ROGER GODEMENT

Analyse spectrale des fonctions modulaires

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 278, p. 15-40

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__15_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 278

Décembre 1964
[Rédaction de mars 1966]

ANALYSE SPECTRALE DES FONCTIONS MODULAIRES

par Roger GODEMENT

1. Notations.

On désigne par k un corps de nombres algébriques, par A l'anneau des adèles de k , par G le groupe algébrique $SL(2)$ - on espère faire mieux les prochaines fois - et par G_A (resp. G_k) le groupe localement compact (resp. discret) des points de G à coordonnées dans A (resp. k). Une "fonction modulaire" sera, en première approximation, une fonction définie sur G_A et invariante à droite par G_k , et on se propose d'écrire plus ou moins explicitement la décomposition en sommes continues de représentations irréductibles de G_A de la représentation unitaire "évidente" de G_A dans l'espace de Hilbert $L^2(G_A/G_k)$.

On désignera par dx et d^*x les mesures de Haar des groupes A (additif) et A^* (multiplicatif). On notera V l'espace vectoriel canonique de dimension 2 , d'où $V_k = k^2$, et $V_A = A^2$; on désignera par $S(V_A)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur V_A : ce sont les sommes finies de fonctions décomposables $\varphi(x) = \prod \varphi_p(x_p)$, où φ_p est indéfiniment dérivable à décroissance rapide si p est une place à l'infini, où φ_p est localement constante à support compact si p est une place finie, avec enfin la condition que, pour presque tout p fini, φ_p soit égale à 1 sur les vecteurs à coordonnées entières et à 0 sur les autres. On sait que la transformation de Fourier sur V_A définit une bijection de $S(V_A)$ sur $S(V_A)$.

On utilisera dans G_A les sous-groupes suivants : le sous-groupe U_A des matrices unipotentes $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $x \in A$, le sous-groupe H_A des matrices diagonales $\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & 1/t\end{pmatrix}$ où $t \in A^*$, ainsi bien entendu que les groupes discrets U_k et H_k correspondants, et enfin le sous-groupe compact maximal $M = \prod M_p$, où M_p est un sous-groupe compact maximal de G_p pour p infini, et est, pour p fini, le sous-groupe $SL(2\,,\,o_p)$ où o_p est l'anneau des entiers de k_p . On a alors $G_A = M.H_A.U_A$, et si dh , du et dm sont des mesures invariantes sur H_A , U_A et M , une mesure invariante sur G_A est donnée par

(1.1) $$dg = |\beta(h)|\ dm\ dh\ du \qquad \text{où} \quad \beta(h) = t^2 \quad \text{si} \quad h = \begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & 1/t\end{pmatrix}$$

et où $|t|$ désigne la valeur absolue d'un élément de A^* . Comme U_A/U_k et M sont compacts, on peut normaliser leurs mesures de Haar par les conditions

$$(1.2) \qquad \int_{U_A/U_k} du = 1 \ , \qquad \int_M dm = 1 \ .$$

D'autre part, on sait que $H_k \subset H_A^0$, sous-groupe de H_A défini par la relation $|\beta(h)| = 1$, et que H_A^0/H_k est compact, H_A/H_A^0 étant isomorphe à $\underset{\sim}{R}_+^*$ (auquel on peut l'identifier en plongeant $\underset{\sim}{R}_+^*$ dans chaque complétion à l'infini de k par $t \longmapsto t.1$). Ceci permet encore de normaliser la mesure de Haar de H_A , en lui imposant d'être choisie de telle sorte que l'on ait

$$(1.3) \qquad \int_{\substack{H_A/H_k \\ |\beta(h)|>1}} |\beta(h)|^s \, dh = 1/s \qquad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1 \ .$$

Les relations (1.1), (1.2) et (1.3) déterminent la mesure de Haar sur G_A (il serait utile de calculer la mesure en question en fonction de la mesure de Tamagawa de G_A , en raison par exemple de la relation (4.28 ter) ci-dessous).

