HENRI CARTAN

Thèse de Douady

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 296, p. 271-286
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__271_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 296

Novembre 1965

THESE DE DOUADY

par Henri CARTAN

Première partie : Position du problème.

Admettons pour un instant la notion classique d'espace analytique (complexe) ; "classique" signifie : au sens de Grothendieck [1] , autrement dit les anneaux locaux peuvent avoir des éléments nilpotents. Si X est un espace analytique, on a la notion de sous-espace analytique de X (cf. ci-dessous). Considérons l'ensemble de tous les sous-espaces analytiques compacts de X ; Douady munit cet ensemble d'une structure d'espace analytique. Le problème précis qu'il résout sera formulé plus loin. Dans le cas particulier où X est l'espace projectif complexe $P_n(\mathbb{C})$, le problème revient à munir d'une structure d'espace analytique l'ensemble de tous les sous-espaces analytiques (fermés) de $P_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les sous-variétés algébriques de $P_n(\mathbb{C})$. On obtient alors un "schéma de Hilbert".

Rappelons qu'un espace analytique est défini par un couple $(X,\underline{O}_X)$, où X est un espace topologique séparé, et $\underline{O}_X$ est un faisceau d'anneaux locaux sur X ; X s'appelle l'espace topologique sous-jacent à l'espace analytique, $\underline{O}_X$ est le faisceau structural. De plus certaines conditions doivent être remplies. Pour les énoncer avec précision, on définit d'abord la catégorie A des espaces annelés : un objet de A est un couple $(X,\underline{O}_X)$ comme ci-dessus (sans aucune condition supplémentaire) ; un morphisme $f : (X,\underline{O}_X) \to (Y,\underline{O}_Y)$ est un couple (f_o,f_1), où $f_o : X \to Y$ est une application continue des espaces sous-jacents, et $f_1 : (f_o)^{-1}(\underline{O}_Y) \to \underline{O}_X$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux sur X. On a donc une notion d'isomorphisme d'espaces annelés ; on sait aussi ce que c'est que la structure annelée induite par $(X, \underline{O}_X)$ sur un sous-espace de X. On prend alors comme "modèles" les espaces annelés du type suivant : dans un ouvert V d'un espace numérique $\mathbb{C}^n$, on prend un faisceau cohérent d'idéaux $\underline{I}$ (sous-faisceau cohérent du faisceau $\underline{O}_V$ des germes de fonctions numériques holomorphes dans V), on prend pour X le "support" du faisceau quotient $\underline{O}_V/I$ (ensemble des points $x \in V$ tels que l'idéal I_x soit distinct de l'anneau $\underline{O}_{V,x}$), et on prend pour faisceau structural $\underline{O}_X$ le faisceau induit sur X par $\underline{O}_V/\underline{I}$. Cela dit, un espace analytique est, par définition un espace annelé $(X, \underline{O}_X)$ tel que X soit séparé et puisse être recouvert par des ouverts U_i dont chacun (muni de la structure annelée induite) soit isomorphe à un modèle.

Un morphisme d'espaces analytiques est, par définition, un morphisme des espaces annelés qui les définissent. On dit qu'une application $\phi : X \to Y$ est holomorphe pour les structures $\underline{O}_X$ (resp. $\underline{O}_Y$) d'espace analytique de X (resp. Y) s'il existe un morphisme $(f_o, f_1) : (X, \underline{O}_X) \to (Y, \underline{O}_Y)$ tel que $f_o = \phi$. On prendra garde qu'en général un tel morphisme n'est pas déterminé par la connaissance de l'application holomorphe f_o. Il l'est toutefois lorsque l'espace X est réduit, c'est-à-dire lorsque le faisceau $\underline{O}_X$ n'a pas d'éléments nilpotents.

Considérons en particulier les morphismes de $(X, \underline{O}_X)$ dans $\mathbb{C}$, muni du faisceau structural $\underline{O}_{\mathbb{C}}$ évident ; un tel morphisme associe à toute section du faisceau $\underline{O}_{\mathbb{C}}$ une section de $\underline{O}_X$; en particulier, à l'application identique $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ elle associe une section $s \in \Gamma(X, \underline{O}_X)$ (notation pour le module des sections). On montre que s caractérise le morphisme donné $(X, \underline{O}_X) \to (\mathbb{C}, \underline{O}_{\mathbb{C}})$, et que réciproquement toute section provient d'un morphisme. La fonction holomorphe $f_o : X \to \mathbb{C}$ sous-jacente au morphisme défini par $s \in \Gamma(X, \underline{O}_X)$ est celle qui, en chaque point $x \in X$, prend pour valeur l'image de $s(x) \in \underline{O}_{X,x}$ par l'homomorphisme d'augmentation $\underline{O}_{X,x} \to \mathbb{C}$ de l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$.

Nous supposons connue la notion de faisceau cohérent sur un espace annelé (cf. [2]) ; elle vaut donc pour un espace analytique. Rappelons (théorème d'Oka) que le faisceau structural $\underline{O}_X$ d'un espace analytique est cohérent (comme faisceau de $\underline{O}_X$-modules).

