Séminaire N. Bourbaki

Jean-Pierre Kahane

Algèbres tensorielles et analyse harmonique

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 291, p. 221-230

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__221_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 291

Mai 1965

ALGÈBRES TENSORIELLES ET ANALYSE HARMONIQUE

par Jean-Pierre KAHANE

(d'après N. T. VAROPOULOS [7], [8])

0. Introduction.

Il s'agit essentiellement ici du contenu de deux très récentes notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Séances des 3 et 24 mai 1965 [7] et [8]).

VAROPOULOS introduit une nouvelle méthode pour attaquer certains problèmes ouverts en analyse harmonique, que je veux d'abord rappeler.

Γ étant un groupe abélien localement compact infini, G le groupe dual, $A(\Gamma)$ est l'algèbre de Banach constituée par les fonctions transformées de Fourier de fonctions sommables sur G :

$$f(x) = \int_G \hat{f}(\xi)\ \xi(x)\ d\xi\ , \qquad \hat{f} \in L^1(G)$$

$$\|f\|_{A(\Gamma)} = \|\hat{f}\|_{L^1(G)} = \int_G |\hat{f}(\xi)|\ d\xi\ ;$$

$\xi(x)$ est la valeur en x du caractère ξ , et $d\xi$ la mesure de Haar normalisée sur G .

En 1958 et 1959 ont été démontrés deux théorèmes importants.

THÉORÈME 0.1 (KATZNELSON, etc.). - Seules les fonctions analytiques opèrent dans $A(\Gamma)$.

Cela signifie que, si Φ est une fonction définie sur $]-1\ ,\ 1[$, et si $\Phi \circ f \in A(\Gamma)$ pour toute $f \in A(\Gamma)$ à valeurs dans $]-1\ ,\ 1[$, Φ est analytique au voisinage de 0 dans tous les cas, et sur $]-1\ ,\ 1[$ si Γ n'est pas discret.

THÉORÈME 0.2 (MALLIAVIN). - Si Γ n'est pas discret, $A(\Gamma)$ ne satisfait pas à la synthèse spectrale.

Cela signifie qu'il existe un fermé $E \subset \Gamma$, et une $f \in A(\Gamma)$, nulle sur E , et non approchable dans $A(\Gamma)$ par des $g \in A(\Gamma)$ à supports disjoints de E . On dit alors que E est un ensemble de non-synthèse (ou n'est pas ensemble de synthèse).

Dans le cas $\Gamma = \underset{\sim}{R}^3$, ou aussi bien $\Gamma = \underset{\sim}{T}^3$, un exemple très simple d'ensemble de non-synthèse avait été donné par L. SCHWARTZ en 1948 : à savoir une sphère (quelconque si $\Gamma = \underset{\sim}{R}^3$, suffisamment petite si $\Gamma = \underset{\sim}{T}^3$). La méthode de MALLIAVIN, et toutes les variantes qui en ont été données (la plus récente, et la meilleure, se trouvera dans [4]) semblent irréductibles à celle de SCHWARTZ. Et cependant ... (voir ci-dessous).

Les problèmes ouverts concernent les ensembles fermés $E \subset \Gamma$, et le rôle qu'ils jouent par rapport aux généralisations des théorèmes 0.1 et 0.2 (d'où le titre choisi par VAROPOULOS : "Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques").

On désigne par $A(E)$ l'algèbre de Banach formée par les restrictions à E des fonctions $\in A(\Gamma)$. Pour certains ensembles compacts E , qu'on appelle ensembles de Helson, $A(E)$ contient toutes les fonctions continues sur E ; il revient au même de dire que toutes les fonctions continues opèrent dans $A(E)$. Pour d'autres ensembles E au contraire, seules les fonctions analytiques opèrent dans $A(E)$; on dit alors que E est un ensemble d'analyticité. Par exemple, il en est ainsi si E contient des mailles arbitrairement riches, c'est-à-dire que, pour tout n , il existe $x_o , x_1 , \dots , x_n \in \Gamma$ tels que les 2^n points $x_o + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n$ $(\varepsilon_j = 0 , 1)$ soient distincts et appartiennent à E ([3]). Dans cette direction, c'était là le meilleur résultat publié. Des travaux inédits, de KATZNELSON et MALLIAVIN, concernent des ensembles aléatoires ; dans tous les cas qu'ils ont étudiés, ces ensembles sont presque sûrement d'analyticité, à moins qu'ils ne soient, pour des raisons évidentes, ensembles de Helson. Cela vient - pour le moment - à l'appui de la conjecture selon laquelle tout compact serait soit ensemble de Helson, soit d'analyticité.