Rappelons enfin (voir par exemple le § 1 de l'exposé [3]) que l'espace homogène G_A/G_k est de volume fini, et plus précisément que, si l'on désigne par $H_A(c)$ la partie $|\beta(h)| < c$ de H_A , alors le quotient $MH_A(c)U_A/H_k\,U_k$ (ou, si l'on préfère, tout ouvert fondamental pour $H_k\,U_k$ dans $MH_A(c)U_A$) est un ouvert fondamental pour G_k dans G_A pour tout $c > 0$ assez grand.

Enfin, dans ce qui suit et à partir du n° 3, la lettre χ désignera un caractère de H_A trivial sur H_k , i. e. un Grössencharakter du corps k . On utilisera intensivement les méthodes inaugurées par TATE dans sa thèse ([15], voir aussi [8]).

2. Série de Fourier d'une fonction modulaire. Le spectre discret.

On sait que le groupe additif A est isomorphe à son groupe dual - de façon précise, on peut trouver un caractère $\tau(x)$ de A tel qu'en posant $\tau_y(x) = \tau(xy)$ on définisse un isomorphisme $y \longmapsto \tau_y$ de A sur son dual ; on peut même choisir τ de telle sorte que τ_y soit trivial sur k si, et seulement si, $y \in k$. Nous supposerons réalisée cette condition, et si $u = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de U_A , nous poserons $(u \, , \, v) = \tau(xy)$.

Soit alors Φ une fonction modulaire ; pour $g \in G_A$ donné, l'expression $\Phi(gu)$ est une fonction sur U_A invariante par U_k ; elle se développe donc en une série de Fourier

$$(2.1) \qquad \Phi(gu) = \sum_{\eta \in U_k} \Phi^{\eta}(g)(u \, , \, \eta) \qquad \text{où } \Phi^{\eta}(g) = \int_{U_A/U_k} \Phi(gu)\overline{(u \, , \, \eta)} \, du \ .$$

En particulier, le coefficient

$$\Phi^{o}(g) = \int_{U_A/U_k} \Phi(gu)\ du \quad , \tag{2.2}$$

"terme constant" de la série de Fourier, est visiblement invariant à droite par H_k et U_A, et on dira que Φ est une Spitzenform (ou cusp-form, ou forme parabolique) si l'on a $\Phi^{o}(g) = 0$; l'ensemble de ces formes paraboliques est évidemment stable par les translations à gauche ; le premier résultat essentiel, cas particulier d'un théorème obtenu récemment par GEL'FAND et PJATECKIJ-ŠAPIRO [2] et applicable à tous les groupes linéaires algébriques, est le suivant :

Soit $L^2_o(G_A/G_k)$ le sous-espace invariant fermé de $L^2(G_A/G_k)$ formé des formes paraboliques $\Phi \in L^2(G_A/G_k)$. Alors la représentation unitaire de G_A dans l'espace de Hilbert $L^2_o(G_A/G_k)$ est somme directe hilbertienne discrète (par opposition aux sommes "continues") de représentations irréductibles qui interviennent avec des multiplicités finies.

Indiquons brièvement, d'après [5] et [9], le principe de la démonstration. La représentation "évidente" de G_A dans $L^2(G_A/G_k)$, dont il a été question au début du n° 1, consiste à attacher à chaque $g \in G_A$ l'opérateur unitaire

$$T_g : \Phi(x) \longmapsto \Phi(g^{-1}x) \tag{2.3}$$

dans $L^2(G_A/G_k)$. On peut alors attacher à chaque fonction F intégrable sur G_A l'opérateur "de convolution"

$$T_F = \int_{G_A} T_g\ F(g)\ dg \quad , \tag{2.4}$$

évidemment donné, ici, par

$$T_F\ \Phi(x) = \int_{G_A} \Phi(y^{-1}x)\ F(y)\ dy = \int_{G_A} F(xy^{-1})\ \Phi(y)\ dy \quad . \tag{2.5}$$

Pour établir le théorème, il suffit, d'après un résultat classique, de montrer que les restrictions à $L^2_o(G_A/G_k)$ des opérateurs T_F sont compactes, et en fait, il suffit même de le prouver pour des fonctions F continues à support compact "assez nombreuses" pour qu'on puisse les utiliser pour approcher la mesure de Dirac sur G_A ; il suffit, par exemple, de le faire lorsque F est la restriction à $G_A = SL(2, A) \subset M_2(A)$ d'une fonction de Schwartz-Bruhat à support compact sur l'anneau $M_2(A)$ des matrices 2×2 à coefficients dans A, puisqu'évidemment $SL(2, A)$ s'identifie topologiquement à une partie fermée de $M_2(A)$. On suppose donc, dans ce qui suit, que F est de ce type.

