

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE GRISVARD

Méthodes opérationnelles dans l'étude des problèmes aux limites

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 289, p. 187-197

http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__187_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉTHODES OPÉRATIONNELLES DANS L'ÉTUDE DES PROBLÈMES AUX LIMITES

par Pierre GRISVARD

1. Motivation.

1.1 On se propose de résoudre le problème aux limites suivant : Etant donné $f \in L_p(Q)$ (Q cylindre $I \times \Omega$, avec $I =]0, T[$, $T < +\infty$ et Ω ouvert borné "régulier" de \mathbb{R}^n), on cherche u , solution de

$$(1.1) \quad \begin{cases} u, \partial u / \partial t, D^\alpha u \in L_p(Q), & |\alpha| \leq 2m, \\ Lu = -\partial u / \partial t + A(D)u = f & \text{dans } Q, \\ u(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ C_j(D)u = 0 & \text{sur } I \times \partial\Omega, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

où $A(D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha$, $D = (\partial / \partial x_1, \dots, \partial / \partial x_n)$ est tel que $(-1)^{m+1} A(D)$ soit fortement elliptique (L est alors un opérateur parabolique), i. e.

$$\operatorname{Re}(-1)^{m+1} \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha \xi^\alpha > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \neq 0,$$

et où les $C_j(D) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} c_{j,\alpha} D^\alpha$ sont m opérateurs d'ordre $\leq 2m - 1$ (les a_α et $c_{j,\alpha}$ sont des fonctions différentiables de la seule variable $x \in \bar{\Omega}$).

1.2 On peut reformuler le problème (1.1) de la manière suivante : On pose $E = L_p(Q)$,

$$D_A = L_p(W_p^{2m}(\Omega; \{C_j\})) = \{u; D^\alpha u \in L_p(Q), |\alpha| \leq 2m, C_j(D)u = 0 \text{ sur } I \times \partial\Omega\},$$

$$D_B = {}_0W_p^1(L_p(\Omega)) = \{u; u, \partial u / \partial t \in L_p(Q), u(0, x) = 0\},$$

alors $A = A(D)$ et $B = -\partial / \partial t$ sont des opérateurs linéaires non bornés dans E , de domaines D_A et D_B respectivement.

La propriété suivante est évidente :

(i) B est un opérateur fermé, de spectre vide et

$$\|(-B + \lambda)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq 1/\operatorname{Re} \lambda \quad \text{pour } \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

D'après LIONS [10] dans le cas $p = 2$, et AGMON [1] dans le cas $1 < p < +\infty$ (hy-

pothèse que nous ferons toujours dans la suite), si on suppose que, pour tout λ avec $\pi/2 < \arg \lambda < 3\pi/2$ et pour tout $x \in \partial\Omega$, ξ vecteur tangent non nul à $\partial\Omega$ en x , et n désignant la normale à $\partial\Omega$ en x intérieure à Ω , les polynômes en t : $C_j^0(\xi + tn)$ sont linéairement indépendants modulo $\prod_{k=1}^m (t - t_k)$ où les t_k sont les m racines de partie imaginaire positive du polynôme en t : $(-1)^{m+1} A^0(\xi + tn) - \lambda$ ⁽¹⁾, alors on a

(ii) A est un opérateur fermé, et il existe $\theta_0 < \pi/2$ et ρ_0 tels que $(A + \lambda)$ soit inversible et $\|(A + \lambda)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq C_A/|\lambda|$ pour $|\lambda| \geq \rho_0$ et $\theta_0 \leq \arg \lambda \leq 2\pi - \theta_0$.

Enfin on vérifie aisément ceci :

(iii) Les opérateurs (bornés dans E) $(A + \lambda)^{-1}$ et $(-B + \lambda)^{-1}$ commutent pour $|\lambda| \geq \rho_0$ et $\theta_0 \leq \arg \lambda \leq 2\pi - \theta_0$.