Etant donné un espace analytique $(X,\underline{O}_X)$, un <u>sous-espace analytique</u> $(Y,\underline{O}_Y)$ est défini par la donnée d'un sous-faisceau cohérent $\underline{I}$ de $\underline{O}_X$ (faisceau cohérent d'idéaux) ; alors on prend pour Y le support du faisceau cohérent $\underline{O}_X/\underline{I}$, et pour faisceau structural $\underline{O}_Y$ le faisceau induit par $\underline{O}_X/I$ sur le sous espace Y. Les sous-espaces analytiques compacts de $(X,\underline{O}_X)$ sont donc en correspondance bijective avec les faisceaux quotients de $\underline{O}_X$ qui sont <u>cohérents et à support compact</u>.

Soit, en général, un morphisme d'espaces analytiques

$$f = (f_o,f_1) : (Y,\underline{O}_Y) \to (X,\underline{O}_X),$$

et soit $\underline{F}$ un faisceau cohérent sur X. Son image réciproque $(f_o)^{-1}(\underline{F})$ est un faisceau de $(f_o)^{-1}(\underline{O}_X)$-modules ; comme $f_1 : (f_o)^{-1}(\underline{O}_X) \to \underline{O}_Y$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux, on peut prendre le produit tensoriel

$$\underline{O}_Y \otimes_{f_o^{-1}(\underline{O}_X)} f_o^{-1}(\underline{F}) ,$$

qui est un faisceau de $\underline{O}_Y$-modules sur Y. On vérifie qu'il est cohérent (regarder une présentation finie de $\underline{F}$) ; on le note $f^*(\underline{F})$. Observer que $f^*(\underline{O}_X)$ s'identifie à $\underline{O}_Y$. On a une propriété évidente de transitivité :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

<u>Produit de deux espaces analytiques</u> : les produits existent dans la catégorie des espaces analytiques : si X et Y sont deux espaces analytiques (on omet de noter leurs faisceaux structuraux, pour abréger l'écriture), il existe un espace analytique Z muni de deux morphismes $p_1 : Z \to X$ et $p_2 : Z \to Y$ tels que l'application qu'ils définissent

$$\mathrm{Mor}\,(T,Z) \to \mathrm{Mor}(T,X) \times \mathrm{Mor}(T,Y)$$

soit bijective pour tout espace analytique T. Un tel espace Z se note $X \times Y$. L'espace topologique sous-jacent au produit est le produit des espaces topologiques sous-jacents à X et Y.

Soit maintenant X un espace analytique, et soit S un autre espace analytique (espace de paramètres). On se propose de dire quand un faisceau cohérent

$\underline{F}(s)$ sur X, dépendant du paramètre $s \in S$, dépend analytiquement de s. Observons d'abord que la donnée d'un faisceau cohérent $\underline{F}$ sur $S \times X$ définit, pour chaque point $s \in S$, un faisceau cohérent $\underline{F}(s)$ sur X, comme suit : soit $i_s : X \to S \times X$ l'injection $x \to (s,x)$; on pose

$$\underline{F}(s) = (i_s)^*(\underline{F}) ,$$

et on l'appelle la <u>fibre</u> de $\underline{F}$ au-dessous de s.

Observons que si l'on part d'un faisceau cohérent $\underline{E}$ sur X, et qu'on pose $\underline{F} = p^*(\underline{E})$, où $p : S \times X \to X$ désigne le morphisme de projection, le faisceau $\underline{F}(s)$ s'identifie à $\underline{E}$ pour tout $s \in S$ puisque $p \circ i_s$ est le morphisme identique de X. On peut dire que $p^*(\underline{E})$ définit un <u>faisceau constant</u> au-dessus de X.

<u>Définition</u> : $\underline{F}$ (faisceau cohérent sur $S \times X$) est S-<u>plat</u> si, pour tout point $(s,x) \in S \times X$, on a

$$(1) \qquad \mathrm{Tor}_k^{\underline{O}_{S \times X,(s,x)}}(\underline{O}_{X,x} , \underline{F}_{s,x}) = 0 \text{ pour k entier } \geq 1,$$

en considérant que $\underline{O}_{X,x}$ est un module sur $\underline{O}_{S \times X,(s,x)}$ par l'homomorphisme $\underline{O}_{S \times X,(s,x)} \to \underline{O}_{X,x}$ défini par le morphsime d'injection i_s. Noter que Tor_o n'est autre que $\underline{F}(s)_x$.

Par exemple, si $\underline{E}$ est cohérent sur X, $p^*(\underline{E})$ est S-plat. (<u>Critère de S-platitude</u> : le morphisme de projection $S \times X \to S$ définit $F_{s,x}$ comme module sur $\underline{O}_{S,s}$; la condition (1) exprime que c'est un $\underline{O}_{S,s}$-module plat).

Supposons maintenant que $\underline{F}$ soit un <u>sous-faisceau cohérent</u> de $p^*(\underline{E})$ ($\underline{E}$: faisceau cohérent sur X) ; si le faisceau quotient $p^*(\underline{E})/\underline{F}$ est S-plat, alors $\underline{F}$ est S-plat (puisque $p^*(\underline{E})$ est S-plat).
Alors (1) montre que, pour chaque $s \in S$, $(i_s)^*(\underline{F})$ s'identifie à un <u>sous-faisceau</u> de $\underline{E}$. C'est sous ces hypothèses que, par définition, on dira que le sous-faisceau $\underline{F}(s) = (i_s)^*(\underline{F})$ du faisceau E dépend analytiquement de $s \in S$.