Si $\Phi \in L^2_o(G_A/G_k)$ et si $\Psi = T_F\,\Phi$, on a

$$(2.6)\qquad \Psi(x) = \int_{G_A} F(xy^{-1})\ \Phi(y)\ dy = \int_{G_A/U_k} \Phi(y)\ dy \sum_{U_k} F(x\eta y^{-1}) \quad ,$$

et comme la fonction $u \longmapsto F(xuy^{-1})$, pour $u \in U_A$, est dans $S(A)$ modulo identification de U_A avec A , on peut lui appliquer la formule sommatoire de Poisson, ce qui conduit à

$$(2.7)\qquad \Psi(x) = \int_{G_A/U_k} \Phi(y)\ dy \sum_{U_k} \int_{U_A} F(xuy^{-1})(u\ ,\ \eta)\ du \quad .$$

Posant $x = m_x\, h_x\, u_x$ et $y = m_y\, h_y\, u_y$ (on rappelle que $G_A = MH_A\, U_A$), on voit aussitôt, en posant

$$(2.8)\qquad K_F(x\ ,\ y) = \sum_{U_k} \int_{U_A} F(xuy^{-1})(u\ ,\ \eta)\ du \quad ,$$

que

$$(2.9)\quad K_F(x\ ,\ y) = |\beta(h_x)|^{-1} \sum_{U_k} (u_x^{-1}\ u_y\ ,\ \eta) \int_{U_A} F(m_x u h_x\, h_y^{-1}\, m_y^{-1})(u\, ,\ h_x^{-1}\, \eta h_x)\ du \quad .$$

Il est clair que si $K_F(x\ ,\ y) \neq 0$, l'ensemble

$$xU_A\, y^{-1} = m_x\, U_A\, h_x\, h_y^{-1}\, m_y^{-1}$$

rencontre le support, compact, de F dans G_A , et comme m_x , m_y restent dans le compact fixe M , on en conclut que $h_x\, h_y^{-1}$ reste dans un compact fixe de H_A , de sorte que, lorsque x et y varient de telle sorte que $K_F(x\ ,\ y) \neq 0$, les fonctions $F_{x,y}(u) = F(m_x\, uh_x\, h_y^{-1}\, m_y^{-1})$ restent dans un compact fixe de l'espace $S(U_A)$ des fonctions de Schwartz-Bruhat sur U_A , ainsi par suite que leurs transformées de Fourier ; celles-ci sont donc à décroissance "uniformément rapide" à l'infini, et par suite il existe sur U_A une fonction f de Schwartz-Bruhat qui domine les transformées de Fourier des fonctions $F_{x,y}$; identifiant f à une fonction sur A , et tenant compte du fait que l'automorphisme $u \longmapsto huh^{-1}$ de U_A multiplie par $\beta(h)$ le paramètre de u , on obtient donc, en distinguant dans (2.9) le terme $\eta = 0$ des autres, une majoration de la forme

$$(2.10)\qquad |K_F(x\ ,\ y) - \int_{U_A} F(xuy^{-1})\ du| \leqslant |\beta(h_x)|^{-1} \sum_{\eta\in k^*} f[\beta(h_x)^{-1}\ \eta] \quad .$$

Mais comme Φ est une <u>forme parabolique</u>, on a trivialement

$$(2.11)\qquad \int_{G_A/U_k} \Phi(y)\ dy \int_{U_A} F(xuy^{-1})\ du = 0$$

puisque cette intégrale passe à travers Φ^o , et (2.7) s'écrit aussi

$$\Psi(x) = \int_{G_A/U_k} \Phi(y)\,dy\,[K_F(x, y) - \int_{U_A} F(xuy^{-1})\,du] \quad . \tag{2.12}$$