Ceci posé, le problème (1.1) est équivalent au suivant : Etant donné $f \in E$, on cherche u , solution de

$$(1.2) \quad \begin{cases} u \in D_A \cap D_B, \\ Au + Bu = f. \end{cases}$$

Nous allons étudier ce problème sous les hypothèses (i), (ii), (iii).

2. Interpolation et opérateurs non bornés.

2.1 On rappelle la définition des espaces d'interpolation réels de LIONS-PEETRE [11] : Soient F_i , $i = 0, 1$ deux espaces de Banach continûment plongés dans le même espace de Banach F ; on désigne par $(F_0, F_1)_{\theta, p}$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq +\infty$) le sous-espace de F formé des x qui, pour tout $t > 0$, peuvent s'écrire

$$x = v(t) + w(t)$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \|t^{-\theta} v(t)\|_{F_0}^p dt/t + \int_0^{+\infty} \|t^{1-\theta} w(t)\|_{F_1}^p dt/t < +\infty ;$$

$(F_0, F_1)_{\theta, p}$ est un espace de Banach pour la norme naturelle.

Les espaces ainsi construits ont la propriété d'interpolation : Si G_i , $i = 0, 1$ est un second couple d'espaces de Banach analogue au couple F_i , $i = 0, 1$, et si π est un opérateur linéaire continu de F dans G , qui applique F_i dans G_i , $i = 0, 1$, alors π est linéaire continu de $(F_0, F_1)_{\theta, p}$ dans $(G_0, G_1)_{\theta, p}$ et,

(1) Le symbole 0 signifie que l'on prend la partie homogène d'ordre maximum de l'opérateur.

de plus, on a la majoration

$$(2.1) \quad \|\pi\|_{(F_0, F_1)_{\theta, p} \rightarrow (G_0, G_1)_{\theta, p}} \leq \|\pi\|_{F_0 \rightarrow G_0}^{1-\theta} \|\pi\|_{F_1 \rightarrow G_1}^{\theta} .$$

Enfin l'application réitérée de la construction, rappelée ci-dessus, conduit à des espaces du même type ; plus précisément d'après LIONS-PEETRE [11], on a l'identité :

$$(2.2) \quad ((F_0, F_1)_{\theta_0, p_0} ; (F_0, F_1)_{\theta_1, p_1})_{\theta, p} = (F_0, F_1)_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1, p} .$$

2.2 Considérons à présent un espace de Banach E et un opérateur Λ (non borné) linéaire fermé dans E ; D_{Λ} est un espace de Banach pour la norme du graphe, et l'injection de D_{Λ} dans E est continue. Sous des hypothèses convenables sur Λ , on peut expliciter $(D_{\Lambda^m}, E)_{\theta, p}$:

THÉORÈME 2.1. - On suppose que $(-\Lambda + t)$ est inversible pour $t \geq 0$ et que $\|(-\Lambda + t)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq C_{\Lambda}/(t + 1)$, alors $(D_{\Lambda^m}, E)_{\theta, p}$ est le sous-espace de E formé des x tels que

$$\int_0^{+\infty} \|t^{m(1-\theta)} \Lambda^m (-\Lambda + t)^{-m} x\|_E^p dt/t < +\infty .$$

COROLLAIRE 2.1. - Sous les hypothèses du théorème 2.1, on a l'identité

$$(D_{\Lambda^m}, D_{\Lambda^n})_{\theta, p} = (D_{\Lambda^{\mu}}, D_{\Lambda^{\nu}})_{t, p} , \text{ lorsque } m(1-\theta) + n\theta = \mu(1-t) + \nu t .$$

Pour les démonstrations, renvoyons simplement à [6], [7].

