Louis Boutet de Monvel

Opérateurs pseudo-différentiels. Application au problème de Neumann à dérivée oblique

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 308, p. 465-478

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__465_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 308 Juin 1966

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

APPLICATION au PROBLÈME de NEUMANN à DÉRIVÉE OBLIQUE

(d'après L. HÖRMANDER)

par Louis BOUTET de MONVEL

Le problème de Neumann est l'étude de l'équation

$$\begin{cases} \Delta f = g & \text{à l'intérieur d'une variété à bord} \\ X.f = u & \text{sur le bord} \end{cases}$$

X étant un champ de vecteurs défini au voisinage du bord. Il n'est pas elliptique si X peut devenir tangent au bord (sauf en dimension 2). Hörmander le traite en le ramenant à un problème d'opérateurs pseudo-différentiels sur le bord. Ces opérateurs sont définis et étudiés dans les § 1, 2 et 3 ; l'application au problème de Neumann (dans un cas très simple) est faite au § 4.

§ 1. Opérateurs pseudo-différentiels.

Ils ont été introduits par Kohn et Nirenberg [4] comme raffinement des opérateurs de Calderon-Zygmund (cf. aussi [7]). Nous reprenons ici la définition de Hörmander [2].

Soient V une variété C^{∞}, P un opérateur linéaire continu $C_0^{\infty}(V) \to C^{\infty}(V)$.

DÉFINITION 1.- P <u>est un opérateur pseudo-différentiel si</u>

1°) <u>Il existe une suite</u> $s_0 > s_1 .. > s_k > \dots \to -\infty$ <u>de nombres réels tels que pour toute</u> $f \in C_0^{\infty}(V)$, <u>et toute</u> $g \in C^{\infty}(V)$, <u>réelle, vérifiant</u> $dg \neq 0$ <u>sur</u> supp f, <u>on ait quand</u> $t \to \infty$ <u>un développement asymptotique</u>

$$e^{-itg} P(f e^{itg}) \sim \sum P_k(f,g) \, t^{s_k} .$$

2°) Le reste $t^{-s_N}(e^{-itg} P(f e^{itg}) - \sum_{k<N} P_k(f,g)t^{s_k})$ parcourt un borné de $C^\infty(V)$ quand $t \to \infty$, et quand f et g parcourent des compacts (de façon que la condition $dg \neq 0$ sur $\operatorname{supp} f$ soit vérifiée uniformément).

Exemple 1.– Un opérateur différentiel à coefficients C^∞ est un pseudo-différentiel ($e^{-itg} P(f e^{itg})$ est alors un polynôme en t).

Exemple 2.– P est un opérateur régularisant (i.e. se prolonge en un opérateur continu $\mathcal{E}'(V) \to C^\infty(V)$, ou de façon équivalente : le noyau de P est une fonction C^∞) si et seulement si c'est un opérateur pseudo-différentiel, et les P_k sont tous nuls.

C'est nécessaire parce que si $f \in C_0^\infty(V)$ et $dg \neq 0$ sur $\operatorname{supp} f$, $f e^{itg}$ tend vers 0 dans $\mathcal{E}'(V)$ plus vite que toute puissance de t .

Montrons que c'est suffisant : soit U un ouvert de V isomorphe à R^n (nous l'identifions à R^n dans le calcul qui suit). Si f et φ appartiennent à $C_0^\infty(U)$, on a, avec $\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix.\xi}\varphi(x)\, dx$

$$f\varphi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{ix.\xi} f(x)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi .$$

Donc

$$P(f\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int P(e^{ix.\xi} f(x))\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi .$$

Si les P_k sont tous nuls, l'application $\xi \to P(e^{ix.\xi} f(x)) \in C^\infty(V)$ est à décroissance rapide, et l'intégrale converge encore dans $C^\infty(V)$ pour $\varphi \in \mathcal{E}'(U)$ (alors $\hat{\varphi}$ est majorée par un polynôme).