Comme on l'a vu plus haut, le premier membre (2.10) ne peut être différent de zéro que si $h_x h_y^{-1}$, ou $h_y h_x^{-1}$, reste dans un compact fixe Ω_H de H_A : tenant compte de (2.10), on obtient donc une majoration

$$|\Psi(x)| \leqslant |\beta(h_x)|^{-1} \times \iiint_{M.\Omega_H h_x.U_A/U_k} |\Phi(mhu)|\,|\beta(h)|\,dm\,dh\,du \times \sum_{\eta\in k^*} f[\beta(h_x)^{-1}\eta] \quad . \tag{2.13}$$

Supposons alors que x reste dans un ouvert fondamental $\mathfrak{S}$ du type décrit au n° 1. Comme $|\beta(h_x)| = O(1)$ dans $\mathfrak{S}$, il est clair que l'ensemble $M\Omega_H h_x U_A/U_k$, sur lequel on intègre Φ dans (2.13), reste contenu dans un ouvert analogue $\mathfrak{S}'$, et par suite que

$$\iiint_{M\Omega_H h_x U_A/U_k} |\Phi(mhu)|\,|\beta(h)|\,dm\,dh\,du \leqslant \int_{\mathfrak{S}'} |\Phi(y)|\,dy \prec \{\int_{G_A/G_k} |\Phi(y)|^2\,dy\}^{\frac{1}{2}} = \|\Phi\|_2 \tag{2.14}$$

(le signe $\prec$ indique une inégalité valable à un facteur constant près). D'autre part, plongeons R^* dans A^* de telle sorte que chaque $t \in R^*$ s'identifie à l'idèle de k dont la p-composante est $t.1$ si p est une place à l'infini, et 1 sinon ; quand x reste dans $\mathfrak{S}$, il est clair que $\beta(h_x)^{-1}$ reste dans le produit d'un compact de A^* par un intervalle $[c , +\infty[$ de R^* , avec $c > 0$; les propriétés de décroissance rapide à l'infini des fonctions de Schwartz-Bruhat montrent alors que l'on a

$$\sum_{\eta\in k^*} f[\beta(h_x)^{-1}\eta] \prec |\beta(h_x)|^N \qquad \text{pour } x \in \mathfrak{S} \tag{2.15}$$

quel que soit l'entier N . Portant (2.14) et (2.15) dans (2.13), on en conclut que l'on a

$$|T_F\,\Phi(x)| \prec |\beta(h_x)|^N\,\|\Phi\|_2 \qquad \text{pour } x \in \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad \Phi \in L_0^2(G_A/G_k) \tag{2.16}$$

quel que soit $N > 0$, et comme la fonction $x \longmapsto |\beta(h_x)|^N$ est dans $L^2(\mathfrak{S})$, pour $N \geqslant 1$, on en déduit aussitôt que T_F est compact dans $L_0^2(G_A/G_k)$, ce qui achève la démonstration du théorème 1. [Modulo le lemme suivant : soient X un espace, μ une mesure sur X , et T un opérateur continu dans un sous-espace fermé $\mathcal{H}$ de $L^2(X , \mu)$; on suppose qu'il existe une fonction positive

$$\rho \in L^2(X , \mu)$$

telle que l'on ait $|T\,\Phi(x)| \leqslant \rho(x)\,\|\Phi\|_2$ pour tout $\Phi \in \mathcal{H}$; alors T est compact. Démonstration : on peut supposer $\mathcal{H} = L^2(X\,,\,\mu)$ en complétant au besoin T par 0 dans le sous-espace orthogonal à $\mathcal{H}$. L'application $\Phi \longmapsto T\,\Phi(x)$ est une forme linéaire continue sur $L^2(X\,,\,\mu)$ pour presque tout x, donc

$$T\,\Phi(x) = \int K(x\,,\,y)\,\Phi(y)\,dy$$

avec, par Cauchy-Schwarz,

$$\int |K(x\,,\,y)|^2\,dy \leqslant \rho(x)^2 \quad ,$$

d'où

$$\iint |K(x\,,\,y)|^2\,dx\,dy < +\infty \quad ,$$

ce qui prouve même que l'opérateur considéré est du type de Hilbert-Schmidt.]