3. Le théorème principal.

3.1 On revient au problème (1.2) : Il s'agit d'inverser l'opérateur $A + B$. Par analogie avec l'identité

$$(a + b)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (a + z)^{-1} (-b + z)^{-1} dz ,$$

où a et b sont des nombres complexes et γ un contour simple d'indice 1 par rapport à b et d'indice zéro par rapport à $-a$, on introduit l'opérateur

$$(3.1) \quad S = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (A + z)^{-1} (-B + z)^{-1} dz ,$$

où γ est un contour simple joignant $\infty e^{-i\theta}$ à $\infty e^{+i\theta}$ ($\theta_0 < \theta < \pi/2$) et tel que le spectre de $-A$ (ensemble des z pour lesquels $(A + z)$ n'est pas inversible) soit "extérieur" à γ . La fonction

$$z \mapsto (A + z)^{-1} (-B + z)^{-1}$$

admet une majoration en $1/|z|^2$ lorsque $|z| \rightarrow \infty$ sur le contour γ , et est holomorphe au voisinage de γ ; par conséquent (3.1) définit S comme opérateur linéaire continu dans E .

L'analogie scalaire n'est pas complète puisque sous les hypothèses (i), (ii), (iii), l'opérateur $A + B$ n'est pas inversible en général (on peut construire des contre-exemples); cependant on a :

THÉORÈME 3.1. - Sous les hypothèses (i), (ii), (iii), S a les propriétés suivantes :

- (1) $S(Au + Bu) = u$ pour $u \in D_A \cap D_B$;
- (2) $ASu + BSu = u$ pour $u \in D_A \cap D_B$;
- (3) S est linéaire continu de E dans $(D_{A^2}, E)_{\frac{1}{2}, \infty} \cap (D_{B^2}, E)_{\frac{1}{2}, \infty}$.

L'espace $(D_{A^2}, E)_{\frac{1}{2}, \infty} \cap (D_{B^2}, E)_{\frac{1}{2}, \infty}$ est un espace très "voisin" de $D_A \cap D_B$.

Nous verrons plus loin que, grâce à cet énoncé, on peut construire des sous-espaces de E dans lesquels la restriction de $A + B$ est inversible (d'inverse S).

3.2 Démonstration des points (1) et (2) : On a

$$S(Au + Bu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} u_z dz$$

avec

$$\begin{aligned} u_z &= (A + z)^{-1} (-B + z)^{-1} Bu + (-B + z)^{-1} (A + z)^{-1} Au \\ &= (-B + z)^{-1} u - (A + z)^{-1} u \\ &= (1/z) (-B + z)^{-1} Bu + (1/z) (A + z)^{-1} Au, \end{aligned}$$

d'où

$$S(Au + Bu) = - (-B + z)^{-1} Bu \Big|_{z=0} = u,$$

ce qui prouve (1).

Pour démontrer (2), on remarque que la fonction

$$z \mapsto (A + z)^{-1} (-B + z)^{-1}$$

admet une majoration en $1/|z|^2$ sur γ , comme opérateur linéaire continu dans $D_A \cap D_B$; par conséquent, on a $Su \in D_A \cap D_B$ et

$$ASu + BSu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} v_z dz$$

avec

$$\begin{aligned} v_z &= A(A+z)^{-1} (-B+z)^{-1} u + B(-B+z)^{-1} (A+z)^{-1} u \\ &= (-B+z)^{-1} u - (A+z)^{-1} u = u_z, \end{aligned}$$

d'où

$$ASu + BSu = u,$$

ce qui prouve (2).

3.3 Démonstration du point (3). Pour prouver que S est linéaire continu de E dans $(D_{B^2}, E)_{\frac{1}{2}, \infty}$, il suffit, d'après le théorème 2.1, de voir qu'il existe C tel que, pour $f \in E$, on ait

$$(3.2) \quad \|tB^2(-B+t)^{-2} Sf\|_E \leq C\|f\|_E$$

pour tout $t > 0$. Par un calcul analogue au précédent, utilisant l'"identité de la résolvante" et l'identité suivante

$$(-B+t)^{-2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (-B+z)^{-1} (z-t)^{-2} dz,$$

on obtient l'identité

$$tB^2(-B+t)^{-2} Sf = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} tz^2(-z+t)^{-2} (-B+z)^{-1} (A+z)^{-1} f dz.$$

On en déduit la majoration

$$\|tB^2(-B+t)^{-2} Sf\|_E \leq \frac{Cte}{2\pi} t \int_{\gamma} |t-z|^{-2} |dz| \|f\|_E,$$

d'où (3.2). La démonstration du fait que S est linéaire continu de E dans $(D_{A^2}, E)_{\frac{1}{2}, \infty}$ est analogue.