En ce qui concerne les ensembles de synthèse, la difficulté d'en obtenir une caractérisation a amené MALLIAVIN à définir, en 1962, les ensembles de résolution spectrale : ce sont les ensembles fermés $E \subset \Gamma$ dont toute partie fermée est ensemble de synthèse. MALLIAVIN a montré qu'un ensemble de multiplicité, au sens de séries trigonométriques, est un ensemble de non-résolution ([5]). On a obtenu ensuite d'autres exemples de non-résolution, parmi lesquels tous les ensembles parfaits symétriques ([2]). On ne sait pas encore si tout ensemble de Helson est ensemble de résolution.

VAROPOULOS met en évidence de nouvelles classes d'ensembles d'analyticité et d'ensembles de non-résolution : à savoir, respectivement, les sommes algébriques de deux ensembles infinis et les sommes directes de deux ensembles parfaits. Pour les spécialistes, c'est là un test de la puissance de sa méthode. Comme on va le voir, elle apporte dans la question un point de vue nouveau et prometteur.

1. Les algèbres de Varopoulos.

La présentation qui suit s'inspire à la fois de [7] et [8], et de la très élégante mise en forme due à C. S. HERZ ([1]).

K est un groupe abélien compact, $C(K)$ et $C(K \times K)$ sont respectivement les espaces des fonctions continues à valeurs complexes sur K et sur $K \times K$. $A(K)$ a déjà été définie ; comme le groupe dual $\hat{K}$ est discret, on note

$$f = \sum_{\chi \in \hat{K}} a_\chi \chi \ , \qquad \|f\|_A = \sum |a_\chi| < \infty \ .$$

Notons $V(K) = C(K) \hat{\otimes} C(K)$ l'ensemble des $\varphi \in C(K \times K)$ qui s'écrivent

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes g_j \ , \tag{1}$$

avec

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{C(K)} \|g_j\|_{C(K)} < \infty \ . \tag{2}$$

(VAROPOULOS utilise la notation $B(K)$, qui a l'inconvénient de signifier déjà beaucoup de choses.) C'est une algèbre de Banach, la norme $\|\varphi\|_{V(K)}$ étant la borne inférieure de (2) pour tous les $(f_j \ , g_j)$ qui satisfont à (1). On a les inclusions topologiques

$$A(K \times K) \xrightarrow{\subset} V(K) \xrightarrow{\subset} C(K \times K)$$

et le spectre de $V(K)$ est donc $K \times K$.

Avant d'aller plus loin, une remarque : la structure de groupe intervient dans la définition de $A(K)$, mais non dans celle de $V(K)$. L'intérêt essentiel de ces algèbres de Varopoulos est d'introduire une structure de groupe quand on en a besoin, puis de la vider, puis de changer de groupe, etc. Le lecteur attentif s'en apercevra peut-être dans la suite.

On définit maintenant deux applications linéaires M et P :

$$C(K) \xrightarrow{M} C(K \times K) \xrightarrow{P} C(K)$$

$$f \in C(K) \quad \text{donne} \quad Mf(x , y) = f(x + y)$$

$$\varphi \in C(K \times K) \quad \text{donne} \quad P\varphi(x) = \int_K \varphi(x - y , y)\, dy \ ,$$

et on égrène les lemmes suivants :

LEMME 1.1. - PM <u>est l'identité de</u> $C(K)$.

<u>Preuve</u> : $PMf(x) = \int_K Mf(x-y\ ,\ y)\ dy = \int_K f(x)\ dy = f(x)$.

LEMME 1.2. - M <u>applique continûment</u> $A(K)$ <u>dans</u> $V(K)$, <u>et sa norme est</u> ≤ 1 .

<u>Preuve</u> : $\chi(x+y) = \chi(x)\ \chi(y)$, donc $\|M\chi\|_{V(K)} \leq \|\chi\|_{A(K)}$; on ajoute et on complète.

LEMME 1.3. - P <u>applique continûment</u> $V(K)$ <u>dans</u> $A(K)$, <u>et sa norme est</u> ≤ 1 .

