SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PAUL-ANDRÉ MEYER

Le théorème ergodique de Chacón-Ornstein

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 293, p. 233-242

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__233_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1964/65, n° 293

Mai 1965

LE THÉORÈME ERGODIQUE DE CHACÓN-ORNSTEIN

par Paul-André MEYER

Cet exposé reprend en partie, sous une forme plus brève, une conférence faite au Colloque de Théorie du potentiel (Juin 1964. Orsay), où l'on trouvera quelques détails omis ici.

Introduction.

Le plus ancien des théorèmes ergodiques comportant une convergence presque partout est celui de Birkhoff (1931).

Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, muni d'une mesure positive **σ-finie** μ, et T une application mesurable de E dans E qui conserve la mesure. Pour toute fonction f sur E, on pose $Tf = f \circ T$. Alors, si f appartient à $\mathcal{L}^1$, le rapport $\frac{1}{n+1} \sum_0^n T^k f$ converge presque partout.

De nombreux mathématiciens (DOOB, HOPF, KAKUTANI, ...) ont amélioré ce théorème : d'abord en remplaçant les transformations ponctuelles par des opérateurs positifs, de norme inférieure à 1 dans L^1 et L^∞, puis en abandonnant certaines de ces hypothèses. Citons, par exemple, le théorème ergodique de Dunford-Schwartz (1956), dont la démonstration repose sur un "lemme maximal" de Hopf :

Soit T un opérateur de norme ≤ 1 dans l'espace L^1 complexe, tel que la condition $|f| \leq 1$ entraîne $|Tf| \leq 1$ p. p. ; alors, $\frac{1}{n+1} \sum_0^n T^k f$ converge presque partout.

Ce théorème s'étend sans trop de difficultés aux opérateurs sur un espace L^1_F, où F est un Banach, sous la forme suivante : la convergence p. p. du rapport a lieu pour toute fonction $f \in L^1_F$ pour laquelle la convergence en norme a lieu. En particulier, la convergence p. p. a toujours lieu si F est réflexif. On pourra, par exemple, consulter à ce sujet la conférence de NEVEU [3].

Le théorème suivant, conjecturé par HOPF, a été établi par CHACÓN et ORNSTEIN en 1960 :

Soit T un opérateur positif sur L^1, de norme ≤ 1, et soient f et g deux éléments de L^1_+. Le rapport

$$\frac{\sum_{0}^{n} T^k f(x)}{\sum_{0}^{n} T^k g(x)}$$

converge vers une limite finie pour presque tout x tel que l'on ait

$$\sup_k T^k g(x) > 0 \ .$$

CHACÓN a réussi ensuite à identifier la limite de ce rapport, puis à établir le théorème suivant, qui contient tous les autres théorèmes cités plus haut [4] :

Soient T un opérateur de norme $\leqslant 1$ dans l'espace L^1 complexe, f un élément de L^1 , (p_n) une suite de fonctions positives mesurables, telles que la relation $|g| \leqslant p_n$ p. p. entraîne $|Tg| \leqslant p_{n+1}$ p. p. Le rapport

$$\frac{\sum_{0}^{n} T^k f(x)}{p_0(x) + p_1(x) + \dots + p_n(x)}$$

converge alors vers une limite finie pour presque tout x tel que l'on ait

$$\sup_k p_k(x) > 0 \ .$$

Je ne comprends malheureusement rien à la démonstration de ce théorème. Je me bornerai donc au théorème de Chacón-Ornstein (*). On dispose alors d'un "lemme maximal" dû à BRUNEL, qui simplifie grandement la démonstration.

T désignera donc, dans toute la suite, un opérateur positif de norme $\leqslant 1$ dans l'espace $L^1(E\ ,\ \mathcal{E}\ ,\ \mu)$. Le mot "fonction" servira à désigner les classes d'équivalences de fonctions réelles mesurables sur E ; un traitement analogue sera infligé au mot "ensemble" et au signe $=$.

I. Rappels de Théorie du potentiel.

Nous commencerons par introduire la terminologie de la théorie du potentiel (voir DENY [2]). L'emploi de cette théorie ne simplifie pas essentiellement les démonstrations, mais permet d'y comprendre quelque chose.

