et $\partial : P_n^q \to \theta_{n-1}^q$. On définit encore un homomorphisme $\theta_n^q \to \Phi_n^q$ comme suit. En reprenant les notations de 2.2, on choisit $h : D^{n+q} - \Delta^n \to S^{q-1}$ différentiable ; alors si $e \in S^{q-1}$ est une valeur régulière de h , l'adhérence de $h^{-1}(e)$ est une sous-variété $W \subset D^{n+q}$ avec champ normal dont le bord est l'union de Δ^n et d'une sous-variété $V \subset S^{n+q-1}$ qui représente dans Φ_n^q l'image de la classe de K .

3.3. THÉORÈME. - <u>La suite des homomorphismes définis ci-dessus</u>

$$\to P_{n+1}^q \to \theta_n^q \to \Phi_n^q \to P_n^q \to$$

<u>est exacte</u>, <u>pour tout</u> n <u>et</u> $q > 0$.

La démonstration résulte presque immédiatement des définitions. En fait, cette suite exacte est isomorphe à la suite exacte (q) de 2.1. Dans le paragraphe 4, on montrera que $P_n^q = P_n$ a la valeur indiquée dans 2.1 (c'est la partie la plus profonde de la théorie), et nous allons maintenant vérifier brièvement la proposition suivante.

3.4. PROPOSITION. - Φ_n^q <u>est isomorphe à</u> $\pi_n(G_q , SO_q)$.

Soit f une application différentiable de $D^n \times S^{q-1} \to S^{q-1}$ représentant un élément α de $\pi_n(G_q , SO_q)$: pour $x \in S^{n-1}$, l'application $y \to f(x , y)$ est une rotation. Soit e une valeur régulière de f ; alors $f^{-1}(e)$ est une sous-variété V' avec champ normal de $D^n \times S^{q-1}$ dont le bord est une section de la projection p de $S^{n-1} \times S^{q-1}$ sur S^{n-1} . On identifie, comme dans 2.2, $D^n \times S^{q-1}$ à une partie de S^{n-q+1} ; on étend V' radialement à l'intérieur du voisinage tubulaire de S^{n-1} pour obtenir une sous-variété V avec champ normal dans S^{n+q-1} dont le bord est S^{n-1} et qui représente ainsi un élément de Φ_n^q .

Réciproquement, soit V une sous-variété de S^{n+q-1} avec champ normal représentant un élément de Φ_n^q ; après une isotopie, on peut supposer que V est radiale dans le voisinage tubulaire $|z| \leqslant 1/2$ (cf. 2.2) de S^{n-1} ; ainsi, $V' = V \cap (D^n \times S^{q-1})$ est une sous-variété avec champ normal de $D^n \times S^{q-1}$ dont le bord est une section de la projection p ; en appliquant la construction de Thom-Pontrjagin, on construit une application différentiable f de $D^n \times S^{q-1}$ dans S^{q-1} représentant un élément de $\pi_n(G_q , SO_q)$ et telle que $f^{-1}(e) = V'$.

On vérifie que ces deux applications sont des homomorphismes inverses l'un de l'autre.

3.5. Comportement par suspension. - L'inclusion de S^{n+q-1} dans S^{n+q} induit un homomorphisme de suspension de P_n^q dans P_n^{q+1} (ou de Φ_n^q dans Φ_n^{q+1}) obtenu en complétant le champ normal de $V \subset S^{n+q-1}$ par le champ de vecteur normal à S^{n+q-1} dans S^{n+q} , ajouté comme dernier vecteur. Il est clair que la suite exacte 3.3 pour l'entier q s'envoie dans celle pour l'entier $q + 1$. De plus, si q est grand, P_n^q est indépendant de q et sera désigné P_n .