Remarque 1.– Si $h \in C_0^\infty(V)$ et $h = 0$ sur $\operatorname{supp} f$, la définition 1 appliquée à $g - h$ montre que $e^{ith} \sum P_k(f,g)t^{s_k}$ est un développement asymptotique dans $C^\infty(V)$. Comme

h est arbitraire en dehors de supp f , ceci n'est possible que si les $P_k(f,g)$ sont tous nuls en dehors de supp f .

Le raisonnement de l'exemple 2 montre alors que le noyau de P est une fonction C^∞ en dehors de la diagonale de $V \times V$.

Remarque 2.- Il est commode de remplacer P par l'opérateur P' construit comme suit : soient O_j un recouvrement localement fini de V par des ouverts relativement compacts (on suppose V paracompacte), $\varphi_j \in C_o^\infty(O_j)$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, et $\psi_j \in C_o^\infty(O_j)$ égale à 1 au voisinage de supp φ_j . On pose :

$$P'(f) = \sum \varphi_j P(f\psi_j)$$

P' a même noyau que P au voisinage de la diagonale ; donc il en diffère par un opérateur régularisant. En outre, il est continu $C_o^\infty(V) \longrightarrow C_o^\infty(V)$, se prolonge continûment $C^\infty(V) \longrightarrow C^\infty(V)$, et le développement asymptotique de la définition 1 est encore valable pour $f \in C^\infty(V)$.

Opérateurs pseudo-différentiels sur R^n .

Soit P un tel opérateur. Nous le supposerons du type décrit dans la remarque 2. Posons :

$$p(x,\xi) = e^{-ix.\xi} P(e^{ix.\xi}) .$$

C'est une fonction C^∞ ; la définition 1 implique que pour $\xi \to \infty$, on a un développement asymptotique

$$p(x,\xi) \sim \sum p_k(x,\xi) \tag{1.1}$$

où p_k est homogène de degré s_k en ξ .

La condition d'uniformité permet en outre de vérifier que p_k est C^∞ sur $R^n \times (R^n - \{0\})$, et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta \left(p(x,\xi) - \sum_{k<N} p_k(x,\xi)\right) = O\left(|\xi|^{s_N - |\beta|}\right) \quad (\xi \to \infty) \tag{1.2}$$

uniformément quand x reste borné.

Enfin si $f \in C_0^\infty$, on a $f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{ix.\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$ (intégrale convergente dans C^∞) ; il s'ensuit :

(1.3) $$P(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{ix.\xi} p(x,\xi) f(\xi)\, d\xi \, .$$

Réciproquement, Hörmander montre que si $p(x,\xi)$ est une fonction C^∞ arbitraire sur $R^n \times R^n$, vérifiant les conditions asymptotiques (1.1) et (1.2), l'opérateur P défini à partir de $p(x,\xi)$ par la formule (1.3) est pseudo-différentiel. On trouve

(1.4) $$e^{-itg} P(f\, e^{itg}) \sim \sum_{\alpha,k} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha p_k(x, t\xi_x)\, D^\alpha(f\, e^{ith_x})$$

$$\text{avec } \xi_x = \operatorname{grad} g(x) \ , \quad h_x(y) = g(y) - g(x) - \langle y - x, \xi_x \rangle$$

(α parcourt l'ensemble des multi-indices ; on a posé $D^\alpha = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$).

[Remarquons que h_x s'annule à l'ordre 2 en x ; le terme général écrit est donc somme de monômes de degrés $\leq s_k - \frac{|\alpha|}{2}$ en t ; et le développement (1.4) est bien du type décrit dans la définition 1.]

Nous appellerons symbole de P la série formelle $\sigma(P) = \sum p_k(x,\xi)$, partie principale de P le premier terme $p_0(x,\xi)$ (on a donc $e^{-itg} P(f\, e^{itg}) \sim t^{s_0}\, p_0(x, \operatorname{grad} g).f$), degré de P le degré s_0 de $p_0(x,\xi)$.

Il existe toujours un opérateur pseudo-différentiel admettant un symbole donné $\sum p_k(x,\xi)$ (parce qu'il existe toujours une fonction $p(x,\xi)$ vérifiant (1.1) et (1.2), où le développement asymptotique est arbitrairement donné - la démonstration est analogue à celle du théorème de Borel)

§ 2. Propriétés des opérateurs pseudo-différentiels.