(a) Désignons par $\mathfrak{M}^+$ l'ensemble des "fonctions" positives sur E , finies ou non. Nous appellerons pseudo-noyau toute application N de $\mathfrak{M}^+$ dans lui-même,

---

(*) Le dernier théorème se déduit assez facilement du théorème de Chacón-Ornstein, lorsque T est $\geqslant 0$.

possédant la propriété suivante : pour toute suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{M}^+$, on a $N(\sum_n f_n) = \sum_n Nf_n$. Le pseudo-noyau N est dit <u>sous-markovien</u> si l'on a $N1 \leq 1$. Nous omettrons souvent le "pseudo-".

Une fonction positive f est dite <u>excessive</u> si l'on a $Nf \leq f$, <u>invariante</u> si elle est finie (p. p.) et si $Nf = f$. Désignons par G_N le noyau <u>potentiel</u> de N : $G_N = I + N + N^2 + \dots$; on a, pour toute fonction excessive finie f,

$$f = G_N(f - Nf) + h ,$$

où h est invariante (décomposition de Riesz).

(b) Soient A un ensemble, A' son complémentaire ; désignons par J_A (resp. $J_{A'}$) le noyau $f \rightsquigarrow f.\varphi_A$ (resp. $f.\varphi_{A'}$), par N' le noyau $J_{A'}N$. Posons :

$$H_A = J_A + J_{A'}NJ_A + J_{A'}NJ_{A'}NJ_A + \dots = G_{N'}J_A ;$$

H_A est un pseudo-noyau, sous-markovien si N est sous-markovien ; si f est une fonction excessive, $H_A f$ s'appelle la <u>réduite</u> de f sur A. On montre alors que $H_A f$ est la plus petite fonction excessive qui majore f sur A, et que $H_A f$ est "invariante hors de A" : $NH_A f = H_A f$ sur A'. En outre, si la fonction $f.\varphi_A$ a un potentiel fini, la fonction $H_A f$ est un potentiel.

En particulier, lorsque N est sous-markovien, la réduite $H_A 1$ est notée e_A, et appelée le <u>potentiel d'équilibre</u> de A ; c'est un potentiel si φ_A a un potentiel fini.

(c) Soit N un pseudo-noyau ; supposons que N soit sous-markovien (resp. que l'on ait $\int Nf\,d\mu \leq \int f\,d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{M}^+$; nous dirons alors que N <u>diminue les intégrales</u>). Il existe alors un pseudo-noyau M, unique, appelé l'<u>adjoint</u> de N, tel que l'on ait

$$\int f.Ng\,d\mu = \int Mf.g\,d\mu$$

pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{M}^+$, et M diminue les intégrales (resp. est sous-markovien).

L'application $f \rightsquigarrow Tf$ de L^1_+ dans lui-même se prolonge en un pseudo-noyau, que nous noterons encore T, et qui diminue les intégrales. Nous noterons N le noyau sous-markovien adjoint à T ; les notations H_A, e_A se rapporteront à ce noyau N.

II. Démonstration du théorème ergodique.

(a) Pour tout couple d'entiers k , n tels que $k \leq n$, nous poserons

$$T_{k,n} f = T^k f + \dots + T^n f .$$

Soit f un élément de L^1 ; nous poserons :

$$K_1(x) = \inf \left\{ n \geq 0 : T_{o,n} f(x) > 0 \right\} ;$$

du fait que $K_1(x)$ est <u>le plus petit</u> n tel que $T_{o,n} f(x) > 0$, il résulte que l'on a $T_{i,K_1(x)} f(x) > 0$ pour tout x tel que $K_1(x)$ soit fini, et tout $i \leq K_1(x)$. On pose de même par récurrence :

$$K_{p+1}(x) = \inf \left\{ n > K_p(x) : T_{K_p(x)+1,n} f(x) > 0 \right\} .$$

On a $T_{i,K_p(x)} f(x) > 0$ pour tout x tel que $K_p(x)$ soit fini, et tout $i \leq K_p(x)$.

Désignons par E_f l'ensemble

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{ x : \sup_{n \geq k} T_{k,n} f(x) > 0 \right\} .$$

Autrement dit, E_f est l'ensemble des x pour lesquels tous les $K_p(x)$ sont finis. Nous avons alors le lemme suivant, dû à BRUNEL [1].