4. Détermination de P_n^q .

4.1. Modifications sphériques (cf. [9] et [10]). - Soit

$$P : D^{k+1} \times D^{n-k} \to D^{k+1} \times D^{n-k}$$

l'application injective définie par $P(x , y) = (x\delta(|y|) , y\delta(|x|))$, où $\delta(t)$ est une fonction réelle différentiable paire, telle que $\delta(0) = 1/2$, $\delta(t) = t$ pour $t \geqslant 1$, et $\delta'(t)$ est positive croissante pour $0 < t < 1$. Le rang de P est partout $n + 1$, excepté sur l'arête $\partial D^{k+1} \times \partial D^{n-k}$. On désigne par ν (resp. ν') le champ de vecteurs unité normaux le long de $P(\partial D^{k+1} \times D^{n-k})$ (resp. $P(D^{k+1} \times \partial D^{n-k})$) dirigé vers l'intérieur (resp. l'extérieur) de l'image de P .

Soit V une n-sous-variété de R^{n+q} avec un champ normal $f = f_1 , \dots , f_q$. Soit Φ une application de $D^{k+1} \times D^{n-k}$ dans R^{n+q} qui est le composé de P avec un plongement différentiable Φ_o de $D^{k+1} \times D^{n-k}$ dans R^{n+q} . On suppose que :

(i) $\Phi^{-1}(V) = \partial D^{k+1} \times D^{n-k}$.

(ii) Le long de $\Phi(\partial D^{k+1} \times D^{n-k})$, le champ f_1 est l'image de ν par la différentielle de Φ_o .

On se donne de plus un champ $F = F_2 , \dots , F_q$ de repères normaux à $\Phi(D^{k+1} \times D^{n-k})$ tel que

(iii) $F_i = f_i$, $i \geqslant 2$, le long de $\Phi(\partial D^{k+1} \times D^{n-k})$.
Le couple (Φ , F) sera appelé une <u>anse d'indice</u> $k + 1$ <u>attachée à la sous-variété</u> avec champ normal V .

Soit V' la sous-variété $[V - \Phi(\partial D^{k+1} \times D^{n-k})] \cup \Phi(D^{k+1} \times \partial D^{n-k})$, et soit $f' = f'_1 , \dots , f'_q$ le champ normal à V' égal à f sur $V \cap V'$, et tel que, le long de $\Phi(D^{k+1} \times \partial D^{n-k})$, on ait $f'_i = F_i$, $i \geqslant 2$, et f'_1 = image de ν' par la différentielle de Φ_o .

Nous dirons que la variété avec champ normal V' se déduit de V par une <u>modification sphérique d'indice</u> $k + 1$, définie par l'anse Φ , qui tue l'élément de $\pi_k(V)$ représenté par $\Phi(S^k \times 0)$.

Notons que V se déduit de V' par une modification sphérique d'indice $n - k$, définie par la même anse.

On vérifie qu'il existe une sous-variété avec champ normal W dans $R^{n+q} \times I$, dont le bord est $(V \times 0) \cup (V' \times 1) \cup (\partial V \times I)$; ainsi V et V' sont cobordantes (cf. [3]). En fait, W est difféomorphe à $V \times I$ avec une anse $D^{k+1} \times D^{n-k}$ attachée par l'application $(x , y) \to (\Phi(x , y) , 1)$, où $(x , y) \in \partial D^{k+1} \times D^{n-k}$.

4.2. - Réciproquement, soit $\varphi : S^k \to V$ un plongement différentiable représentant un élément $\alpha \in \pi_k(V)$. Soit ξ l'élément de $\pi_k(V_{n+q,k+q})$ représenté par l'application suivante de S^k dans la variété de Stiefel des $(k + q)$-repères de R^{n+q} : à tout $x \in \varphi(S^k)$, on associe le repère

$$\varepsilon_1(x) , \dots , \varepsilon_{k+1}(x) , f_2(x) , \dots , f_q(x) ,$$

où $\varepsilon_1(x) , \dots , \varepsilon_{k+1}(x)$ est la trivialisation naturelle du fibré engendré par le fibré tangent à $\varphi(S^k)$ et par le champ f_1 restreint à $f(S^k)$. Notons que ξ est indépendant de q , car $\pi_k(V_{n+q,k+q}) = \pi_k(SO , SO_{n-k})$.

Si deux plongements représentant α sont toujours régulièrement homotopes en tant qu'immersions (par exemple si $k \leqslant n/2$, d'après WHITNEY et HIRSCH), alors cet élément ξ ne dépend que de α , et sera désigné par $\xi(\alpha)$.

