SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ADRIEN DOUADY

Platitude et privilège

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 303, p. 385-390
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__385_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n°303

Février 1966

PLATITUDE ET PRIVILÈGE

par Adrien DOUADY

1. L'espace $B(K;F)$.

Nous appellerons polycylindre tout ensemble $K \subset \underline{\underline{C}}^n$ de la forme $K_1 \times \dots \times K_n$, où pour tout i, K_i est un compact convexe de $\underline{\underline{C}}$.

Si K est un polycylindre d'intérieur non vide et si F est un espace de Banach, on notera $B(K;F)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur K, analytiques sur $\overset{\circ}{K}$, à valeurs dans F.

On notera $B(K)$ l'algèbre de Banach $B(K;\underline{\underline{C}})$.

Si F est un fibré vectoriel banachique analytique sur un ouvert U de $\underline{\underline{C}}^n$ et $K \subset U$, on notera $B(K;F)$ l'espace de Banach des sections continues de F sur K, analytiques sur $\overset{\circ}{K}$. Si $\underline{L}$ est un faisceau analytique localement libre de type fini sur U, on posera $B(K;\underline{L}) = B(K;L)$, où L est le fibré vectoriel correspondant à $\underline{L}$.

2. Polycylindres privilégiés.

Soient U un ouvert de $\underline{\underline{C}}^n$, $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur U, $K \subset U$ un polycylindre. D'après le théorème des syzygies et le théorème A de H. Cartan, il existe une résolution finie

$$\underline{L}_* : 0 \to \underline{L}_n \to \dots \to \underline{L}_0 \to \underline{F} \to 0$$

de $\underline{F}$ au voisinage de K, où les $\underline{L}_i$ sont des faisceaux localement libres, voire libres.

A cette résolution correspond un complexe d'espaces de Banach :

$$B(K;\underline{L}_*) \; : \; 0 \to B(K;\underline{L}_n) \to \dots \to B(K;\underline{L}_0) \to 0 \; .$$

DÉFINITION 1.- <u>Nous dirons que</u> K <u>est un polycylindre</u> <u>$\underline{F}$-privilégié si</u> $B(K;\underline{L}_*)$ <u>est un complexe direct acyclique en degré</u> > 0.

Dire que $B(K;\underline{L}_*)$ est un complexe direct signifie que, pour tout i, $B(K;\underline{L}_i) \to B(K;\underline{L}_{i-1})$ est un homomorphisme strict (i.e. d'image fermée) dont le noyau et l'image admettent un supplémentaire topologique. La définition 1 est justifiée par le fait que cette propriété ne dépend pas du choix de la résolution $\underline{L}_*$.

Si K est un polycylindre $\underline{F}$-privilégié, nous poserons

$$B(K;\underline{F}) = \operatorname{Coker}(B(K;\underline{L}_1) \to B(K;\underline{L}_0)) \; .$$

$B(K;\underline{F})$ est un $B(K)$-module de Banach qui, à un isomorphisme canonique près, ne dépend pas du choix de la résolution $\underline{L}_*$.

DÉFINITION 2.- <u>Soit</u> x <u>un point de</u> U. <u>Nous dirons que</u> K <u>est un voisinage</u> <u>$\underline{F}$-privilégié de</u> x <u>si</u> :

(i) K <u>est un voisinage de</u> x,

(ii) K <u>est un polycylindre</u> <u>$\underline{F}$-privilégié</u>,

(iii) <u>l'application naturelle</u> $B(K;\underline{F}) \to \underline{F}_x$ <u>est injective</u>.

Nous nous proposons d'indiquer la démonstration du théorème d'existence :

THÉORÈME 1.- <u>Soient</u> U <u>un ouvert de</u> $\underline{\underline{C}}^n$ <u>et</u> $\underline{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur</u> U. <u>Tout point</u> x <u>de</u> U <u>admet un système fondamental de voisinages</u> <u>$\underline{F}$-privilégiés.</u>

Au cours de la démonstration, on utilise un résultat (Théorème 2 ci-dessous) qui présente un intérêt propre, car il permet d'exploiter les hypothèses de platitude.