La notion de sous-faisceau cohérent de E, dépendant analytiquement de $s \in S$, est <u>invariante par changement de base</u> : cela veut dire que si $\underline{F}(s) \subset E$ dépend analytiquement de $s \in S$, et si $\phi : S' \to S$ est un morphisme d'espaces analytiques, alors $\underline{F}(\phi(s'))$ est un sous-faisceau de E qui dépend analytiquement de $s' \in S'$.

Nous sommes enfin en mesure de formuler le problème résolu par Douady :

Problème universel : soient X un espace analytique donné, et $\underline{E}$ un faisceau cohérent donné sur X. Considérons la situation suivante : S est un espace analytique, et $\underline{F}$ est, sur l'espace $S \times X$, un sous-faisceau cohérent de $p^{*}(\underline{E})$ tel que $p^{*}(\underline{E})/\underline{F}$ soit S-plat et S-propre (cette dernière condition signifie que l'application du support de $p^{*}(\underline{E})/\underline{F}$ dans S, induite par la projection $S \times X \to S$, est propre ; ce qui implique que chaque fibre $\underline{E}/\underline{F}(s)$ a un support compact dans X). Il est clair qu'un changement de base $\phi : S' \to S$ définit $\underline{F}' = (\phi \times id_X)^{*}(\underline{F})$, sous-faisceau cohérent de $p'^{*}(\underline{E})$, tel que $p'^{*}(\underline{E})/\underline{F}'$ soit S'-plat et S'-propre. Cela dit, on cherche un couple $(S,\underline{F})$ qui soit universel dans le sens suivant : tout autre couple $(S',\underline{F}')$ se déduit de $(S,\underline{F})$ par un changement de base $\phi : S' \to S$, ce changement de base étant en outre unique.

Il est évident que si un tel couple $(S,\underline{F})$ existe, il est "unique à un isomorphisme près". Douady prouve l'existence d'un tel couple. On le notera $(H,\underline{R})$.

Voyons de plus près ce que signifie ce résultat. Appliquons la propriété universelle de $(H,\underline{R})$ au cas où S' est un espace ponctuel (dont l'anneau local est $\mathbb{C}$), et où $\underline{E}'$ est un sous-faisceau cohérent de $\underline{E}$ tel que $\underline{E}/\underline{E}'$ soit à support compact (on a identifié $S' \times X$ à X). D'après la propriété universelle, il existe un unique point $s \in H$ tel que l'isomorphisme $i_s^{*}(p^{*}(\underline{E})) \approx \underline{E}$ induise un isomorphisme $i_s^{*}(\underline{R}) \approx \underline{E}'$. Donc l'ensemble des points de H (espace sous-jacent à H) est en correspondance bijective avec l'ensemble des sous-faisceaux cohérents $\underline{E}'$ de $\underline{E}$ tels que $\underline{E}/\underline{E}'$ soit à support compact.

On a donc muni canoniquement d'une structure d'espace analytique l'ensemble H des sous-faisceaux cohérents $\underline{E}'$ de $\underline{E}$ tels que $\underline{E}/\underline{E}'$ soit à support compact.

Si on applique ce résultat en prenant pour $\underline{E}$ le faisceau structural $\underline{O}_X$, on trouve une structure d'espace analytique sur l'ensemble des sous-espaces analytiques compacts de X.

Douady donne de son théorème l'application suivante : soient X et Y deux espaces analytiques, X étant compact ; soit $H(X \times Y)$ l'espace analytique dont les points sont les sous-espaces analytiques compacts de $X \times Y$ (cf. ci-dessus). Si à chaque morphisme $f : X \to Y$ on associe son graphe, on identifie l'ensemble $\mathrm{Mor}(X,Y)$ à un sous-ensemble de l'espace $H(X \times Y)$; on montre facilement que c'est un sous-ensemble ouvert, donc $\mathrm{Mor}(X,Y)$ hérite de la structure d'espace analytique de $H(X \times Y)$. On prouve ensuite que, pour tout espace analytique S, les morphismes de S dans l'espace analytique $\mathrm{Mor}(X,Y)$ sont en correspondance bijective avec les morphismes de $S \times X$ dans Y. Enfin, si X est réduit (i.e. si son faisceau structural est sans éléments nilpotents), alors la topologie sous-jacente à la structure d'espace analytique de $\mathrm{Mor}(X,Y)$ n'est autre que la topologie de la convergence compacte sur l'ensemble des applications holomorphes $X \to Y$.

Deuxième partie : Espaces analytiques banachiques

Pour construire la solution du problème universel mentionné ci-dessus, on a besoin de construire des espaces auxiliaires, qui sont en fait des espaces analytiques de dimension infinie. Mais il faut dire ce qu'on entend par là.