Si $\xi = 0$ (ce qui est toujours le cas si $k < n/2$) et si $q > k + 1$, il existe toujours une modification sphérique tuant α . On construit d'abord un plongement ψ de D^{k+1} dans R^{n+q} tel que $\psi|S^k = \varphi$, $\psi^{-1}(V) = S^k$ et ψ est tangent à f_1 le long de $\psi(S^k)$. Comme $\xi = 0$, il est possible de construire un champ $F_2 , \dots , F_q$ de vecteurs orthonormaux, normaux à $\psi(D^{k+1})$, et coïncidant avec $f_2 , \dots , f_q$ sur le bord ; en effet, on rencontre en principe une obstruc-

tion dans $\pi_k(V_{n+q-k-1,q-1})$, dont la suspension itérée $(k+1)$ fois est ξ . Finalement, on épaissit ψ pour obtenir une anse Φ attachée à V (cf. [3]).

4.3. - Si V' se déduit de V par une modification sphérique tuant l'élément α de $\pi_k(V)$ et si $k < n-k-1$, alors $\pi_i(V') = \pi_i(V)$ pour $i < k$, et $\pi_k(V')$ est le quotient de $\pi_k(V)$ par un sous-groupe contenant α . Comme, pour $k < n-k-1$, $\xi(\alpha) = 0$, en effectuant une suite de modifications sphériques d'indices croissants, on voit que toute sous-variété V de S^{n+q-1} avec champ normal, q grand, est cobordante à une sous-variété V' qui est k-connexe, où $2k < n-1$ (cf. [8]).

4.4. <u>Calcul de</u> P_{2k+1} . - D'après ce qui précède, on peut représenter un élément de P_{2k+1} par une sous-variété V $(k-1)$-connexe dans S^{n+q-1} , q grand. Si l'on effectue sur V une modification sphérique pour tuer un élément $\alpha \in \pi_k(V)$, on a bien toujours $\xi(\alpha) = 0$, mais on risque d'introduire de nouveaux éléments dans $\pi_{n-k-1}(V) = \pi_k(V)$. Cependant, KERVAIRE et MILNOR, par un argument délicat de 14 pages (cf. [6]), ont montré qu'il était possible de choisir judicieusement les modifications sphériques pour tuer $\pi_k(V)$. De sorte que tout élément de P_{2k+1} peut être représenté par une sous-variété V qui est un n-disque. Il en résulte que $P_{2k+1} = 0$.

4.5. <u>Calcul de</u> P_{2k} $(k > 2)$. - On a vu que tout élément de P_{2k} peut être représenté par une variété V $(k-1)$-connexe, avec champ normal dans $R^{n+q} \subset S^{n+q}$, q grand. Par dualité de Poincaré, V n'a pas de torsion. Pour pouvoir tuer un élément $\alpha \in \pi_k(V)$, on doit pouvoir le représenter par un plongement, ce qui est toujours possible d'après WHITNEY si <u>$k > 2$</u> . Mais on rencontre l'obstruction $\xi(\alpha) \in \pi_k(SO , SO_k)$, qui est non nulle en général. Rappelons que $\pi_k(SO , SO_k)$ est Z ou Z_2 suivant que k est pair ou impair. L'application

$$\xi : \pi_k(V) \to \pi_k(SO , SO_k)$$

n'est pas un homomorphisme, mais c'est une forme quadratique. On a :

4.6. - $\xi(\alpha + \beta) = \xi(\alpha) + \xi(\beta) + \iota(\alpha.\beta)$, où $\alpha.\beta \in \pi_k(S^k)$ est l'intersection des éléments $\alpha , \beta \in \pi_k(V) = H_k(V)$, et ι est l'homomorphisme $\pi_k(S^k) \to \pi_k(SO , SO_k)$ induit par l'inclusion $SO_{k+1}/SO_k \to SO/SO_k$. Lorsqu'on identifie $\pi_k(SO , SO_k)$ à Z ou Z_2 , ce que nous ferons, alors $\iota(\alpha.\beta)$ est simplement l'intersection ou l'intersection modulo 2 de α et β .