LEMME. - <u>Soit</u> A <u>un ensemble contenu dans</u> E_f ; <u>on a alors</u>

$$\int e_A . f \, d\mu \geq 0 .$$

<u>Démonstration</u>. - Considérons l'ensemble $F = E \times \mathbb{N}$, muni de la tribu-produit naturelle ; nous identifierons une fonction mesurable sur F à une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur E , et nous munirons F de la mesure positive σ-finie λ qui, à toute fonction positive (g_n) , associe le nombre $\sum_n \mu(g_n)$. Désignons par M le pseudo-noyau sous-markovien défini par

$$M\left(g_0 , g_1 , \dots , g_n , \dots\right) = \left(Ng_1 , Ng_2 , \dots , Ng_{n+1} , \dots\right) .$$

Fixons un entier n , et posons $B_i = A \cap \left\{ i \leq K_p \leq n \right\}$ pour tout entier $i \leq n$, $B_i = \emptyset$ pour $i > n$; désignons par B l'ensemble $(B_o , B_1 , \dots)$, par $b = (b_o , b_1 , \dots , b_n , \dots)$ le potentiel d'équilibre de B (pour le noyau M), par $h = (h_o , h_1 , \dots , h_n , \dots)$ la fonction $b - Mb$. Nous allons montrer que l'on a

$$(\star) \qquad \int b_o . f \, d\mu \geq 0 .$$

Etant donné que B a un potentiel fini (car $M^k(\varphi_B) = 0$ pour $k > n$), on a $b = G_M h$; h étant nulle hors de B , h_k est nulle pour $k > n$. Donc,

$$\int b_o.f\, d\mu = \int \left(h_o+Nh_1+\ldots+N^n h_n\right) f\, d\mu = \int \left(h_o f + h_1 Tf + \ldots + h_n.T^n f\right) d\mu \ .$$

Nous allons montrer que la fonction sous le dernier signe somme est <u>positive</u>. On a, en effet, $B_o \supset B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset B_{n+1} = \emptyset$; h étant nulle hors de B , la fonction est égale, sur $B_k - B_{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, à

$$h_o f + \ldots + h_k T^k f = h_o T_{o,k} f + (h_1 - h_o)T_{1,k} f + \ldots + (h_k - h_{k-1})T_{k,k} f \ .$$

Or, on a, sur cet ensemble, $k = K_p$, de sorte que toutes les fonctions $T_{i,k} f$ y sont positives. Il nous reste à montrer que l'on a $h_o \leqslant h_1 \leqslant \ldots \leqslant h_k$ sur $B_k - B_{k+1}$, ou encore, comme $h_o = 1 - b_o$, ... , $h_k = 1 - b_k$ sur cet ensemble, que l'on a $b_o \geqslant b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_k$. Or, la fonction $\left(\sup (b_o , Nb_o) , b_o , b_1 , \ldots\right)$ est excessive et majore 1 sur B ; elle majore donc $(b_o , b_1 , \ldots , b_n , \ldots)$, ce qui donne le résultat cherché.

Faisons tendre n vers l'infini, l'ensemble B tend en croissant vers l'ensemble

$$\left(A \cap \{0 \leqslant K_p < \infty\} , A \cap \{1 \leqslant K_p < \infty\} , \ldots\right),$$

puis faisons tendre p vers l'infini : l'ensemble tend en croissant vers $(A , A , A , \ldots)$, dont le potentiel d'équilibre est $(e_A , e_A , \ldots)$. Un passage à la limite dans $(\star)$ établit alors le lemme.

<u>Démonstration du théorème ergodique de Chacón-Ornstein</u>. - Soient f et g deux éléments de L^1_+ ; nous poserons

$$D_n(x) = \frac{T_{o,n} f(x)}{T_{o,n} g(x)}$$

sur l'ensemble $\{x : T_{o,n} g(x) > 0\}$, et $D_n(x) = 0$ hors de cet ensemble.

(b) Montrons d'abord que l'on a

$$\limsup_n D_n(x) < + \infty$$

pour presque tout x . Il suffit évidemment d'établir cette inégalité pour presque tout $x \in \{g > 0\}$, et d'appliquer ensuite le résultat à g , Tg , $T^2 g$, ... Posons donc $A = \left\{\limsup_n D_n = + \infty , \ g > 0\right\}$; on a $A \subset E_{f-cg}$ pour toute constante positive c , donc, d'après le lemme,

$$\int e_A(f - cg)\, d\mu \geqslant 0 \ ;$$

c étant arbitraire, on a $ge_A = 0$, donc $e_A = 0$ sur A , et A est négligeable.