Tout d'abord, on définit sans difficulté la notion de variété analytique banachique (complexe). Les cartes d'une telle variété se font sur des ouverts d'espaces de Banach (une fois pour toutes, on ne considère que des Banach sur le corps $\mathbb{C}$) ; les changements de cartes sont les homéomorphismes (d'ouverts de Banach) qui sont holomorphes ainsi que l'homéomorphisme réciproque. Naturellement, il faut d'abord savoir ce que c'est qu'une application holomorphe

$$f : U \to F$$

d'un ouvert U du Banach E dans un Banach F. Il y a plusieurs définitions possibles, dont l'une (à la Cauchy) dit simplement que f doit être $\mathbb{C}$-différentiable, et dont l'autre (à la Weierstrass) dit que, pour tout $a \in U$, il existe un $r > 0$ et un développement en série (valable pour $||x|| < r$)

$$f(a+x) = \sum_{n \geqq 0} f_n(x)$$

où f_n est une application polynomiale homogène $E \to F$ de degré n, la série

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{||x|| \leq r} ||f_n(x)||$$

étant convergente. Les ouverts des Banach et les applications holomorphes d'iceux forment une catégorie ; les changements de cartes d'une variété analytique banachique sont définis par des isomorphismes de cette catégorie. On définit de manière évidente une application holomorphe $X \to Y$ (X et Y étant des variétés anal. ban.), d'où la catégorie des variétés analytiques banachiques.

Exemple de variété analytique banachique : la grassmannienne $\underline{G}(E)$ d'un espace de Banach E. Comme ensemble, $\underline{G}(E)$ se compose par définition des sous-espaces directs de E, c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels G tels qu'il existe un projecteur continu $p : E \to E$ ayant G pour noyau. Pour $G \in \underline{G}(E)$, notons U_G l'ensemble des supplémentaires fermés de G, c'est-à-dire l'ensemble des images des projecteurs p de noyau G. Il est clair que U_G est en correspondance bijective canonique avec l'ensemble des $v \in \underline{L}(E/G,E)$ telles que $\pi_G \circ v$ soit l'identité de E/G (on note $\pi_G : E \to E/G$ l'application canonique). En d'autres termes, π_G définit une application linéaire continue

$$\underline{L}(E/G,E) \to \underline{L}(E/G,E/G),$$

et U_G est l'image réciproque de $1_{E/G} \in \underline{L}(E/G,E/G)$. C'est donc le translaté d'un sous-espace vectoriel fermé de $\underline{L}(E/G,E)$, ce qui donne une carte de U_G sur un espace de Banach. Il est facile de voir qu'on obtient ainsi (lorsque G varie dans $\underline{G}(E)$) un système de cartes qui fait de $\underline{G}(E)$ une variété analytique banachique dont les U_G sont des ouverts.

Venons à la définition des espaces analytiques banachiques. Dans le cas classique (dimension finie), il avait suffi de se donner une structure d'espace annelé, et d'imposer à cet espace d'être localement isomorphe à un "modèle". La structure annelée $(X,\underline{O}_X)$ servait alors à définir pour tout ouvert $V \subset X$, l'ensemble des morphismes $V \to \mathbf{C}$, lequel s'identifiait à l'ensemble $\Gamma(V,\underline{O}_X)$ des sections du faisceau structural. Maintenant, on aura besoin de connaître non seulement l'ensemble des morphismes $V \to \mathbb{C}$, mais l'ensemble des morphismes $V \to U$ à valeurs dans n'importe quel ouvert U d'un Banach (naturellement, nous ne savons pas encore ce qu'est un tel "morphisme"). Ceci conduit à la notion suivante :

Soit $\underline{B}$ la catégorie des ouverts d'espaces de Banach et des applications holomorphes. Un espace $\underline{B}$-fonctorisé est défini par la donnée 1°) d'un espace topologique X ; 2°) pour tout ouvert U d'un Banach, d'un faisceau d'ensembles $\underline{O}_X(U)$; 3°) pour toute application holomorphe $U \to U'$, d'un homomorphisme de faisceaux $\underline{O}_X(U) \to \underline{O}_X(U')$, avec une condition évidente de transitivité. Autrement dit, un espace $\underline{B}$-fonctorisé, de support X, est un foncteur covariant de la catégorie $\underline{B}$ dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X. On notera $\underline{O}_X$ ce foncteur. Par définition, un morphisme $f : (X,\underline{O}_X) \to (Y,\underline{O}_Y)$ d'espaces $\underline{B}$-fonctorisés est un couple (f_o,f_1), où $f_o : X \to Y$ est une application continue, et où f_1 est un morphisme de foncteurs

$$(f_o)^{-1}(\underline{O}_Y) \to \underline{O}_X \ .$$

Ayant ainsi défini la catégorie des espaces $\underline{B}$-fonctorisés, on appellera espace analytique banachique un espace $\underline{B}$-fonctorisé $(X,\underline{O}_X)$ tel que X soit un espace topologique séparé qui possède un recouvrement par des ouverts dont chacun (pour la structure $\underline{B}$-fonctorisée induite) soit isomorphe à un "modèle". Il reste à définir les modèles !