4.7. <u>Cas</u> k <u>pair</u>. - La forme bilinéaire associée à la forme quadratique ξ ,

est donnée par l'intersection des classes d'homologie. L'invariant naturel attaché à ξ est sa signature, notée $\sigma(V)$. Il est bien connu que c'est un invariant de la classe de cobordisme de V . La signature se comporte additivement relativement à la somme connexe des sous-variétés. Enfin, comme le bord de V est une sphère d'homologie, la forme bilinéaire d'intersection sur $H_k(V)$ est unimodulaire. D'après un théorème d'algèbre, $\sigma(V)$ est divisible par 8 . On obtient donc finalement un homomorphisme $P_{2k} \to Z$, pour k pair, en faisant correspondre à un élément de P_{2k} la signature divisée par 8 d'une variété le représentant.

4.8. Cas k impair. - On peut trouver une base symplectique de $H_k(V , Z)$, c'est-à-dire une base $x_1 , \dots , x_r , y_1 , \dots , y_r$ telle que $x_i . x_j = \delta_{ij}$, $x_i . x_j = 0$, et $y_i . y_j = 0$. L'invariant d'Arf $c(V)$ de V est par définition l'invariant d'Arf de ξ , c'est-à-dire l'entier modulo 2

$$c(V) = \sum \xi(x_i)\ \xi(y_i) \ .$$

$c(V)$ ne dépend que de la classe de cobordisme de V . En effet, si V' est une sous-variété avec champ normal, $(k - 1)$-connexe, cobordante à V , il existe dans $R^{n+q} \times I$ une sous-variété avec champ normal W cobordant V et V' ; après modifications sphériques, on peut supposer W $(k - 1)$-connexe. D'après SMALE [10], W peut s'obtenir à partir de $V \times I$ en attachant successivement des anses d'indices k et $k + 1$. Ceci entraîne que l'on peut passer de V à une sous-variété isotope à V' par une suite de modifications sphériques d'indices k et $k + 1$; à chaque stade, la variété obtenue est $(k - 1)$-connexe. Il suffit donc de montrer que si V' se déduit de V par une modification sphérique définie par une anse Φ d'indice k , alors $c(V) = c(V')$. Le cas d'une anse d'indice $k + 1$ se traite en échangeant les rôles de V et V' . Soit donc x_i , y_i une base symplectique de $H_k(V)$, $1 \leqslant i \leqslant r$; on peut représenter ces éléments par des sphères plongées ne rencontrant pas $\Phi(\partial D^k \times 0)$; ces sphères représentent des éléments x'_i , y'_i de $H_k(V')$; soit $x'_{r+1} \in H_k(V')$ l'élément représenté par $\Phi(0 \times \partial D^{k+1})$; comme V est $(k - 1)$-connexe, il existe un élément $y'_{r+1} \in H_k(V')$ tel que les x'_i , y'_i , $i = 1 , \dots , r + 1$, forment une base symplectique. Comme $\xi(x'_{r+1}) = 0$, on a $c(V) = c(V')$.

$c(V)$ étant une fonction additive pour la somme des variétés, on obtient un homomorphisme $P_{2k} \to Z_2$ pour k impair.

4.9. THÉORÈME. - Les homomorphismes $P_{2k} \to Z$, k pair, et $P_{2k} \to Z_2$, k impair, sont des isomorphismes $(k > 2)$.

Démonstration.

Injectivité. - Soit V un représentant d'un élément de P_{2k} qui est $(k-1)$-connexe. Si $\sigma(V) = 0$ ou $c(V) = 0$, on peut trouver une base $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$ de $H_k(V)$ telle que $x_i \cdot y_j = \delta_{ij}$, $x_i \cdot x_j = 0$ (et $y_i \cdot y_j = 0$ pour k impair), et $\xi(x_i) = 0$. On peut faire, sur V, r modifications sphériques disjointes qui tuent les x_i. La variété obtenue est un disque.

Surjectivité. - Soit $S^k \times D^{k+1}$ plongé canoniquement dans R^{2k+1}. Soit T la sous-variété de dimension $2k$ formée des points $(x, y) \in S^k \times D^{k+1}$, avec y orthogonal à x ; c'est un fibré en boule D^k de base S^k, de projection $p(x, y) = x$. La fonction, associant à $(x, y) \in T$ le vecteur $(0, x)$, est un champ normal à T. Si $\alpha \in H_k(T)$ est représenté par $S^k \times 0$, alors $\xi(\alpha)$ est le générateur de $\pi_k(SO, SO_k)$. On appellera ruban tordu, une sous-variété avec champ normal T' dans R^{2k+1} isotope à T.