3. Séries d'Eisenstein : prolongement analytique et série de Fourier.

Considérons une fonction $\varphi \in S(V_A)$, et posons

$$(3.1)\quad L_\varphi(g\,;\,\chi\,,\,s) = \int_{H_A} \varphi[gh(e_1)]\,\overline{\chi(h)}\,|\beta(h)|^{s/2}\,dh = \int_{A^*} \varphi[g(e_1)t]\,\overline{\chi(t)}\,|t|^s\,d^*t$$

où e_1 désigne le premier vecteur de base de V_A ; on obtient évidemment une fonction L du corps k, à la Tate-Iwasawa, l'intégrale converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, et on a l'identité

$$(3.2)\qquad L_\varphi(ghu\,;\,\chi\,,\,s) = L_\varphi(g\,;\,\chi\,,\,s)\,\chi(h)\,|\beta(h)|^{-s/2} \quad .$$

On en déduit aussitôt que la série

$$(3.3)\qquad E_\varphi(g\,;\,\chi\,,\,s) = \sum_{\gamma \in G_k/H_kU_k} L_\varphi(g\gamma\,;\,\chi\,,\,2s)$$

converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, et en introduisant la série thêta

$$(3.4)\qquad \theta^*_\varphi(g\,,\,h) = \sum_{G_k/U_k} \varphi[g\gamma h(e_1)] = \sum_{\xi \in V_k,\,\xi \neq 0} \varphi[g(\xi)t] \quad \text{si } h = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \quad ,$$

il vient visiblement

$$(3.5)\qquad E_\varphi(g\,;\,\chi\,,\,s) = \int_{H_A/H_k} \theta^*_\varphi(g\,,\,h)\,\overline{\chi(h)}\,|\beta(h)|^s\,dh \quad .$$

Mais en introduisant la transformée de Fourier

$$(3.6)\qquad \hat{\varphi}(x\,,\,y) = \iint_{A\times A} \varphi(u\,,\,v)\,\tau(xv - yu)\,du\,dv$$

de la fonction φ sur l'espace vectoriel adélique $V_A = A \times A$, la formule sommatoire de Poisson montre aussitôt que l'on a

$$(3.7) \qquad \varphi(0) + \theta^*_\varphi(g\ ,\ h^{-1}) = |\beta(h)|\{\hat{\varphi}(0) + \theta^*_{\hat{\varphi}}(g\ ,\ h)\}\ ,$$

et en introduisant la fonction <u>entière</u>

$$(3.8) \qquad E^+_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s) = \int_{\substack{H_A/H_k \\ |\beta(h)|\geqslant 1}} \theta^*_\varphi(g\ ,\ h)\ \overline{\chi(h)}\,|\beta(h)|^s\ dh$$

il vient immédiatement

$$(3.9) \qquad F_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s) = E^+_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s) + E^+_{\hat{\varphi}}(g\ ;\ \bar{\chi}\ ,\ 1 - s) - \delta(\chi)\Big[\frac{\varphi(0)}{s} + \frac{\hat{\varphi}(0)}{1 - s}\Big]\ ,$$

avec $\delta(\chi) = 1$ si χ est trivial, et $= 0$ sinon. On voit donc que la fonction $E_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s)$ se prolonge à tout le plan, avec tout au plus des pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$, et que l'on a l'équation fonctionnelle

$$(3.10) \qquad E_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s) = E_{\hat{\varphi}}(g\ ;\ \bar{\chi}\ ,\ 1 - s)\ .$$

Il est instructif de calculer les coefficients de Fourier

$$(3.11) \qquad E^\eta_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s) = \int_{U_A/U_k} E_\varphi(gu\ ;\ \chi\ ,\ s)\overline{(u\ ,\ \eta)}\ du$$

de la fonction modulaire $E_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s)$. En introduisant la matrice $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui normalise H , et en tenant compte du théorème de Bruhat pour $SL(2)$, i. e. de la relation $G_k = H_k\, U_k \cup U_k\, wH_k\, U_k$, il vient

$$(3.12) \qquad E_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s) = L_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ 2s) + \sum_{U_k} L_\varphi(g\xi w\ ;\ \chi\ ,\ 2s)\ ,$$

d'où l'on déduit immédiatement les formules

$$(3.13) \qquad E^0_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s) = L_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ 2s) + \int_{U_A} L_\varphi(guw\ ;\ \chi\ ,\ 2s)\ du\ ,$$

$$(3.14) \qquad E^\eta_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s) = \int_{U_A} L_\varphi(guw\ ;\ \chi\ ,\ 2s)\overline{(u\ ,\ \eta)}\ du \qquad \text{si}\ \ \eta \neq e\ .$$