Ce qui va définir un modèle, c'est la donnée d'un couple (W,f), où W est un ouvert d'un Banach E, et $f : W \to F$ une application holomorphe à valeurs dans un Banach F. A ce couple nous devons associer un espace $\underline{B}$-fonctorisé. Son support X sera simplement $f^{-1}(0)$ (sous-espace fermé de W). Reste à définir le foncteur $\underline{O}_X$ de la catégorie $\underline{B}$ dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X. Avant de le faire, regardons le cas où E et F sont de dimension finie ; la donnée de f revient à celle de n fonctions holomorphes $f_i : W \to \mathbb{C}$ (une fois choisie une base de n éléments de F) ; les f_i engendrent dans W un faisceau d'idéaux $\underline{I}$, indépendant du choix de la base de F ; X n'est autre que le support du faisceau quotient $\underline{O}_W/\underline{I}$, qui induit sur X le faisceau d'anneaux servant à définir la structure d'espace annelé de X.

Revenons au cas général où E et F sont des Banach quelconques. Pour tout ouvert U d'un Banach G, soit $\underline{H}_X(U)$ la restriction à X du faisceau $\underline{H}_W(U)$ des germes de fonctions holomorphes de W à valeurs dans U. On voit facilement que si V est un ouvert de X, une section $\varepsilon\ \Gamma(V,\underline{H}_X(U))$ définit une application $V \to U$. On va maintenant utiliser l'application holomorphe donnée $f : W \to F$ pour définir une relation d'équivalence sur le faisceau $\underline{H}_X(U)$. Commençons par le faire pour $\underline{H}_X(G)$, qui est évidemment un faisceau d'espaces vectoriels complexes. On définit un homomorphisme de faisceaux d'espaces vectoriels

$$(*) \qquad \underline{H}_X(\underline{L}(F,G)) \to \underline{H}_X(G)$$

comme suit : une section de $\underline{H}_X(\underline{L}(F,G))$ au-dessus d'un ouvert $V \subset X$ provient d'une application holomorphe $\phi : V' \to \underline{L}(F,G)$, où V' est un ouvert de W tel que $V' \cap X = V$; associons-lui l'application holomorphe $\psi : V' \to G$ définie par

$$\psi(x) = \phi(x).f(x),$$

où le point indique que $\phi(x)\ \varepsilon\ \underline{L}(F,G)$ opère sur $f(x)\ \varepsilon\ F$. On voit facilement que le passage de ϕ à ψ induit bien un homomorphisme $(*)$ comme annoncé ; par définition, $\underline{O}_X(G)$ est le <u>conoyau</u> de $(*)$: c'est un faisceau d'espaces vectoriels. Et on vérifie que toute section $\varepsilon\ \Gamma(V,\underline{O}_X(G))$ définit une application $V \to G$ (parce que f s'annule en tout point de X).

Ayant ainsi défini le faisceau $\underline{O}_X(G)$, considérons maintenant un ouvert $U \subset G$; $\underline{H}_X(U)$ s'identifie à un sous-faisceau de $\underline{H}_X(G)$; son image dans $\underline{O}_X(G)$ sera, par définition, le faisceau $\underline{O}_X(U)$. Une section de $\underline{O}_X(U)$ au-dessus d'un ouvert $V \subset X$ définit une application $V \to U$ (mais cette application ne détermine pas la section, en général). Les applications $V \to U$ que l'on obtient ainsi s'appellent les applications <u>holomorphes</u> de V dans U.

Il reste à vérifier qu'une application holomorphe $U \to U'$ (où U' est un ouvert d'un Banach G') définit un homomorphisme du faisceau $\underline{O}_X(U)$ dans le faisceau $\underline{O}_X(U')$.

On a ainsi défini le foncteur $\underline{O}_X$ qui attache un espace $\underline{B}$-fonctorisé à la donnée (W,f). Cet espace B-fonctorisé est un "modèle". Ayant ainsi défini les modèles, on sait enfin ce qu'est un espace analytique banachique. Et on démontre que si $(X,\underline{O}_X)$ est un espace analytique banachique, et U un ouvert d'un Banach, le faisceau $\underline{O}_X(U)$ s'identifie au faisceau des germes de morphismes de X à valeurs dans U. Comme dans le cas de la dimension finie, on définit la notion de sous-espace analytique $(Y,\underline{O}_Y)$ d'un espace analytique $(X,\underline{O}_X)$: Y est un sous-espace de X, et $\underline{O}_Y$ un quotient du foncteur induit par $\underline{O}_X$ sur Y.

En général, soient $(X,\underline{O}_X)$ et $(Y,\underline{O}_Y)$ deux espaces analytiques banachiques, et soit $x \in X$, $y \in Y$. On sait ce qu'est un germe de morphisme $(X,\underline{O}_X) \to (Y,\underline{O}_Y)$ au point x, appliquant x en y. Pour expliciter comment un tel germe est défini, on peut supposer que $(X,\underline{O}_X)$ est un modèle défini par un couple (W,f), où W est ouvert dans un Banach E et $f : W \to F$ est holomorphe ; et que $(Y,\underline{O}_Y)$ est un modèle défini par un couple (W',f'), W' ouvert dans E', $f' : W' \to F'$ étant holomorphe ; on a $f(x) = 0$, $f'(y) = 0$. Alors un germe de morphisme provient d'un germe g d'application holomorphe $W \to W'$ au point $x \in W$ (envoyant x en y), tel que $f' \circ g$ ait pour image zéro dans $\underline{O}_{X,x}(F')$; pour que deux tels germes g_1 et g_2 définissent le même germe de morphisme des modèles, il faut et il suffit que leur différence (qui est un germe de morphisme $W \to E'$ au point x) donne zéro dans $\underline{O}_{X,x}(E')$. Par définition, on dit qu'un germe de morphisme est compact, s'il est possible de choisir le germe g de telle façon que son application linéaire tangente (qui est une application linéaire continue $E \to E'$) soit compacte au sens de F. Riesz. On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix des modèles qui représentent $(X,\underline{O}_X)$ et $(Y,\underline{O}_Y)$ au voisinage des points $x \in X$ et $y \in Y$.