3. Propriétés élémentaires des polycylindres et voisinages privilégiés.

PROPOSITION 1.- *Soit* $0 \to \underline{F}' \to \underline{F} \to \underline{F}'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents sur* U . *Si* K *est un polycylindre privilégié (resp. un voisinage privilégié de* x) *pour* $\underline{F}'$ *et* $\underline{F}''$, *il l'est aussi pour* $\underline{F}$ *et*

$$0 \to B(K;\underline{F}') \to B(K;\underline{F}) \to B(K;\underline{F}'') \to 0$$

est une suite exacte directe.

PROPOSITION 2.- *Soient* U' *et* U'' *des ouverts de* $\underline{\underline{C}}^{n'}$ *et* $\underline{\underline{C}}^{n''}$ *respectivement,* $\underline{F}'$ *et* $\underline{F}''$ *des faisceaux analytiques sur* U' *et* U''. *Définissons le faisceau analytique cohérent* $\underline{F} = \underline{F}' \widehat{\otimes} \underline{F}''$ *sur* $U = U' \times U''$ *par*

$$\underline{F}_x = \underline{F}'_{x'} \otimes_{\underline{O}_{U',x'}} \underline{O}_{U,x} \otimes_{\underline{O}_{U'',x''}} \underline{F}''_{x''} \quad \text{pour} \quad x = (x',x'') .$$

Si K' *et* K'' *sont des polycylindres privilégiés (resp. des voisinages privilégiés de* x' et x'') *pour* $\underline{F}'$ *et* $\underline{F}''$, *le polycylindre* $K = K' \times K''$ *est privilégié (resp. est un voisinage privilégié de* $x = (x',x'')$) *pour* $\underline{F}$, *et*

$$B(K;\underline{F}) = B(K';\underline{F}') \hat{\otimes} B(K'';\underline{F}'') .$$

4. Platitude et privilège.

Si $f : X' \to X$ est un morphisme d'espaces analytiques, et $\underline{F}$ un faisceau analytique sur X , on note $f^*\underline{F}$ le faisceau analytique sur X' obtenu par image réciproque et extension des scalaires.

Soit $\underline{F}$ un faisceau analytique sur $S \times X$. Pour tout point s de S, on note $\underline{F}(s)$ le faisceau $i_s^*\underline{F}$ sur X, où $i_s : X \to S \times X$ est le morphisme d'injection défini par s. On a :

$$(1) \qquad \underline{F}(s)_x = \underline{\underline{C}} \otimes_{\underline{O}_{S,s}} \underline{F}_{s,x} \ .$$

On dit que $\underline{F}$ est S-plat si $\underline{F}_{s,x}$ est un $\underline{O}_{S,s}$-module plat pour tout (s,x). Cela équivaut à

$$(P) \quad \mathrm{Tor}_q(\underline{O}_{X,x}\ , \underline{F}_{s,x}) = 0 \quad \text{pour } q > 0\ , \text{ le Tor étant pris sur } \underline{O}_{S\times X,(s,x)}\ .$$

<u>Remarque</u>. L'égalité (1) et l'équivalence de la platitude avec (P) sont particulières à la dimension finie et n'auraient plus lieu si l'on prenait pour S un espace analytique banachique. C'est aux faisceaux vérifiant (P) que s'étendent dans ce cas les propriétés fondamentales des faisceaux plats.

THÉORÈME 2.- <u>Soient</u> S <u>un espace analytique</u>, U <u>un ouvert de</u> $\underline{\underline{C}}^n$, $\underline{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent</u> S-<u>plat sur</u> $S \times U$, <u>et</u> $K \subset U$ <u>un polycylindre. L'ensemble</u> S' <u>des points</u> s <u>de</u> S <u>tels que</u> K <u>soit</u> $\underline{F}(s)$-<u>privilégié est ouvert dans</u> S <u>et les espaces de Banach</u> $B(K;\underline{F}(s))$ <u>sont les fibres d'un fibré vectoriel banachique</u> (localement trivial et analytique) $B(K;\underline{F})$ <u>sur</u> S'.

LEMME.- <u>Soient</u> S <u>un espace analytique et</u>

$$L_* : 0 \to L_n \to \dots \to L_0 \to 0$$

<u>un complexe de fibrés vectoriels banachiques sur</u> S. <u>L'ensemble</u> S' <u>des points</u> s <u>de</u> S <u>tels que</u> $L_*(s)$ <u>soit direct et acyclique en degré</u> >0 <u>est ouvert dans</u> S <u>et les espaces de Banach</u> $H_0(L_*(s)) = \mathrm{Coker}\ (L_1(s) \to L_0(s))$ <u>sont les fibres d'un fibré vectoriel sur</u> S'.