1°) Ce sont des opérateurs de Calderon-Zygmund (cela se voit sur l'expression intégrale (1.3)). En particulier si P est de degré s_o , et $\varphi , \psi \in C_o^\infty(V)$, $\varphi P \psi$ se prolonge en un opérateur continu $H^s_{loc}(V) \longrightarrow H^{s-s_o}_{loc}(V)$.

($H^s_{loc}(V)$ est défini localement en transportant par isomorphisme l'espace de Sobolev $H^s(R^n)$).

2°) Si P et Q sont deux opérateurs pseudo-différentiels, l'un des deux étant du type décrit dans la remarque 2, $P \circ Q$ en est un aussi. (On le voit en composant des développements asymptotiques :

$$e^{-itg} PQ(f\, e^{itg}) \sim \sum_{k,\ell} P_k(Q_\ell (f,tg),tg) \qquad (t \to \infty)\ .)$$

Sur R^n , en appliquant (1.4), on voit que $P \circ Q$ a pour symbole

$$\sigma(P \circ Q) = \sum_{\alpha,k,\ell} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha p_k(x,\xi).D_x^\alpha\, q_\ell(x,\xi)\ . \tag{2.1}$$

3°) Si P est un opérateur pseudo-différentiel, son transposé ${}^tP$ en est un aussi. Sur R^n , ${}^tP$ a pour symbole

$$\sigma({}^tP) = \sum_{\alpha,k} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha D_x^\alpha\, p_k(x,-\xi)\ . \tag{2.2}$$

(Nous le vérifions quand $P = \varphi P_1$ où $\varphi \in C^\infty$, et P_1 est la convolution par une distribution T . Alors ${}^tP = {}^tP_1.\varphi$, et ${}^tP_1$ est la convolution par la symétrique de T . La formule (2.2) résulte alors de (2.1). Le cas général se ramène essentiellement à celui-ci.)

De même l'adjoint de P est un opérateur pseudo-différentiel. Sur R^n , P^* a pour symbole

$$\sigma(P^*) = \sum_{\alpha,k} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha D_x^\alpha\, \bar{p}(x,\xi)\ . \tag{2.3}$$

4°) Opérateurs elliptiques :

On dit que P est elliptique si $\sigma_o(P)$ ne s'annule pas. P possède alors une paramétrix : il existe un opérateur pseudo-différentiel E (du type décrit dans la remarque 2) tel que $P \circ E - 1$ et $E \circ P - 1$ soient régularisants. (La formule (2.1) donne une condition nécessaire et suffisante sur le symbole de E' (resp. E'') pour que celui-ci soit une paramétrix à gauche (resp. à droite) de P ; elle permet de le calculer effectivement si $\sigma_o(P)$ est inversible. Enfin $E' \circ P \circ E''$ diffère de E' et de E'' par un opérateur régularisant ; donc E' et E'' ont même symbole.)

Nous terminons ce paragraphe par deux autres développements asymptotiques (on suppose $U = R^n$).

5°.) Régularisation :

P désigne un opérateur pseudo-différentiel de degré s_o. Soit $\varphi \in C_o^\infty(R^n)$ une fonction positive, d'intégrale 1. Posons $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\,\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$.

Pour toute $f \in H^s(R^n)$, à support compact, $[P(\varphi_\varepsilon * f) - \varphi_\varepsilon * P(f)]$ parcourt un borné de $H_{loc}^{s-s_o+1}$ quand $\varepsilon \to 0$.

(La démonstration résulte essentiellement du fait que c'est vrai si P est la multiplication par une fonction C^∞, et aussi bien sûr si P est un opérateur de convolution).

6°) Symbole local.