Ces intégrales (qui font intervenir des fonctions de Bessel classiques et p-adiques) convergent pour $Re(s) > 1$, mais le prolongement analytique de la série $E_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s)$ montre tout d'abord que (3.14) <u>est une fonction entière de</u> s , <u>invariante par</u> $\varphi\ ,\ \chi\ ,\ s \longmapsto \hat{\varphi}\ ,\ \bar{\chi}\ ,\ 1 - s$; de plus, en examinant la façon dont les deux termes de (3.13) se transforment par $g \longmapsto fh$, et en tenant compte de (3.10), on trouve immédiatement la relation

$$(3.15) \qquad \int_{U_A} L_\varphi(guw\ ;\ \chi\ ,\ 2s)\ du = L_{\hat{\varphi}}(g\ ;\ \bar{\chi}\ ,\ 2 - 2s)\ ,$$

de sorte qu'il vient

(3.16) $$E^0_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s) = L_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ 2s) + L_{\hat\varphi}(g\ ;\ \bar\chi\ ,\ 2-2s)\quad .$$

Cette fonction est entière si $\chi \neq \mathrm{id}$; si χ est le caractère unité, $L_\varphi(g\,;\chi\,,2s)$ peut posséder des pôles simples en $s = 0$ et $s = \frac{1}{2}$, et $L_{\hat\varphi}(g\ ;\ \bar\chi\ ,\ 2-2s)$ en $s = 1$ et $s = \frac{1}{2}$, les pôles en $s = \frac{1}{2}$ se neutralisant nécessairement.

4. Décomposition suivant les représentations de M .

Soit $\mathfrak{d}$ une représentation unitaire irréductible du groupe compact $M \subset G_A$ dans un espace de Hilbert de dimension finie $\mathcal{H}(\mathfrak{d})$; une fonction F sur G_A (définition analogue pour des fonctions sur V_A) sera dite d'espèce $\mathfrak{d}$ si elle prend ses valeurs dans l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{H}(\mathfrak{d})$ et vérifie l'identité $F(mg) = \mathfrak{d}(m)\ F(g)$. Si F est une fonction scalaire sur G_A , il est clair que

(4.1) $$F_\mathfrak{d}(g) = \int_M \mathfrak{d}(m)^{-1}\ F(mg)\ dm$$

est d'espèce $\mathfrak{d}$, et le théorème de Peter-Weyl dit que l'on a

(4.2) $$F(mg) = \sum_\mathfrak{d} \dim(\mathfrak{d}).\mathrm{Tr}[F_\mathfrak{d}(g)\ \mathfrak{d}(m)]$$

avec convergence au sens de $L^2(M)$ au moins. Toutes les opérations, que nous avons effectuées au précédent numéro, ne faisant intervenir que des translations à droite, sont compatibles avec la décomposition précédente suivant les représentations de M .

Considérons en particulier la série $E_\varphi(g\ ;\ \chi\ ,\ s)$ pour φ d'espèce $\mathfrak{d}$. On a trivialement

(4.3) $$L_\varphi(mhu\ ;\ \chi\ ,\ 2s) = \mathfrak{d}(m)\ L_\varphi(\chi\ ,\ 2s)\ \chi(h)|\beta(h)|^{-s}\quad ,$$

où l'on pose

(4.4) $$L_\varphi(\chi\ ,\ 2s) = L_\varphi(e\ ;\ \chi\ ,\ 2s) = \int_{A^*} \varphi(e_1\ t)\ \overline{\chi(t)}\,|t|^{2s}\ d^*t\quad ;$$

on a évidemment

(4.5) $$\mathfrak{d}(hu)\ L_\varphi(\chi\ ,\ 2s) = \chi(h)\ L_\varphi(\chi\ ,\ 2s)\qquad \text{si}\quad hu \in M \cap H_A\ U_A\quad ;$$

en désignant par $\mathcal{H}(\mathfrak{d}\ ,\ \chi)$ le sous-espace des vecteurs $a \in \mathcal{H}(\mathfrak{d})$ tels que