3.4 Nous allons utiliser le théorème 3.1 en remplaçant E par D_B ; précisément, posons $\tilde{E} = D_B$, et notons \tilde{A} et \tilde{B} les restrictions des opérateurs A et B à \tilde{E} , alors

$$D_{\tilde{A}} = \{x \in D_A \cap D_B; Ax \in D_B\}, \quad D_{\tilde{B}} = D_{B^2}.$$

Il est évident que \tilde{A} et \tilde{B} vérifient les hypothèses (i), (ii), (iii), dans \tilde{E} , et par conséquent \tilde{S} , restriction de S à \tilde{E} , est linéaire continu de \tilde{E} dans $(D_{\tilde{A}^2}, \tilde{E})_{\frac{1}{2}, \infty} \cap (D_{\tilde{B}^2}, \tilde{E})_{\frac{1}{2}, \infty}$. Nous savons donc en particulier que S est linéaire continu de E dans $(D_{B^2}, E)_{\frac{1}{2}, \infty}$ et de D_B dans $(D_{B^3}, D_B)_{\frac{1}{2}, \infty}$. Par interpolation, en utilisant le corollaire 2.1 et l'identité (2.2), on en déduit que S est linéaire continu de $(D_B, E)_{\theta, p}$ dans $(D_{B^2}, D_B)_{\theta, p}$, et par conséquent S est

linéaire continu de $(D_B, E)_{\theta, p}$ dans D_B , et S et BS sont linéaires continus dans $(B_B, E)_{\theta, p}$. Comme A est fermé, l'identité

$$ASf = Sf - BSf,$$

qui est vraie pour $f \in D_A \cap D_B$, se prolonge par continuité à $(D_B, E)_{\theta, p}$, car nos hypothèses impliquent que $D_A \cap D_B$ est dense dans D_B , donc aussi dans $(D_B, E)_{\theta, p}$ d'après LIONS-PEETRE [11]. On a ainsi prouvé :

COROLLAIRE 3.1. - Sous les hypothèses (i), (ii), (iii), $A + B$ est un isomorphisme de

$$W_{(D_B, E)_{\theta, p}}^{(A, B)} = \{u \in D_A \cap D_B ; Au, Bu \in (D_B, E)_{\theta, p}\}$$

sur $(D_B, E)_{\theta, p}$, d'inverse S .

Remarque.

1° Dans l'énoncé précédent, on peut évidemment intervertir les rôles de A et B .

2° On a obtenu le corollaire 3.1 en appliquant le théorème 3.1 à un sous-espace de E ; on aurait pu au contraire appliquer le théorème 3.1 à des extensions de E , on aurait ainsi obtenu des résultats d'isomorphisme dans des espaces plus "grands" que E .

4. Application aux équations paraboliques.

4.1 On revient au problème concret (1.1); il faut interpréter les espaces $(D_B, E)_{\theta, p}$. D'après le théorème 2.1, $({}_0W_p^1(L_p(\Omega)), L_p(Q))_{\theta, p}$ est le sous-espace de $L_p(Q)$ formé des fonctions u telles que

$$\int_0^{+\infty} r^{p(1-\theta)} \int_Q |u(t, x) - re^{-rt} \int_0^t e^{rs} u(s, x) ds|^p dt dx dr/r < +\infty.$$

Cette condition compliquée est équivalente, d'après LIONS-PEETRE [11], à la suivante, lorsque $1 - \theta < 1/p$,

$$\int_0^T \int_0^T \int_Q \frac{|u(t, x) - u(r, x)|^p}{|t - r|^{1+p(1-\theta)}} dx dt dr < +\infty,$$

et par conséquent $(D_B, E)_{\theta, p}$ n'est autre que l'espace $W_p^{1-\theta}(L_p(\Omega))$ déjà utilisé par de nombreux auteurs pour généraliser, au cas des exposants non entiers, les espaces de Sobolev (cf. par exemple [4], [12], [13]).