<u>Preuve</u> : Il suffit de vérifier $\|P\varphi\|_{A(K)} \leq \|\varphi\|_{V(K)}$ quand $\varphi = f \otimes g$. Or on a dans ce cas $P\varphi = f \star g$, et comme

$$\|f \star g\|_{A(K)} \leq \|f\|_{L^2(K)}\ \|g\|_{L^2(K)} \leq \|f\|_{C(K)}\ \|g\|_{C(K)}\ , \tag{3}$$

le lemme est démontré (la première inégalité (3) se voit en appliquant à la transformée de Fourier l'inégalité de Schwarz).

LEMME 1.4. - $MA(K)$ <u>est constituée par les</u> $\varphi \in V(K)$ <u>qui ne dépendent que de</u> $x+y$ <u>(c'est-à-dire</u> $\varphi(x\ ,\ y) = f(x+y)$).

<u>Preuve</u> : Lemme 2 dans un sens, et lemme 3 dans l'autre, en remarquant que $P\varphi = f$ (lemme 1).

A ce stade, on a déjà :

THÉORÈME 1.1. - <u>Seules les fonctions analytiques opèrent dans</u> $V(K)$.

Car, d'après le lemme 4, si une fonction opère dans $V(K)$, elle opère dans $M\,A(K)$, donc dans $A(K)$.

Démontrons maintenant :

THÉORÈME 1.2. - $V(K)$ <u>ne satisfait pas la synthèse spectrale</u>.

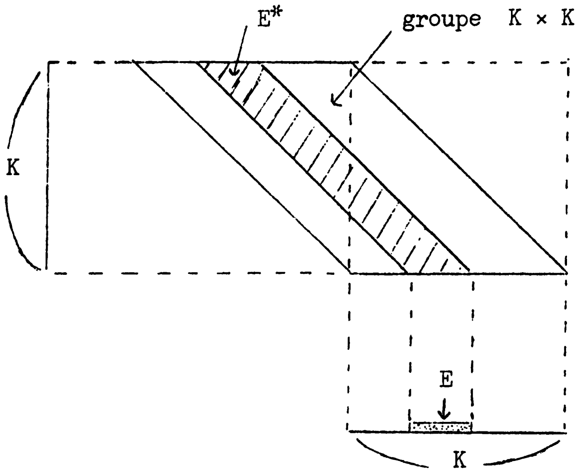
Nous allons le déduire (la remarque aura son importance plus tard) du fait que, pour le groupe K considéré, $A(K)$ ne satisfait pas la synthèse spectrale. Soient en effet E un fermé de non-synthèse dans K , et $f \in A(K)$ une fonction, nulle sur E , non approchable par des $g \in A(K)$ à supports disjoints de E . Soit

$$E^* = \{(x\ ,\ y)\ |\ x+y \in E\} \subset K \times K\ .$$

Considérons Mf , et une fonction $\psi \in V(K)$ nulle au voisinage de E^* . D'après les lemmes 3 et 1,

$$\|f - P\psi\|_{A(K)} = \|P(Mf - \psi)\|_{A(K)} \leq \|Mf - \psi\|_{V(K)}\ .$$

Or $g = P\psi$ a son support disjoint de E . Donc Mf , qui s'annule sur E^* , n'est pas approchable dans $V(K)$ par des fonctions ψ nulles au voisinage de E^* , ce qui démontre le théorème.



Autre démonstration (C. S. HERZ). On égrène quelques lemmes supplémentaires.

LEMME 1.5. - Pour toutes $f \in C(K)$ et $\varphi \in C(K \times K)$, on a

$$P(\varphi Mf) = (P\varphi)f \ .$$

Preuve : Comme lemme 1.1, mutatis mutandis.

LEMME 1.6. - Soient $\mathfrak{I}$ un idéal dans $A(K)$, et $\mathfrak{I}^*$ l'idéal engendré par $M\mathfrak{I}$ dans $V(K)$; alors $\mathfrak{I} = P\mathfrak{I}^*$.

Preuve : Lemmes 1.5 et 1.3.

LEMME 1.7. - Mêmes hypothèses ; alors, pour les adhérences de $\mathfrak{I}$ dans $A(K)$ et de $\mathfrak{I}^*$ dans $V(K)$, on a $\overline{\mathfrak{I}} = P\overline{\mathfrak{I}^*}$.