(c) Soient a et b deux nombres rationnels tels que $a < b$. Montrons que l'ensemble

$$A = \left\{g > 0 \ , \ \lim_n T_{o,n}\, g = +\infty \ , \ \liminf_n D_n < a \ , \ \limsup_n D_n > b\right\}$$

est négligeable. On a en effet $\lim_n T_{o,n} f = +\infty$ sur A , et par conséquent $A \subset E_{f-bg} \cap E_{ag-f}$; donc, d'après le lemme de Brunel,

$$\int e_A(f - bg)\, d\mu \geqslant 0 \ , \qquad \int e_A(ag - f)\, d\mu \geqslant 0 \ ;$$

d'où en ajoutant $(a - b) \int e_A\, g\, d\mu \geqslant 0$, ce qui entraîne comme ci-dessus que A est négligeable. En appliquant cela à tous les couples (a , b) du type précédent, on voit que D_n converge presque partout sur $\left\{g > 0 \ , \ \lim_n T_{o,n}\, g = +\infty\right\}$; la convergence étant évidente sur $\left\{\lim_n T_{o,n}\, g < +\infty\right\}$, il y a convergence p. p. sur $\{g > 0\}$. On applique alors ce résultat à T_g , $T^2 g$, ... , et le théorème ergodique de Chacon-Ornstein est établi.

III. Identification de la limite.

(a) Soit u un élément de L^1_+ , strictement positif en tout point de E . Nous poserons :

$$C = \left\{x : \ G_T\, u(x) = +\infty\right\} ,$$

$$D = \left\{x : \ G_T\, u(x) < +\infty\right\} ,$$

(ce sont les initiales de "conservatif" et "dissipatif"). Soit f un élément de L^1_+ .

Le rapport $\dfrac{T_{o,n}\, f}{T_{o,n}\, u}$ ayant presque partout une limite finie, on a $G_T\, f < +\infty$ presque partout sur D .

Le rapport $\dfrac{T_{o,n}\, u}{T_{o,n}\, f}$ ayant presque partout une limite finie sur l'ensemble $\{G_T\, f > 0\}$, on a $G_T\, f = 0$ ou $G_T\, f = +\infty$ presque partout sur C .

L'opérateur T est dit <u>purement conservatif</u> si l'on a $D = \emptyset$.

Nous nous proposons d'évaluer la limite du rapport $\dfrac{T_{o,n}\, f}{T_{o,n}\, g}$, où f et g sont deux éléments de L^1_+ . Nous pouvons **évidemment** nous borner au cas où g est strictement positive partout. Il n'y a, d'autre part, aucun problème aux points de D : la limite y est égale au rapport $\frac{G_T f}{G_T g}$. Il nous suffira donc d'étudier ce qui se passe sur C .

(b) Voici alors quelques résultats de théorie du potentiel, qui nous permettront de nous ramener au cas d'un opérateur purement conservatif.

1° Soit $g \in L^1_+$, partout > 0 ; on a $T(G_T g) \leq G_T g$, donc $T(G_T g) < \infty$ sur D ; or $G_T g = +\infty$ sur C ; il en résulte que $T(\varphi_C) = 0$ sur D . Par conséquent, si $f \in L^1_+$ est nulle hors de C , Tf est aussi nulle hors de C .

Posons alors $E' = C$, désignons par μ' la mesure induite par μ sur C , et par T' la restriction de T à E' , qui existe d'après la phrase soulignée ; T' est purement conservatif, et opère comme T sur les fonctions nulles hors de C .

2° Soit f une fonction excessive par rapport au noyau N adjoint à T ; nous allons montrer que l'on a $Nf = f$ sur C . Il suffit de l'établir lorsque f est bornée, et cela revient à montrer que tout potentiel borné $f = G_N g$ est nul sur C (théorème de décomposition de Riesz). Or, soit u une fonction intégrable, strictement positive en tout point ; f étant bornée, il en est de même de $N^k f$ pour tout $k \geqslant 0$, et l'on a donc $\int uN^k f\, d\mu < +\infty$. Or, on a

$$\int u.N^k f\, d\mu = \int u.G_N(N^k g)\, d\mu = \int G_T u.N^k g\, d\mu .$$

$G_T u$ étant égale à $+\infty$ sur C , $N^k g$ y est nulle, et donc aussi $f = \sum_k N^k g$.