Soit maintenant $f : (X,\underline{O}_X) \to (Y,\underline{O}_Y)$ un morphisme d'espaces analytiques banachiques. On dit que f est compact au point $x \in X$ si le germe de f en x est compact. Cela dit, Douady prouve le Critère de finitude : pour qu'un espace analytique $(X,\underline{O}_X)$ soit de dimension finie au voisinage de x (c'est-à-dire soit un espace analytique classique au voisinage de x), il faut et il suffit que le morphisme identique de $(X,\underline{O}_X)$ soit compact au point x.

Exemple d'espace analytique banachique : Soit E un espace de Banach. On a défini plus haut la grassmannienne $\underline{G}(E)$ comme variété analytique banachique. Soit maintenant A une algèbre de Banach, et supposons que E soit un A-module, l'application $(a,x) \mapsto a.x$ de $A \times E$ dans E étant bilinéaire continue. Soit $\underline{G}_A(E)$ le sous-ensemble de $\underline{G}(E)$ formé des sous-espaces vectoriels directs F qui sont des sous-A-modules (on ne demande pas que F soit direct comme sous-A-module, mais seulement comme sous-espace vectoriel). Pour $G \in \underline{G}(E)$, on va définir sur $U_G \cap \underline{G}_A(E)$ une structure d'espace analytique banachique. Rappelons que U_G est un sous-espace affine de l'espace de Banach $\underline{L}(E/G,E)$, à savoir $\pi^{-1}(1_{E/G})$, où $\pi : \underline{L}(E/G,E) \to \underline{L}(E/G,E/G)$ est l'application canonique. Pour exprimer qu'un $v \in U_G$ a pour image un sous-A-module F, il suffit d'exprimer que, pour tout $a \in A$ et tout $x \in E/G$, l'élément

$$a.v(x) \in E$$

est dans l'image de v, c'est-à-dire est annulé par $1_E - v \circ \pi$ (π étant l'application canonique $E \to E/G$). Autrement dit, v doit être tel que

$$a.v(x) - v(\pi(a.v(x)))$$

soit nul pour tout couple $(a,x) \in A \times (E/G)$.

Considérons alors la fonction

$$f : \underline{L}(E/G,E) \to \underline{L}(A \times (E/G),E)$$

telle que $f(v)$ soit l'application bilinéaire continue

$$(a,x) \mapsto a.v(x) - v(\pi(a.v(x))).$$

L'application f est holomorphe, puisqu'en fait c'est une fonction <u>quadratique</u> de v. Elle induit donc une application holomorphe (notée encore f) du sous-espace affine $U_G \subset \underline{L}(E/G,E)$. Nous sommes donc dans la situation d'un <u>modèle</u>, et $U_G \cap \underline{G}_A(E)$ est donc muni d'une structure d'espace analytique. On vérifie alors facilement que, lorsque G parcourt $\underline{G}(E)$, les $U_G \cap \underline{G}_A(E)$ forment un recouvrement ouvert de $\underline{G}_A(E)$ tel que les structures d'espace analytique de ces ouverts se recollent pour faire de $\underline{G}_A(E)$ un espace analytique.

Voici un cas où intervient la grassmannienne $\underline{G}_A(E)$. Supposons que le A-module de Banach E soit de type fini, et plus précisément qu'il existe une <u>suite exacte directe</u>

$$0 \to L_n \xrightarrow{f_n} L_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \to L_1 \xrightarrow{f_1} L_o \xrightarrow{f_o} E,$$

où chacun des L_i est somme directe d'un nombre fini d'exemplaires de A ; les f_i sont des applications A-linéaires continues, la suite est exacte, et "directe" signifie que le noyau et l'image de chaque f_i sont des sous-espaces directs (au sens des $\mathbb{C}$-sous-espaces, non des sous-A-modules). L'ensemble $\underline{D}_A(0,L_n,\ldots,L_o,E)$ des A-complexes formés avec les L_i et E est muni d'une manière évidente d'une structure d'espace analytique banachique ; le sous-espace $\underline{S}_A(0,L_n,\ldots,L_o,E)$ des suites exactes directes en est un sous-espace ouvert, donc est aussi muni d'une structure d'espace analytique banachique. On définit canoniquement un morphisme d'espaces analytiques banachiques

$$\Phi : \underline{S}_A(0,L_n,\ldots,L_o,E) \to \underline{G}_A(E) ;$$

l'application des espaces sous-jacents associe à chaque suite exacte directe l'image de $f_o : L_o \to E$, qui est un élément de $\underline{G}_A(E)$. On démontre que le morphisme Φ est <u>lisse</u>, c'est-à-dire que tout point de $\underline{G}_A(E)$ possède un voisinage ouvert U au-dessus duquel $\underline{S}_A(0,L_n,\ldots,L_o,E)$ s'écrit comme le produit de U par une variété analytique banachique, le morphisme Φ étant alors le morphisme de projection. Ce fait joue un rôle important dans la technique de construction dont on va maintenant parler brièvement.