Preuve : Lemmes 1.6, 1.2 et 1.3.

Conséquence : Si deux idéaux fermés différents $\mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I}_2$ dans $A(K)$ ont la même enveloppe E , on vérifie facilement que $\overline{\mathfrak{I}_1^*}$ et $\overline{\mathfrak{I}_2^*}$ ont la même enveloppe E^* , et ils sont différents d'après le lemme 1.7. Cela permet la traduction à $V(K)$ de tous les résultats bizarres qu'on connait sur les idéaux fermés de $A(K)$ ([6]).

2. Etalement des $V(K)$.

Dans ce paragraphe, K sera, sauf avis contraire, le groupe compact D_∞ , produit dénombrable de groupes à deux éléments. Pour ce groupe particulier, les théorèmes sur $A(K)$ se démontrent de façon assez simple, comme je l'esquisserai tout à l'heure (voir plutôt [4]).

Soient Γ un groupe abélien localement compact, non discret pour le moment, et K_1 et K_2 deux parties de Γ homéomorphes à K, satisfaisant à la condition suivante (qui traduit une sorte d'indépendance assez faible) :

(i) Tout $x \in \Gamma$ s'écrit au plus d'une façon sous la forme

$$x = x_1 + x_2 , \qquad x_1 \in K_1 , \qquad x_2 \in K_2 .$$

Posons $S = K_1 + K_2$. On a les bijections canoniques

$$K \times K \longrightarrow K_1 \times K_2 \longrightarrow K_1 + K_2$$

qui permettent d'identifier $C(K \times K)$ et $C(S)$. Dans ces conditions, $V(K)$ s'identifie à une partie de $C(S)$: c'est "l'étalement" de $V(K)$.

LEMME 2.1. - Avec l'identification précédente, $A(S) \xrightarrow{\subset} V(K)$, et l'injection est à norme décroissante.

Preuve : $\sum a_\chi \, \chi(x_1 + x_2) = \sum a_\chi \, \chi(x_1)\, \chi(x_2)$.

Faisons maintenant une hypothèse beaucoup plus forte (satisfaite en particulier si K_1 et K_2 sont deux parties disjointes d'un même ensemble de Kronecker ([6]) :

(ii) $K_1 \cap K_2 = \phi$; on note $K' = K_1 \cup K_2$;

(iii) soit γ le plus petit sous-groupe multiplicatif du cercle $|z| = 1$ où les caractères de Γ prennent leurs valeurs ; alors toute fonction continue $\xi : K' \to \gamma$ est approchable sur K', à moins de $\eta = 1/3$ près, par un caractère χ, c'est-à-dire $|\chi(x) - \xi(x)| \leq \eta$ pour tout $x \in K'$.

LEMME 2.2. - Sous les hypothèses (i), (ii), (iii), $V(K) \xrightarrow{\subset} A(S)$, et la norme de l'injection ne dépasse pas 36.

Preuve : Soit $\varphi \in V(K)$, c'est-à-dire

$$\varphi(x_1 + x_2) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x_1)\, g_j(x_2) \qquad (x_1 \in K_1 , \quad x_2 \in K_2)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{C(K_1)} \|g_j\|_{C(K_2)} \leq 2\|\varphi\|_{V(K)} .$$

(iii) entraîne que K_1 et K_2 sont des ensembles de Helson, et plus précisément que

$$\|f_j\|_{A(K_1)} \leqslant 2\|f_j\|_{C(K_1)} \quad , \qquad \|g_j\|_{A(K_2)} \leqslant 2\|g_j\|_{C(K_2)}$$

(2 désignant au besoin une constante absolue suffisamment grande, de même que 36 , etc.). Donc

$$\varphi(x_1 + x_2) = \sum_{\chi_1,\chi_2} a_{\chi_1,\chi_2}\, \chi_1(x_1)\, \chi_2(x_2) \ ,$$

(4)
$$\sum_{\chi_1,\chi_2} |a_{\chi_1,\chi_2}| \leqslant 8\|\varphi\|_{V(K)} \ .$$