3° Soit A une partie de C ; on a $Ne_A \leqslant e_A$, donc $Ne_A = e_A$ sur C ; on a d'autre part $Ne_A = e_A$ sur $E - A$, donc sur $E - C$. L'égalité $Ne_A = e_A$ a donc lieu partout. Notons aussi que l'on a $H_C e_A = e_A$.

4° Nous désignerons par B_C (noyau de balayage sur C) le noyau adjoint au noyau sous-markovien H_C ; B_C diminue les intégrales, et on l'évalue facilement:

$$B_C = J_C + J_C TJ_D + J_C TJ_D TJ_D + \dots = J_C G_{TJ_D} .$$

Toute fonction de la forme $B_C f$ est nulle hors de C .

(c) Le théorème suivant, dû à CHACÓN, permet alors de se ramener à l'étude des fonctions nulles hors de C :

THÉORÈME. - <u>Soit</u> f <u>un élément de</u> L^1_+ , <u>et soit</u> $h = B_C f$. <u>Le rapport</u> $D_n = \frac{T_{o,n} h}{T_{o,n} f}$ <u>tend vers</u> 1 <u>p. p. sur l'ensemble</u> $C \cap \{G_T f > 0\}$.

<u>Démonstration</u>. - Il nous suffit d'établir que les ensembles

$$A = C \cap \left\{T^k f > 0\right\} \cap \left\{\underset{n}{\lim} D_n > a\right\} ,$$

$$B = C \cap \left\{T^k f > 0\right\} \cap \left\{\underset{n}{\lim} D_n < b\right\} ,$$

sont négligeables pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$, tout $a > 1$, tout $b < 1$. Raisonnons, par exemple, sur le second. Etant donné que B est contenu dans C , le rapport $\frac{T_{o,n} h}{T_{o,n} T^k f}$ admet aussi une limite $< b$ sur B , et l'on a $B \subset E_{bT^k f - h}$. Le lemme de Brunel nous donne alors :

$$0 \leqslant \int e_B(bT^k f - h)\, d\mu = \int e_B(bT^k f - B_C f)\, d\mu = (b - 1) \int e_B . T^k f\, d\mu ,$$

en vertu de la relation :

$$\int e_B . B_C f\, d\mu = \int H_C e_B . f\, d\mu = \int e_B . f\, d\mu = \int N^k e_B . f\, d\mu = \int e_B . T^k f\, d\mu ;$$

il suffit alors de remarquer que $b - 1$ est négatif, et $T^k f$ strictement positive sur B .

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux éléments de</u> L^1_+ ; <u>posons</u> $f' = B_C f$, $g' = B_C g$. <u>L'ensemble</u> $C \cap \{G_T g' > 0\}$ <u>contient</u> $C \cap \{G_T g > 0\}$, <u>et les rapports</u>

$$\frac{T_{o,n} f}{T_{o,n} g} \quad \underline{\text{et}} \quad \frac{T_{o,n} f'}{T_{o,n} g'}$$

<u>ont p. p. la même limite sur</u> $\{G_T g > 0\} \cap C$.

(d) Etudions alors le cas <u>purement conservatif</u>. Nous avons vu, plus haut, que toutes les fonctions excessives finies sont invariantes dans ce cas. En particulier, on a $N1 = 1$. Désignons par $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées h , telles que l'on ait $Nh = h$; cet espace contient les constantes, et la limite d'une suite monotone bornée d'éléments de $\mathcal{H}$ appartient à $\mathcal{H}$. D'autre part, la relation $Nh = h$ équivaut à $Nh \leqslant h$; ceci a été vérifié pour les fonctions positives, et s'étend aux fonctions bornées par l'addition d'une constante. L'espace $\mathcal{H}$ est donc stable pour l'opération <u>inf</u> . Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des parties dont l'indicatrice (fonction caractéristique) appartient à $\mathcal{H}$; un théorème classique affirme que $\mathfrak{J}$ est une tribu, et que $\mathcal{H}$ est égal à l'ensemble des fonctions

$\mathfrak{J}$-mesurables bornées. Les éléments de $\mathfrak{J}$ sont appelés les ensembles invariants.

Il est intéressant d'avoir une caractérisation des ensembles invariants qui ne fasse intervenir que l'opérateur T. Supposons A invariant : la relation $N(\varphi_A) = \varphi_A$ nous donne, si $f \in L^1_+$ est nulle hors de A,

$$\int Tf\, d\mu = \int f\, d\mu = \int f.\varphi_A\, d\mu = \int f.N(\varphi_A)\, d\mu = \int_A Tf\, d\mu ,$$

de sorte que Tf est nulle hors de A. Inversement, si A possède cette propriété, on a $N(\varphi_A) < N(1)$, donc $N(\varphi_A) \leqslant N(1).\varphi_A \leqslant \varphi_A$, et A est invariant.