H_t^x désigne l'homothétie de centre x et de rapport t. Si P est un opérateur pseudo-différentiel, de symbole $\sum p_k(x,\xi)$, on a quand $t \to \infty$ un développement asymptotique dans $C^\infty(R^n)$

(2.4) $$S_t^{x,\xi}(f) = H_t^x\, e^{-it^2 x.\xi}\, P(e^{it^2 x.\xi}\, H_{1/t}^x\, f) \sim$$

$$\sim \sum_{\alpha,\beta,k} \frac{t^{2s_k - |\alpha+\beta|}}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta} p_k(x,\xi)(y-x)^{\alpha} D^{\beta} f\ .$$

Démonstration.

On peut toujours supposer P défini par la formule (1.3). Un changement de variable dans l'intégrale montre que

$$S_t^{x,\xi}(f)(x+y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i(x+y).\eta}\, p(x+\frac{y}{t}\ ,\ t^2\xi + t\eta\ )\ \hat{f}(\eta)\ d\eta\ .$$

On met alors le résultat en évidence en coupant l'intégrale en

$\int_{|\eta| > \frac{t}{2}|\xi|} + \int_{|\eta| < \frac{t}{2}|\xi|}$, et en utilisant les formules (1.1) et (1.2) et un développement de Taylor de p , ce qui donne quand $t \longrightarrow \infty$

$$p(x+\frac{y}{t}\ ,\ t^2\xi + t\eta) \sim \sum_{\alpha,\beta,k} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta} p_k(x,\xi)\, t^{2s_k} \left(\frac{y}{t}\right)^{\alpha} \left(\frac{\eta}{t}\right)^{\beta}\ .$$

Si r_N désigne le reste du développement à l'ordre $-N$, on vérifie que $t^N r_N$ reste borné dans C^{∞} . On peut donner des estimations plus globales : par exemple si P est de la forme $\varphi P' \psi$ où φ , ψ sont à supports compacts, $t^N r_N$ reste borné dans $H^s(R^n)$ pour tout s , et toute $f \in C_0^{\infty}(R^n)$.

Remarque.- La définition 1 s'étend sans modification aux opérateurs sur les sections d'un fibré (à valeurs dans l'espace des sections d'un autre fibré). Toutes les formules ci-dessus restent valables (avec quelques modifications évidentes). La partie principale du symbole s'interprète comme section d'un fibré d'applications linéaires sur le fibré cotangent à V .

§ 3. Inégalité sous-elliptique.

Hörmander l'étudie dans [3] pour les systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels. Nous traitons ici le cas d'un opérateur numérique (il est plus simple), d'après un exposé de A. P. Calderon (Paris, Janvier 1966).

Nous ne considérons dans ce paragraphe que les opérateurs pour lesquels les degrés s_k qui interviennent dans la définition 1 diffèrent tous par des entiers (la formule (1,4) montre qu'il en existe ; et tout marche pour ceux là comme dans le cas général). Soit P un tel opérateur.

DÉFINITION 3.1.- On dit que P est sous-elliptique si pour tout ouvert borné U de V il existe une constante c telle que

$$(3.1) \qquad |f|_{s-1/2} \leq c(|Pf_U|_{s-s_o} + |f|_{s-1}) \quad \text{pour} \quad \operatorname{supp} f \subset U .$$

s_o désigne le degré de P, Pf_U la restriction de Pf à U. $|f|_s$ désigne la norme de f dans H^s (peu importe la norme choisie).

Remarquons que si E est elliptique, $P \circ E$ et $E \circ P$ sont sous-elliptiques si et seulement si P l'est (comme E possède une paramétrix, on a $|f|_s \leq c(|Pf_U|_{s-s'_o} + |f|_{s-1})$ quand $\operatorname{supp} f \subset U$, s'_o désignant le degré de E, et c une constante convenable). Il s'en suit que l'inégalité (3.1) est vraie pour tout s si elle l'est pour un. Et on pourra toujours se ramener au cas où P est de degré $\frac{1}{2}$.

Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que P soit sous-elliptique : posons

$$C = \frac{1}{2}[P^*,P]$$

P^* désignant l'adjoint de P (on se donne une mesure positive sur V pour définir P^* ; de toute façon le résultat final ne dépend pas de la mesure choisie).