<u>Troisième partie</u> : <u>brèves indications sur les techniques de démonstration.</u>

Il s'agit de résoudre le problème universel posé à la fin de la première partie. Pour cela, on formule un problème analogue, mais où l'on permet à l'espace S d'être un espace analytique banachique (X reste un espace analytique de dimension finie, et E un faisceau cohérent sur X). Alors l'espace $S \times X$ est analytique banachique, et il faut voir ce qui doit remplacer la notion de faisceau cohérent S-plat pour un faisceau $\underline{F}$ sur $S \times X$. Observons d'abord que tout espace analytique banachique Y possède un faisceau d'anneaux $\underline{O}_Y(\mathbb{C})$ (il ne définit pas entièrement la structure, mais il n'en existe pas moins). On notera désormais $\underline{O}_Y$ le faisceau $\underline{O}_Y(\mathbb{C})$, malgré la confusion que cette notation pourrait théoriquement engendrer. Sur l'espace $S \times X$, un faisceau $\underline{F}$ est dit S-anaplat si c'est un faisceau de $\underline{O}_{S \times X}$-modules satisfaisant à une condition supplémentaire qu'on va d'abord formuler dans le cas où X est un ouvert U d'un espace numérique $\mathbb{C}^n$:

Définition : sur $S \times U$, un $\underline{O}_{S \times U}$-faisceau $\underline{F}$ est dit S-anaplat si, pour tout point $(s_o,x_o) \in S \times U$, il existe dans un voisinage $V \times W$ de (s_o,x_o) une résolution finie de $\underline{F}$:

$$(\underline{R}) \quad 0 \to \underline{L}_n \to \underline{L}_{n-1} \to \dots \to \underline{L}_1 \to \underline{L}_o \to \underline{F} \to 0,$$

où chaque $\underline{L}_i$ est somme directe d'un nombre fini d'exemplaires du faisceau structural $\underline{O}_{V \times W}$, telle que si, en chaque point $(s,x) \in V \times W$, on tensorise $(\underline{R})$ avec l'anneau $\underline{O}_{W,x}$ (considéré comme module sur $\underline{O}_{V \times W,(s,x)}$ au moyen de l'homomorphisme défini par l'injection $x \to (s,x)$ de W dans $V \times W$), on obtienne une résolution de $\underline{O}_{W,x} \otimes_{\underline{O}_{V \times W,(s,x)}} \underline{F}_{s,x}$, noté $\underline{F}(s)_x$.

Dans le cas général où X est un espace analytique (de dimension finie), on réalise localement X comme sous-espace d'un ouvert U d'un espace numérique, donc $S \times X$ comme sous-espace de $S \times U$; un $\underline{O}_{S \times X}$-faisceau $\underline{F}$, sur $S \times X$, est dit S-anaplat, si le $\underline{O}_{S \times U}$-faisceau de $S \times U$ qui induit $\underline{F}$ sur $S \times X$ et 0 en dehors, est S-anaplat.

On montre ensuite que, lorsque S est de dimension finie, la notion de faisceau S-anaplat sur $S \times X$ équivaut à celle de faisceau cohérent sur $S \times X$ et S-plat.

Cela dit, voici comment on reformule le problème universel : soit X un espace analytique donné (de dimension finie), et soit $\underline{E}$ un faisceau cohérent sur X. On considère la situation suivante : S est un espace analytique banachique, et $\underline{F}$ est, sur l'espace $S \times X$, un sous-faisceau de $p^*(\underline{E})$ (lequel est S-anaplat) tel que $p^*(\underline{E})/\underline{F}$ soit S-anaplat et S-propre. On cherche un $(S,\underline{F})$ qui soit universel ; cela veut dire que si on a un autre système $(S',\underline{F}')$, il existe un unique morphisme $\phi : S' \to S$ (morphisme d'espaces analytiques banachiques) tel que $\underline{F}'$ se déduise de $\underline{F}$ par le "changement de base" ϕ.

Alors Douady prouve que ce problème universel a une solution $(H,\underline{R})$. Une fois l'espace H obtenu, il peut, en utilisant le critère de finitude, montrer qu'en fait H est de dimension finie en chacun de ses points (N.B. Les dimensions des composantes irréductibles de H ne sont pas nécessairement bornées).

Il reste à indiquer succintement quelques points essentiels des techniques utilisées pour construire l'espace cherché H et son faisceau.

<u>Proposition 1</u>.- Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$; soit $\underline{F}$ un faisceau de $\underline{O}_{S\times U}$-modules sur $S\times U$, et soit $s_o \in S$ tel que, pour tout $x \in U$, $\underline{F}$ admette une résolution libre de longueur p au voisinage de (s_o,x) [p étant indépendant de x]. Alors si K est un produit de compacts $K_1\times\ldots\times K_n$ (où $K_i \subset \mathbb{C}$) contenu dans U, $\underline{F}$ admet une résolution libre de longueur p au voisinage de $\{s_o\}\times K$.