Soit A un ensemble ; nous désignerons par $\bar{A}$ le plus petit ensemble invariant qui contient A (aux ensembles négligeables près) ; toute fonction excessive h qui majore 1 sur A majore 1 sur $\bar{A}$, car l'ensemble $\{h \geqslant 1\}$ est invariant et contient A. On a donc

$$e_A = \varphi_{\bar{A}} .$$

Supposons que A ne soit pas négligeable, et que B soit un ensemble invariant non négligeable contenu dans $\bar{A}$; $B - A$ n'est alors pas négligeable (car sinon $\bar{A} - (B \cap A)$ contiendrait A, serait invariant et plus petit que $\bar{A}$), et l'on a $B = \overline{B \cap A}$ aux ensembles négligeables près (car sinon $B - (\overline{B \cap A})$ serait invariant, contenu dans $\bar{A}$, non négligeable, et disjoint de A).

Nous pouvons alors démontrer le théorème de Chacón. La notation $E[\ |\mathfrak{J}]$ représente l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathfrak{J}$.

THÉORÈME. - Supposons T purement conservatif, et soient f et g deux éléments de L^1_+. Les ensembles $\{G_T\, g = +\infty\}$, $\{G_T\, g > 0\}$, $\{E[g|\mathfrak{J}] > 0\}$ sont égaux, et l'on a, sur $\{G_T\, g > 0\}$, en posant $D_n = \dfrac{T_{o,n} f}{T_{o,n}\, g}$,

$$\lim D_n = \frac{E[f|\mathfrak{J}]}{E[g|\mathfrak{J}]} .$$

Démonstration. - Nous nous bornerons au cas où g est partout strictement positive : il en est alors de même de la fonction $E[g|\mathfrak{J}]$. Désignons par D la limite au premier membre, par L le rapport au second membre. Il suffira d'établir que l'oh a, pour tout couple de nombres réels a, b tels que $0 \leqslant a < b < +\infty$,

$$a \leqslant L \leqslant b \quad \text{p. p. sur l'ensemble } A = \{a < D < b\} ;$$

cela entraînera, en effet, que toute fonction étagée mesurable qui approche D à ε près approche aussi L à ε près. La fonction L étant $\mathfrak{J}$-mesurable, il suffira de montrer que l'on a $a \leqslant L \leqslant b$ sur $\bar{A}$, ou encore que l'on a

$$\int_B \left(E[f|\mathfrak{I}] - aE[g|\mathfrak{I}]\right) d\mu \geqslant 0 , \qquad \int_B \left(bE[g|\mathfrak{I}] - E[f|\mathfrak{I}]\right) d\mu \geqslant 0$$

pour tout ensemble invariant $B \subset A$, ou encore, d'après la définition des espérances conditionnelles,

$$\int_B (f - ag)\, d\mu \geqslant 0 , \qquad \int_B (bg - f)\, d\mu \geqslant 0 ,$$

ou encore, en tenant compte de la relation $B = \overline{B \cap A}$, $\varphi_B = e_{B\cap A}$,

$$\int_{e_{B\cap A}} (f - ag)\, d\mu \geqslant 0 , \qquad \int_{e_{B\cap A}} (bg - f)\, d\mu \geqslant 0 .$$

Ces inégalités sont des conséquences immédiates du lemme de Brunel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUNEL (Antoine). - Sur un lemme ergodique voisin du lemme de E. Hopf et sur une de ses applications, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 5481-5484.

[2] DENY (Jacques). - Les noyaux élémentaires, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 4, 1959/60, n° 4, 12 p.

[3] NEVEU (Jacques). - Relation entre la théorie des martingales et la théorie ergodique, Colloque international du Centre national de la Recherche scientifique : Théorie du potentiel [Juin 1964. Orsay], Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

La démonstration complète du théorème de Chacón, cité au début de l'exposé, figure dans :

[4] CHACÓN (R. V.). - Convergence of operator averages, Ergodic theory, Proceedings of an international symposium held at Tulane University [1961. New Orleans], p. 89-120. - New York, London, Academic Press, 1963.