Soient $\xi : K' \longrightarrow \gamma$ la fonction dont la restriction à K_j est χ_j $(j = 1 , 2)$, et $\chi = \chi(\chi_1 , \chi_2)$ le caractère défini par (iii). Posons

$$T\varphi(x) = \sum_{\chi_1,\chi_2} a_{\chi_1,\chi_2}\, \chi(x) \ .$$

On a, d'après (iii),

$$\|\chi_1(x_1)\, \chi_2(x_2) - \chi(x_1)\, \chi(x_2)\|_{V(K)} \leqslant 2\eta + \eta^2 = \frac{7}{9} \ ,$$

donc

$$\|T\varphi - \varphi\|_{V(K)} \leqslant \frac{7}{9}\, \|\varphi\|_{V(K)} \ ;$$

d'autre part, d'après (4),

$$\|T\varphi\|_{A(K)} \leqslant 8\|\varphi\|_{V(K)} \ .$$

En itérant, on voit que

$$\|T(T - I)^n\, \varphi\|_{A(K)} \leqslant 8\ \|(T - I)^n\, \varphi\|_{V(K)} \ ,$$

$$\|(T - I)^n\, \varphi\|_{V(K)} \leqslant \frac{7}{9}\, \|(T - I)^{n-1}\, \varphi\|_{V(K)} \ ,$$

d'où, en ajoutant,

$$\|\varphi\|_{A(K)} \leqslant 36\|\varphi\|_{V(K)} \ .$$

COROLLAIRE. - Sous les hypothèses (i), (ii), (iii), $V(K) = A(S)$, et les normes sont équivalentes. On peut donc traduire pour $A(S)$ les théorèmes 1.1 et 1.2.

On utilise encore un lemme, que nous ne démontrerons pas (cf. [6] pour des énoncés voisins).

LEMME 2.3. - Si $E \subset \Gamma$ contient la somme algébrique de deux ensembles parfaits, métrisables, il contient aussi un $S = K_1 + K_2$ satisfaisant à (i), (ii), (iii).

Et on obtient :

THÉORÈME 2.1. - Si $E \subset \Gamma$ contient la somme algébrique de deux ensembles parfaits, E est ensemble d'analyticité.

THÉORÈME 2.2. - Même hypothèse : E est un ensemble de non-résolution.

On peut améliorer le théorème 2.1 (de façon qu'il s'applique aussi à des groupes Γ discrets). Voici, sommairement, comment. On considère $K = D_n$, produit de n groupes à 2 éléments, au lieu de D_∞ . On peut démontrer (à défaut du fait que seules les fonctions analytiques opèrent !), que la fonction

$$N(r) = N_{A(D_n)}(r) = \sup \|e^{if}\|$$

$$(\sup = \sup \text{ pour } f \text{ réelle }, \ \|f\|_{A(D_n)} \leqslant r)$$

satisfait à

$$N(r) \geqslant e^{r/2} \quad \text{pour} \quad r < r_n \ , \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty \ .$$

Alors il en est de même pour $N_{V(D_n)}(r)$ (lemme 1.4). Donc, si E contient la somme algébrique de deux ensembles finis K_1 et K_2 à n éléments, satisfaisant (i), (ii), (iii), on a

$$N_{A(E)}(r) \geqslant \frac{1}{36} e^{r/2} \quad \text{pour} \quad r < r_n \ ,$$

et on sait que, si cela a lieu quel que soit n , E est ensemble d'analyticité ([2]).

On obtient :

THÉORÈME 2.3. - Si, pour tout entier $m > 0$, E contient la somme algébrique de deux ensembles finis de m éléments, E est ensemble d'analyticité.

(Ici, au lieu du lemme 2.3, on utilise le fait que, si E satisfait à l'hypothèse, il contient aussi, pour tout n , la somme algébrique de deux ensembles K_1 et K_2 de 2^n éléments, satisfaisant à (i), (ii), (iii).)

3. Le théorème de Malliavin déduit de l'exemple de Schwartz.

On va appliquer le théorème 2.2, qui montre qu'aucun $A(\Gamma)$ ne satisfait la synthèse (Γ non discret) à partir du fait que $V(D_\infty)$ ne la satisfait pas, et le théorème 1.2 dans le cas particulier $K = \underset{\sim}{T}^3$ où (voir début de la démonstration) il résulte de l'exemple de Schwartz.

PROBLÈME. - Sachant que $V(\underset{\sim}{T}^3)$ ne satisfait pas la synthèse, prouver que $V(D_\infty)$ ne la satisfait pas non plus.