Compte tenu de ceci, nous avons prouvé :

THÉORÈME 4.1. - Sous les hypothèses du n° 1, et pour $1 < p < +\infty$, $0 < s < 1/p$, le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u, \partial u / \partial t, D^\alpha u \in W_p^s(L_p(\Omega)), \quad |\alpha| \leq 2m, \\ Lu = -\partial u / \partial t + A(D)u = f \quad \text{dans } Q, \\ u(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ C_j(D)u = 0 \quad \text{sur } I \times \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \right.$$

admet une solution unique pour $f \in W_p^s(L_p(\Omega))$.

De même, en échangeant les rôles de A et B, on obtient un énoncé analogue pour $1 < p < +\infty$, et $0 < s < 1/2mp$, où $W_p^s(L_p(\Omega))$ est remplacé par $L_p(W_p^s(\Omega))$, ce dernier espace désignant le sous-espace de $L_p(Q)$ formé des u telles que

$$\int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(t, x) - u(t, y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy dt < +\infty.$$

4.2 On peut encore appliquer les résultats du n° 3 aux équations paraboliques, en prenant pour E un espace différent de $L_p(Q)$. Prenons par exemple

$$E = W_p^{-s}(L_p(\Omega)) = \left(W_p^s(L_{p'}(\Omega)) \right)'$$

avec $-s > -1 + 1/p$ ($1/p + 1/p' = 1$); on vérifie facilement les hypothèses (i), (ii), (iii) sur les opérateurs A et B définis comme suit :

$$\begin{aligned} D_A &= W_p^{-s}(W_p^{2m}(\Omega, \{C_j\})) \\ &= \{u; D^\alpha u \in W_p^{-s}(L_p(\Omega)), \quad |\alpha| \leq 2m, \quad C_j(D)u = 0 \quad \text{sur } I \times \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_B &= {}_0W_p^{1-s}(L_p(\Omega)) \\ &= \{u; u, \partial u / \partial t \in W_p^{-s}(L_p(\Omega)), \quad u(0, x) = 0\} = \{u \in W_p^{1-s}(L_p(\Omega)); \quad u(0, x) = 0\}, \end{aligned}$$

avec $Au = A(D)u$ pour $u \in D_A$ et $Bu = -\partial u / \partial t$ pour $u \in D_B$.

Dans ce cas, d'après LIONS-PEETRE [11], on a

$$(D_B, E)_{\theta, p} = W_p^{1-s-\theta}(L_p(\Omega))$$

pour $1 - s - \theta < 1/p$ et $\neq 0$. En choisissant θ tel que $1 - s - \theta < 0$, on obtient l'extension du théorème 4.1 au cas où $-1 + 1/p < s < 0$. Le cas exceptionnel $1 - s - \theta = 0$ est le plus intéressant, nous allons le détailler : On a alors

$$(D_B, E)_{\theta, p} = B_p^0(L_p(\Omega))$$

(l'espace ainsi obtenu ne dépend pas du choix particulier de s). On ne sait pas

caractériser explicitement l'espace $B_p^0(L_p(\Omega))$ (sauf dans le cas $p = 2$ où il coïncide avec $L_2(Q)$), on sait seulement que les inclusions suivantes ont lieu (cf. [7], [13]) :

$$(4.1) \quad B_p^0(L_p(\Omega)) \subset L_p(Q) \quad \text{pour } 1 < p \leq 2 ,$$

$$(4.2) \quad B_p^0(L_p(\Omega)) \supset L_p(Q) \quad \text{pour } 2 \leq p < +\infty .$$