<u>Principe de la démonstration du Théorème</u> 2. Ce théorème est trivial dans le

cas où $\underline{F}$ est un faisceau libre sur $S \times X$. Soit s un point de S' et prenons une résolution de $\underline{F}(s)$ sur un voisinage de K. On montre, en utilisant la platitude et les théorèmes A et B de H. Cartan que cette résolution provient d'une résolution $\underline{L}_*$ de $\underline{F}$ sur un voisinage de $\{s\} \times K$, que l'on peut supposer de la forme $T \times V$, où T et V sont des voisinages de s et K dans S et U respectivement. On a sur T un complexe de fibrés vectoriels :

$$B(K;\underline{L}_*) : 0 \to B(K;\underline{L}_n) \to \dots \to B(K;\underline{L}_0) \to 0 ;$$

ce complexe est direct et acyclique en degré > 0 au point s, donc sur un voisinage T' de s dans T, et sur T' le fibré $H_0(B(K;\underline{L}_*))$ a pour fibre $B(K;\underline{F}(s'))$ en $s' \in T'$. Comme S' contient T', S' est un voisinage de s dans S. On montre ainsi que S' est ouvert dans S et les fibrés construits localement se recollent en un fibré sur S'.

PROPOSITION 3. <u>Soient</u> U' <u>et</u> U'' <u>des ouverts de</u> $\underline{\underline{C}}^{n'}$ <u>et</u> $\underline{\underline{C}}^{n''}$, $U = U' \times U'' \subset \underline{\underline{C}}^{n}$, <u>où</u> $n = n' + n''$, <u>et</u> $\underline{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur</u> U. <u>Soient</u> x' <u>un point de</u> U' <u>et</u> $K'' \subset U''$ <u>un polycylindre</u>. <u>Si</u> K'' <u>est privilégié (resp. est un voisinage privilégié de</u> x'') <u>pour</u> $\underline{F}(x')$, <u>il existe un voisinage</u> V' <u>de</u> x' <u>dans</u> U' <u>tel que, pour tout polycylindre</u> K' <u>contenu dans</u> V' <u>(resp. qui soit un voisinage de</u> x' <u>dans</u> V'), <u>le polycylindre</u> $K = K' \times K''$ <u>soit privilégié (resp. soit un voisinage privilégié de</u> (x',x'')) <u>pour</u> $\underline{F}$ <u>et</u> $B(K;\underline{F}) = B(K';B(K'';\underline{F}))$.
<u>On suppose que</u> $\underline{F}$ <u>est</u> U'<u>-plat</u>.

5. <u>Principe de la démonstration du Théorème</u> 1.

La démonstration se fait par récurrence sur n : identifions $\underline{\underline{C}}^n$ à $\underline{\underline{C}} \times \underline{\underline{C}}^{n-1}$; on peut supposer U de la forme $U' \times U''$, et poser $x = (x',x'')$. On se ramène par dévissage grâce à la Proposition 1 aux deux cas particuliers suivants :

(a) $\underline{m}_{x'} \underline{F}_x = 0$, où $\underline{m}_{x'}$ est l'idéal maximal de $\underline{O}_{U',x'}$;

(b) $\underline{F}_x$ est un $\underline{O}_{U',x'}$-module sans torsion, donc plat, car $\underline{O}_{U',x'}$ est un anneau principal.

Le cas (a) se traite au moyen de la proposition 2 en remarquant que $\underline{F} = C_{x'} \otimes \underline{F}(x')$, où $C_{x'}$ est le faisceau cohérent sur U' dont la fibre en x' est $\underline{\underline{C}}$. Le cas (b) se traite par la proposition 3.

BIBLIOGRAPHIE

A. DOUADY - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Thèse (en cours de soutenance), Annales de l'Institut Fourier, en cours de parution, §§ 7 et 8.

H. CARTAN - Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Sup., t. 61, 1944, 149-197.

H. GRAUERT - Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, Publ. I.H.E.S., 5, 1960, Bures s/ Yvette, P.U.F. édit. Paris.