Quand on aura répondu positivement, le théorème de Malliavin sera démontré, pour tous les groupes non discrets, avec fort peu de calculs, et une méthode très différente de celles jusqu'alors employées.

Soit $s : D^\infty \longrightarrow \underset{\sim}{T}^3$ une application donnée par les développements binaires :

$$(\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \dots) \longrightarrow (0 , \varepsilon_1 \varepsilon_4 \varepsilon_7 \dots ; 0 , \varepsilon_2 \varepsilon_5 \varepsilon_8 \dots ; 0 , \varepsilon_3 \varepsilon_6 \varepsilon_9 \dots) .$$

Elle est continue, surjective, et même bijective si l'on supprime de $\underset{\sim}{T}^3$ et de D_∞ deux ensembles de mesure nulle. En composant à droite avec s et s^{-1}, on a

$$C(\underset{\sim}{T}^3) \longrightarrow C(D) \longrightarrow L^\infty(\underset{\sim}{T}^3) ,$$

et, en tensorisant ces applications,

$$C(\underset{\sim}{T}^3) \hat{\otimes} C(\underset{\sim}{T}^3) \longrightarrow C(D) \hat{\otimes} C(D) \longrightarrow L^\infty(\underset{\sim}{T}^3) \otimes L^\infty(\underset{\sim}{T}^3)$$

que nous notons

$$V(\underset{\sim}{T}^3) \xrightarrow{\sigma} V(D_\infty) \xrightarrow{\sigma'} V'(\underset{\sim}{T}^3) .$$

Chaque application est à norme décroissante, et l'application composée

$$\sigma'\sigma : V(\underset{\sim}{T}^3) \longrightarrow V'(\underset{\sim}{T}^3) ,$$

qui est l'injection canonique, ne peut diminuer la norme d'aucun élément (on le voit en régularisant). Donc l'application $\sigma : V(\underset{\sim}{T}^3) \longrightarrow V(D_\infty)$ est un homomorphisme isométrique. Il lui correspond une application continue du second spectre dans le premier :

$$\bar{\sigma} : D_\infty \times D_\infty \longrightarrow \underset{\sim}{T}^3 \times \underset{\sim}{T}^3 .$$

Soient maintenant E un fermé de non-synthèse dans $\underset{\sim}{T}^3 \times \underset{\sim}{T}^3$, et $f \in V(\underset{\sim}{T}^3)$ une fonction nulle sur E , non approchable dans $V(\underset{\sim}{T}^3)$ par des g nulles au voisinage de E . Supposons, par absurde, que σf soit approchable dans $V(D_\infty)$ par des

$h \in V(D_\infty)$ nulles au voisinage de $\overset{\leftarrow}{\sigma}^{-1} E$. Alors $\sigma'\sigma f = f$ serait approchable dans $V'(\underset{\sim}{T}^3)$ par des $\sigma h \in V'(\underset{\sim}{T}^3)$, nulles au voisinage de E. En régularisant, on obtient une approximation de f dans $V(\underset{\sim}{T}^3)$ par des g nulles au voisinage de E, contrairement à l'hypothèse.

Le problème est ainsi résolu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HERZ (Carl S.). - Synthèse harmonique de distribution dans le plan, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 4887-4890.

[2] KAHANE (J.-P.) et KATZNELSON (Y.). - Contribution à deux problèmes, concernant les fonctions de la classe A, Israel J. of Math., t. 1, 1963, p. 110-131.

[3] KATZNELSON (Yiatzhak). - Sur un théorème de Kahane et Salem concernant les ensembles parfaits symétriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 2514-2515.

[4] KATZNELSON (Yiatzhak). - Cours sur les séries de Fourier et l'analyse harmonique, professé à Stanford University, Printemps 1965.

[5] MALLIAVIN (Paul). - Ensembles de résolution spectrale, Proceedings of the international congress of mathematicians [14. 1962. Stockholm], p. 368-378. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

[6] RUDIN (Walter). - Fourier analysis on groups. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12). [Cet ouvrage contient toutes les références désirables, antérieures à 1961.]

[7] VAROPOULOS (Nicholas T.). - Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques, I., C. R. Avad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 4668-4670.

[8] VAROPOULOS (Nicholas T.). - Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques, II., C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 5165-5168.