On a donc :

THÉORÈME 4.2. - Sous les hypothèses du n° 1, et pour $1 < p < +\infty$, le problème

$$\begin{cases} u , \partial u / \partial t , D^\alpha u \in B_p^0(L_p(\Omega)) , & |\alpha| \leq 2m , \\ Lu = - \partial u / \partial t + A(D)u = f & \text{dans } Q , \\ u(0 , x) = 0 & \text{dans } \Omega , \\ C_j(D)u = 0 & \text{sur } I \times \partial\Omega , \quad j = 1 , \dots , m \end{cases}$$

admet une solution unique pour $f \in B_p^0(L_p(\Omega))$.

4.3 Compte tenu de l'identité $B_2^0(L_2(\Omega)) = L_2(Q)$, on a complètement résolu le problème (1.1) dans le cas $p = 2$. Le théorème 4.2 joint à un résultat sur les intégrales singulières permet de résoudre le problème (1.1) dans le cas $p \leq 2$.

Pour commencer, on explicite les problèmes aux limites non homogènes correspondant aux problèmes résolus dans le théorème 4.2 ; pour cela, on utilise :

LEMME 4.1. - Soit w telle que

$$w , \partial w / \partial t , D^\alpha w \in L_p(Q) \quad |\alpha| \leq 2m ,$$

alors il existe v telle que

$$v , \partial v / \partial t , D^\alpha v \in B_p^0(L_p(\Omega)) \quad |\alpha| \leq 2m ,$$

et que

$$\begin{cases} w(0 , x) = v(0 , x) & \text{dans } \Omega , \\ C_j(D)w = C_j(D)v & \text{sur } I \times \partial\Omega \quad j = 1 , \dots , m \end{cases}$$

(cf. [7] pour la démonstration d'énoncés voisins). On en déduit :

LEMME 4.2. - Sous les hypothèses du n° 1, et pour $1 < p \leq 2$, étant donnée w telle que

$$w , \partial w / \partial t , D^\alpha w \in L_p(Q) \quad |\alpha| \leq 2m$$

il existe u telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} u, \partial u / \partial t, D^\alpha u \in L_p(Q), \quad |\alpha| \leq 2m, \\ Lu = -\partial u / \partial t + A(D)u = 0 \text{ dans } Q, \\ u(0, x) = w(0, x) \text{ dans } \Omega, \\ C_j(D)u = C_j(D)w \text{ sur } I \times \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

En effet, soit v comme dans le lemme 4.1, on a $Lv = f \in B_p^0(L_p(\Omega))$, et par conséquent on peut, d'après le théorème 4.2, trouver une fonction a telle que

$$a, \partial a / \partial t, D^\alpha a \in B_p^0(L_p(\Omega)) \quad |\alpha| \leq 2m$$

avec $La = f$ dans Q et $a(0, x) = 0$, $C_j(D)a = 0$ sur $I \times \partial\Omega$, $j = 1, \dots, m$; $u = v - a$ est la fonction cherchée compte tenu des inclusions (4.1).

D'après ARNESE [5], JONES [8], KRÉE [9], L possède une solution élémentaire Γ telle que

$$f \longmapsto \{w, \partial w / \partial t, D^\alpha w\} \quad (|\alpha| \leq 2m) \text{ avec } w = \Gamma \star \tilde{f}|_Q$$

soit linéaire continu de $L_p(Q)$ dans $(L_p(Q))^3$.

Nous pouvons à présent résoudre le problème (1.1) pour $1 < p \leq 2$; en effet, soit $f \in L_p(Q)$; posons $w = \Gamma \star \tilde{f}|_Q$; soit u la fonction donnée par le lemme 4.2, on a alors évidemment

$$\left\{ \begin{array}{l} L(w - u) = f \text{ dans } Q, \\ (w - u)(0, x) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ C_j(D)(w - u) = 0 \text{ sur } I \times \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \right.$$

et par conséquent, on a démontré :

THÉORÈME 4.3. - Sous les hypothèses du n° 1, et pour $1 < p \leq 2$, le problème (1.1) admet une solution unique pour $f \in L_p(Q)$.