Sur $\mathbb{R}^n$, la partie principale du symbole de C est

$$c_0(x,\xi) = \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial \overline{p_0}}{\partial \xi_k} D_k p_0 - \frac{\partial p_0}{\partial \xi_k} D_k \overline{p_0}\right) = \operatorname{Im} \sum \frac{\partial \overline{p_0}}{\partial \xi_k} \frac{\partial p_0}{\partial x_k} . \tag{3.2}$$

THÉORÈME.- P <u>est sous-elliptique si et seulement si</u>

$$c_0(x,\xi) > 0 \qquad \text{quand} \quad p_0(x,\xi) = 0 \,,\ \xi \neq 0. \tag{3.3}$$

Remarquons que l'assertion (3.3) ne change pas si on compose P avec un opérateur elliptique (on a $\sum \frac{\partial \overline{e_0 p_0}}{\partial \xi_k} \frac{\partial e_0 p_0}{\partial x_k} = \overline{e_0}\, e_0 \sum \frac{\partial \overline{p_0}}{\partial \xi_k} \frac{\partial p_0}{\partial x_k}$ si $p_0 = 0$). Pour la démonstration, nous pourrons donc supposer $V = \mathbb{R}^n$ (la propriété à démontrer est locale), P de degré $\frac{1}{2}$, et $s = \frac{1}{2}$ dans la formule (3.1).

<u>C'est nécessaire</u> : nous appliquons (2.4) à $P' = \varphi P \varphi$, où $\varphi \in C_0^\infty$ et $\varphi = 1$ au voisinage de x, en remarquant que l'adjoint de l'homothétie H_t^x est $t^n H_{1/t}^x$. On a donc

$$| P'(e^{it^2 x.\xi} H_{1/t}^x f)|_0 = t^{-n/2} | S_t^{x,\xi} f|_0 \ ,$$

et on sait que si $p_0(x,\xi) = 0$,

$$S_t^{x,\xi} f(y) = \sum \frac{\partial}{\partial \xi_k} p_0(x,\xi)\, D_k f + \sum \frac{\partial}{\partial x_k} p_0(x,\xi).(y-x)_k f + \frac{1}{t} r$$

où r reste borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ quand $t \to \infty$ si $f \in C_0^\infty$.

Comme $|g|_{-1/2} \big/ |g|_0$ tend vers 0 quand $\operatorname{supp} g$ tend vers x, on a

$$\left| e^{it^2 x.\xi} H_{1/t}^x \right|_0 = t^{-n/2} |f|_0 \leq c \left| P'(e^{it^2 x.\xi} H_{1/t}^x f \right|_0$$

pour t assez grand. A la limite, on en déduit

$$|f|_0 \leq c |A(D) f + B(y) f|_0 \qquad \text{pour toute } f \in C_0^\infty \ ;$$

(avec $A(D) = \sum \frac{\partial}{\partial \xi_k} p_0(x,\xi) D_k$, $B(y) = \sum \frac{\partial}{\partial x_k} p_0(x,\xi)\, y_k$). On sait (inégalités de Trèves) qu'une telle inégalité a lieu si et seulement si $2c^2 \operatorname{Im} B(\bar{A}) \geq 1$ ($\bar{A}$ désigne le vecteur de coordonnées $\frac{\partial}{\partial \xi_k} \overline{p_o}(x,\xi)$) (cf. par exemple [1], chap. VIII, § 1). Comme $\operatorname{Im} B(\bar{A}) = c_o(x,\xi)$, la démonstration est achevée.