(Lorsque l'espace S est réduit à un point, on retrouve les "théorèmes A et B" de la théorie des faisceaux cohérents).

Soit K un compact convexe, d'intérieur non vide, dans $\mathbb{C}^n$, et soit E un espace de Banach. On introduit l'espace de Banach $B(K;E)$ formé des applications continues $K \to E$, holomorphes à l'intérieur de K ; on démontre que

$$B(K;E) \approx B(K) \hat{\otimes}_{\varepsilon} E, \quad \text{où } B(K) \text{ désigne } B(K;\mathbb{C}).$$

Pour un faisceau cohérent $\underline{F}$, on définit

$$B(K;\underline{F}) = B(K) \otimes_{\Gamma(K,\underline{O})} \Gamma(K;\underline{F}),$$

où $\Gamma(K,\underline{F})$ désigne le module des sections de $\underline{F}$ au-dessus de K. On munit $B(K;\underline{F})$ d'une topologie d'espace vectoriel en écrivant $\underline{F}$, au voisinage de K, comme conoyau de $\underline{L}_1 \to \underline{L}_o$ (faisceaux libres de base finie), et en prenant la topologie du conoyau de $B(K;L_1) \to B(K;L_o)$; elle ne dépend pas du choix de la résolution. Cette topologie fait de $B(K;\underline{F})$ un espace de Banach si elle est séparée ; il en est ainsi lorsque K est un <u>compact privilégié</u> pour $\underline{F}$: par là on entend qu'il existe, au voisinage de K, une résolution de $\underline{F}$:

$$0 \to \underline{L}_n \to \underline{L}_{n-1} \to \ldots \to L_1 \to L_o \to F$$

qui donne naissance à une <u>suite exacte directe</u> d'espaces de Banach :

$$0 \to B(K;\underline{L}_n) \to \ldots \to B(K;\underline{L}_1) \to B(K;\underline{L}_o) \;.$$

Rappelons qu'une suite exacte est <u>directe</u> si le noyau et l'image de chaque application linéaire de la suite sont des sous-espaces directs). Alors il en est de même pour toute résolution de $\underline{F}$, et le conoyau de l'application $B(K;L_1) \to B(K;L_o)$ est un espace de Banach.

<u>Proposition 2</u>.- Etant donnés des faisceaux cohérents $\underline{F}_i$ en nombre fini dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, chaque point $x \in U$ possède un système fondamental de voisinages compacts convexes (en fait, de produits $K_1 \times \ldots \times K_n$) qui sont privilégiés pour chacun des $\underline{F}_i$.

Soit toujours U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et soit maintenant $\underline{E}$ un faisceau cohérent sur U. Si K est un compact privilégié pour $\underline{E}$, l'espace de Banach $B(K;\underline{E})$ est un module sur l'algèbre de Banach $B(K)$; on a donc une grassmannienne $\underline{G}_{B(K)}(B(K;\underline{E}))$, qu'on notera $\underline{G}_K(\underline{E})$ pour abréger. Soit alors S un espace analytique banachique, et soit $\underline{F}$ un sous-faisceau du faisceau $p^*(E)$ sur $S \times X$, tel que $p^*(E)/\underline{F}$ soit S-anaplat. On montre que l'ensemble des $s \in S$ tels que le compact K soit privilégié pour $\underline{F}(s)$ et $\underline{E}/\underline{F}(s)$ est <u>ouvert</u>. Soit S_K cet ouvert. Pour $s \in S_K$, le Banach $B(K;\underline{F}(s))$ apparaît comme la fibre d'un fibré vectoriel analytique de base S_K ; de plus l'application $s \mapsto B(K;\underline{F}(s))$ est l'application sous-jacente à un morphisme d'espaces analytiques

$$S_K \to \underline{G}_{B(K)}(B(K;E)) = \underline{G}_K(\underline{E}).$$

On montre inversement que tout morphisme $S \to \underline{G}_K(E)$ définit un faisceau $\underline{F}$ sur $S \times \mathring{K}$ ($\mathring{K}$ désignant l'intérieur de K), tel que $p^*(\underline{E})/\underline{F}$ soit S-anaplat. En outre, le serpent se mord (presque !) la queue. De là on déduit un faisceau "universel" sur $\underline{G}_K(\underline{E}) \times \mathring{K}$.

A partir de là il y a encore beaucoup de technique pour arriver à construire la solution du problème universel. Il n'est malheureusement pas possible de donner plus de détails. Disons seulement que l'espace universel H est construit localement ; au voisinage de chacun de ses points, il est construit comme un sous-espace analytique d'un produit de grassmanniennes du type $\underline{G}_K(\underline{E})$, ce sous-espace étant le "noyau" d'une double flèche. En utilisant deux recouvrements emboîtés, on montre alors que H satisfait au critère de finitude.

BIBLIOGRAPHIE.-

[1] A. GROTHENDIECK, Sém. Cartan 1960/61, Exposés 9 et suivants.

[2] J.P. SERRE, Faisceaux algébriques cohérents (FAC), Ann. Math. 61 1955, p. 197-278.

[3] A. DOUADY, Série d'exposés au Séminaire Leray du Collège de France, 1965.