L'extension du théorème 4.3 au cas $p > 2$ peut être obtenue soit à l'aide de méthodes analogues à celles utilisées ci-dessus dans le cas $1 < p \leq 2$, soit plus simplement par transposition du résultat obtenu pour $1 < p \leq 2$.

5. Extensions diverses.

5.1 On peut évidemment varier les hypothèses (i), (ii), (iii) : Il suffit que l'on puisse trouver un contour simple γ tel que le spectre de $-A$ soit "extérieur" à γ et que le spectre de B soit "intérieur" à γ , la fonction

$$z \longmapsto (A + z)^{-1} (-B + z)^{-1}$$

admettant sur γ une décroissance en $1/|z|^2$ dans $\mathcal{L}(E, E)$. Ceci permet notamment de résoudre une vaste classe de problèmes aux limites pour des opérateurs quasi-elliptiques.

5.2 Il n'y a aucune raison de se borner à étudier des équations de la forme $A + B$ avec des méthodes de ce type. Par exemple, si $z \longmapsto A(z)$ est un polynôme à coefficients opérateurs non bornés dans E , on peut chercher l'inverse de l'opérateur $A(B)$ sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} A(z)^{-1} (-B + z)^{-1} dz .$$

Ceci permet de résoudre une classe de problèmes aux limites pour des opérateurs paraboliques d'ordre supérieur en t , généralisant au cas $p \neq 2$ les résultats d'AGRANOVIC-VIŠIK [3], et également de retrouver, en évitant la construction des noyaux de Poisson, les principaux résultats de AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [2] sur les problèmes aux limites elliptiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AGMON (Shmuel). - On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 15, 1962, p. 119-147.
- [2] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIRENBERG (L.). - Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I., *Comm. pure and appl. Math.*, t. 12, 1959, p. 623-727.
- [3] AGRANOVIC (M. S.) i VIŠIK (M. I.). - Problèmes elliptiques dépendant d'un paramètre et problèmes paraboliques de type général [en russe], *Uspekhi Mat. Nauk*, t. 19, 1964, n° 3, p. 53-161.
- [4] ARONSZAJN (N.) and SMITH (K. T.). - Theory of Bessel potentials, Part II. - Lawrence, University of Kansas, Department of Mathematics, 1964 (University of Kansas, Technical Report 26).
- [5] ARNESE (Giuseppe). - Maggiorazioni in L^p dei potenziali relativi all'equazione del calore, *Ricerche di Matematica*, t. 13, 1964, p. 147-191.
- [6] GRISVARD (Pierre). - Espaces d'interpolation et équations opérationnelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 1536-1538.
- [7] GRISVARD (Pierre). - Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, *Thèse Sc. math. Paris* (à paraître).
- [8] JONES (Frank). - A class of singular integrals, *Amer. J. of Math.*, t. 86, 1964, p. 441-462.
- [9] KRÉE (Paul). - Sur les multiplicateurs dans \mathfrak{L}^p , *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 4400-4403.

- [10] LIONS (Jacques-Louis). - Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. - Berlin, Springer-Verlag, 1961 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 111).
 - [11] LIONS (Jacques-Louis) et PEETRE (Jack). - Sur une classe d'espaces d'interpolation. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, n° 19, p. 5-68).
 - [12] NIKOL'SKIJ (S. M.). - Sur les théorèmes d'immersion, de prolongement et d'approximation pour les fonctions différentiables de plusieurs variables [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 16, 1961, n° 5, p. 63-114.
 - [13] TAIBLESON (Mitchell H.). - On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidian n -spaces, J. Math. and Mech., t. 13, 1964, p. 407-479.
-