<u>C'est suffisant</u> : soit U un ouvert borné de R^n , et $\varphi \in C_o^\infty$ égale à 1 au voisinage de $\bar{U}$. Posons :

$$P' = \varphi P \varphi = M + iN$$

où M et N sont auto-adjoints. Alors,

$$C' = \frac{1}{2} [P'^*, P'] = i [M,N]$$

a même symbole que C au voisinage de $\bar{U}$. On a :

$$|P'f|_o^2 = (P'^*P'f \mid f) = |Mf|_o^2 + |Nf|_o^2 + (C'f|f) .$$

Désignons par J l'opérateur pseudo-différentiel

$$J(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{ix.\xi} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

On a donc $(g|Jg) = |g|_{-1/2}^2$ pour $g \in C_o^\infty$. On sait que pour tout t , on a avec une constante $c(t)$ convenable

$$|g|_o^2 \geq t\, |g|_{-1/2}^2 - c(t)\, |g|_{-1}^2 .$$

Comme M et N sont de degré $1/2$, on en déduit avec une autre constante

$$|P'f|_o^2 \geq (Kf|f) - c'(t)|f|_{-1/2}^2$$

avec $K = t(MJM + NJN) + C'$.

K a pour symbole principal $k_o(x,\xi) = \frac{t}{|\xi|} |p_o(x,\xi)|^2 + c(x,\xi)$ au voisinage de U . Pour t assez grand, cette quantité est > 0 , et K coïncide au voisinage de U avec un opérateur de la forme $L^*L + J^{1/2}RJ^{1/2}$, où L est elliptique d'ordre 0 , R d'ordre 0 . On a alors pour $\operatorname{supp} f \subset U$

$$(Kf|f) = (Lf|Lf) + (RJ^{1/2}f|J^{1/2}f) \geq c(|f|_o^2 - |f|_{-1/2}^2) .$$

Ces deux dernières inégalités impliquent (3.1).

Nous terminons en indiquant quelques conséquences de la sous-ellipticité.

1°) Si P est sous-elliptique, et $f \in \mathcal{E}'$, $Pf \in H^{s-s_0}$ implique $f \in H^{s-1/2}$ (s_0 désigne le degré de P). (En utilisant le § 2, n° 5 (lemme de Friedrichs), on voit que $f * \varphi_\varepsilon$ reste borné dans $H^{t+1/2}$ donc $f \in H^{t+1/2}$ si $f \in H^t$ et $t \leq s-1$.)

En particulier le noyau de P ne contient que des fonctions C^∞. Si V est compacte, (3.1) montre qu'il est de dimension finie.

2°) L'inégalité (3.1) implique que pour tout $x \in V$ et toute $g \in H^{s-s_0}$ à support assez voisin de x, l'équation ${}^tPf = g$ a une solution dans $H^{s-1/2}(V)$. (Nous dirons que ${}^tP$ a la propriété d'existence sous-elliptique.)

<u>Au contraire si</u> $c_0(x,\xi) < 0$ <u>en un point où</u> $p_0(x,\xi) = 0$, Hörmander montre en construisant des solutions approchées que

3°) Aucune inégalité du type $|f|_s \leq c(|Pf|_t + |f|_{s-r})$ n'est vraie. Il n'y a donc pas de théorème de régularité pour les solutions de P.

4°) Pour tout voisinage U de x, ${}^tP(\mathcal{E}') \cap C_0^\infty(U)$ est un sous-espace maigre (au sens des catégories de Baire) de $C_0^\infty(U)$. Il n'y a donc pas de théorème d'existence pour ${}^tP$.

Notons que ${}^tP$ est sous-elliptique si $c_0(x,\xi) < 0$ quand $p_0(x,\xi) = 0$, $\xi \neq 0$.

Nous ne donnons pas ici d'autre indication sur la démonstration de ces deux dernières propriétés, pour lesquelles nous renvoyons à [3], (cf. aussi [1] ch. VI, et [5]).

§ 4. Application au problème de Neumann à dérivée oblique.

Nous la donnons dans le cas du Laplacien ordinaire, sur une boule fermée B de bord S dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $R : C^\infty(B) \times C^\infty(S) \to C^\infty(B)$ l'opérateur qui résout le problème de Dirichlet. On a

$$R(g,u) = G(g) + K(u)$$

où G est l'opérateur de Green, et K le noyau de Poisson. On sait que R se prolonge pour $s \geqslant 1$ en un isomorphisme $H^{s-2}(B) \times H^{s-1/2}(S) \xrightarrow{\sim} H^s(B)$.