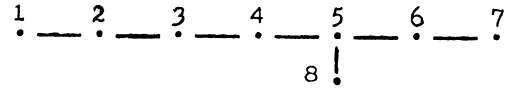
Plomber deux copies de T, c'est construire une sous-variété obtenue en réunissant deux rubans tordus T_1 et T_2, de projections $p_i : T_i \to S_i^k$, de sorte que

$$T_1 \cap T_2 = p_1^{-1}(D_1^k) = p_2^{-1}(D_2^k) \quad \text{avec concordance des champs normaux,}$$

où D_i^k est un petit disque dans S_i^k, et S_1^k coupant transversalement en un point S_2^k (voir la figure du tableau).

Pour k impair, la sous-variété, obtenue en plombant deux rubans tordus, a pour bord une sphère d'homotopie, car la matrice d'intersection est unimodulaire : son invariant d'Arf vaut 1.

Pour k pair, on plombe 8 copies de T suivant le schéma :



c'est-à-dire on plombe T_1 avec T_2, T_2 avec T_1, et $T_3, \ldots, T_5$ avec T_4, T_6, T_8, etc. On obtient une sous-variété V, dont la matrice d'intersection est unimodulaire (donc ∂V est une sphère d'homotopie pour $k > 2$) et dont la signature est 8.

4.10. Stabilité de P_n^q. - On veut montrer que l'homomorphisme de suspension $P_n^q \to P_n$ est bijectif pour $q > 2$.

D'après la construction précédente des générateurs de P_{2k}, cet homomorphisme est surjectif pour $q \geqslant 2$. Montrons qu'il est injectif.

Soit $V \subset S^{n+q-1}$ une sous-variété avec champ normal représentant un élément de P_n^q dont la suspension stable est nulle. Cela signifie qu'il existe une sous-variété W avec champ normal dans D^{n+N}, N grand, coupant S^{n+N-1} suivant V et dont le bord est l'union de V (avec le champ suspendu) et d'un disque. On peut supposer que $\pi_i(W) = 0$ pour $2i < n$. D'après SMALE [10], W s'obtient à partir de $V \times I$ par adjonction d'anses d'indices $k \leqslant n/2 + 1$. Par position générale, pour $q > 2$, on peut construire une isotopie de D^{n+N}, fixe sur ∂D^{n+N}, qui compresse W sur une sous-variété W' de D^{n+q}, les $q - 1$ premiers vecteurs du champ normal de W' étant tangents à D^{n+q}. Ainsi, W' peut être considérée comme une sous-variété avec champ normal de D^{n+q} ; donc V représente l'élément zéro de P_n^q.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (J. F.). - On the J-homomorphism (à paraître).

[2] BOTT (Raoul). - The stable homotopy of the classical groups, Annals of Math., t. 70, 1959, p. 313-337.

[3] HAEFLIGER (André). - Knotted (4k - 1) sphere in 6k-space, Annals of Math., t. 75, 1962, p. 452-466.

[4] JAMES (I. M.). - On the iterated suspension, Quart. J. Math., Oxford Series, t. 5, 1954, p. 1-10.

[5] KERVAIRE (Michel) and MILNOR (John). - Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin, Proceedings of the International Congress of Mathematicians [1958. Edinburgh], p. 454-458. - Cambridge, at the University Press, 1960.

[6] KERVAIRE (Michel) and MILNOR (John). - Groups of homotopy spheres, Annals of Math., t. 77, 1963, p. 504-537.

[7] LEVINE (J.). - A classification of differentiable knots, Annals of Math. (à paraître).

[8] MILNOR (John). - A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds, Differential geometry, p. 39-55. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 3).

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés, Annals of Math., t. 54, 1951, p. 425-505.

[10] SMALE (S.). - On the structure of manifolds, Amer. J. of Math., t. 84, 1962, p. 387-399.