Composons R avec l'opérateur du problème de Neumann $f \to (\Delta f, Xf)$ (Xf désignant la restriction à S de la dérivée de f en question). On obtient l'opérateur $P : C^\infty(B) \times C^\infty(S) \to C^\infty(B) \times C^\infty(S)$, de matrice triangulaire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ XG & XK \end{pmatrix}$$

XG est continu $H^s(B) \to H^{s-3/2}(S)$ pour tout $s \geqslant 2$.

Si on transporte le problème par inversion, K devient le noyau de Poisson ordinaire sur le demi-espace $x_n \geqslant 0$:

$$K(u) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int e^{ix'.\xi'} e^{-x_n|\xi'|} \hat{u}(\xi')\, d\xi' .$$

On voit sur cette expression que $\frac{\partial}{\partial x_n} Ku(x',0) = -I(u)$ où I est l'opérateur pseudo-différentiel

$$I(u) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int e^{ix'.\xi'} |\xi'|\, \hat{u}(\xi')\, d\xi' .$$

Il s'en suit que XK est un opérateur pseudo-différentiel sur S, du type étudié au § 3. Si on écrit

$$X = X' + aX_n$$

où X' est tangent à S, et X_n est le vecteur normal unitaire intérieur, on voit que

$Q = X.K = X' + aX_n.K$ a pour symbole principal

$$q_o(x',\xi') = iX'.\xi' - a\,|\xi'| \qquad (x' \text{ désigne le point courant sur } S)$$

celui-ci s'annule pour $a(x') = 0$, $\xi' \perp X'(x')$;

(En particulier q_o ne s'annule pas si a ne s'annule pas ; le problème est alors elliptique).

Enfin $C = \frac{1}{2}\,[Q^*,Q]$ a pour symbole principal (cf. (3.2))

$$c_o(x',\xi') = \operatorname{Im}\left[\operatorname{grad}_{\xi'}\,[-iX'.\xi' - a|\xi'|]\,.\,\operatorname{grad}_{x'}\,[iX'.\xi' - a|\xi'|]\right].$$

Pour $q_o(x',\xi') = 0$ (donc $a(x') = 0$), cela donne

$$c_o(x',\xi') = \operatorname{Im}\,[-iX'.\operatorname{grad}_{x'}(iX'.\xi' - a|\xi'|)] = (X'.\operatorname{grad} a)|\xi'| \;.$$

Nous pouvons donc conclure : Q est sous-elliptique si et seulement si $a(x')$ n'a que des zéros simples, et si sur la courbe $a = 0$ X' pointe dans la direction $a > 0$.

Alors, $\Delta f \in H^{s-2}(B)$ et $Xf \in H^{s-3/2}(S)$ impliquent $f \in H^{s-1/2}(B)$.

En particulier f est C^∞ si Δf et Xf le sont ; et l'espace des f telles que $\Delta f = 0$ et $Xf = 0$ est de dimension finie.

Par contre l'équation $\Delta f = g$, $Xf = u$ n'a pas de solution en général.

Si au contraire a n'a que des zéros simples et X' pointe dans la direction $a < 0$, le problème "a des solutions" (l'image de $H^{s-1/2}(B)$ recouvre un sous-espace fermé de codimension finie de $H^{s-2}(B) \times H^{s-3/2}(S)$ pour $s \geq 2$) mais on ne peut prouver aucun théorème de régularité. (C'est par exemple le cas si X est un champ de vecteurs constant.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER - Linear Partial differential operators. Springer Verlag, 1963.

[2] HÖRMANDER - Pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. (1965).

[3] HÖRMANDER - Pseudo-differential operators and non elliptic Boundary Problems, Ann. of Math., Princeton, (Janv. 1966), pp. 129-209.

[4] J. J. KOHN et L. NIRENBERG - On the algebra of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. (1965).

[5] J. J. KOHN et L. NIRENBERG - Non coercive boundary Problems, Comm. Pure Appl. Math, (1965).

[6] R. T. SEELEY - Singular Integrals and boundary value Problems. A paraître.

[7] A. UNTERBERGER et Mme J. BOKOBZA - C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259, p. 1612, (1964).

-:-:-:-