(4.6) $$\mathfrak{d}(hu)a = \chi(h)a\qquad \text{pour}\quad hu \in M \cap H_A\ U_A\quad ,$$

et par $P(\mathfrak{d}\ ,\ \chi)$ l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{H}(\mathfrak{d}\ ,\chi)$ de $\mathcal{H}(\mathfrak{d})$, lequel est du reste de dimension 1 , il vient

(4.7) $$L_\varphi(\chi , 2s) = P(\mathfrak{d} , \chi)\, L_\varphi(\chi , 2s) ,$$

et (4.3) donne alors

(4.8) $$L_\varphi(mhu ; \chi , 2s) = \mathfrak{d}(m)\, P(\mathfrak{d} , \chi)\, \chi(h)|\beta(h)|^{-s}\, L_\varphi(\chi , 2s) ;$$

posant, ce qui est légitime car il n'y a pas d'ambigüité,

(4.9) $$L(g ; \mathfrak{d} , \chi , 2s) = \mathfrak{d}(m)\, P(\mathfrak{d} , \chi)\, \chi(h)|\beta(h)|^{-s} \quad \text{si} \quad g = mhu ,$$

on trouve donc

(4.10) $$L_\varphi(g ; \chi , 2s) = L(g ; \mathfrak{d} , \chi , 2s)\, L_\varphi(\chi , 2s) ;$$

introduisant, pour $Re(s) > 1$, la série

(4.11) $$E(g ; \mathfrak{d} , \chi , s) = \sum_{G_k/H_kU_k} L(g\gamma ; \mathfrak{d} , \chi , 2s)$$
$$= E(g ; \mathfrak{d} , \chi , s)\, P(\mathfrak{d} , \chi) ,$$

on trouve en définitive

(4.12) $$E_\varphi(g ; \chi , s) = E(g ; \mathfrak{d} , \chi , s)\, L_\varphi(\chi ; 2s)$$

pour toute fonction $\varphi \in S(V_A)$ d'espèce $\mathfrak{d}$.

Si k est le corps des nombres rationnels, les séries précédentes se réduisent, dans le demi-plan de Poincaré, aux séries étudiées par HECKE (voir par exemple [6]), MAAS [11], [12], ROELCKE [13] et SELBERG [14], celui-ci se plaçant naturellement dans le cadre beaucoup plus général, et en tout cas nettement plus difficile, des groupes fuchsiens de première espèce. Ce sont les séries

$$\sum \frac{y^{s-k/2}}{(cz + d)^k\, |cz + d|^{2s-k}} ,$$

où l'on somme (par rapport à c , d) sur une classe de congruence modulo N (l'entier N dépend des "conducteurs" des composantes p-adiques de la représentation $\mathfrak{d}$, et l'entier k de sa composante à l'infini). Les séries analogues pour un corps de nombres k quelconques ne semblent pas avoir été étudiées dans la littérature (ce qui se comprend facilement en raison de la complexité des calculs si l'on s'en tient aux méthodes classiques de Hecke), à l'exception de celles qui s'introduisent dans la théorie des fonctions modulaires <u>holomorphes</u> des groupes de Hilbert-Blumenthal, et pour lesquelles la question du prolongement analytique par rapport au paramètre s ne se pose naturellement pas.

La formule (4.12) montre que les séries $E(g ; \mathfrak{d} , \chi , s)$ se prolongent analytiquement et que l'on a

$$(4.13)\qquad E(g\ ;\ \mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ s)\ L_{\varphi}(\chi\ ,\ 2s) = E(g\ ;\ \mathfrak{b}\ ,\ \bar{\chi}\ ,\ 1-s)\ L_{\hat{\varphi}}(\bar{\chi}\ ,\ 2-2s)$$

pour tout $\varphi \in S(V_A)$ d'espèce $\mathfrak{b}$, le produit $E(g\ ;\ \mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ s)\ L_{\varphi}(\chi\ ,\ 2s)$ n'ayant au surplus que des pôles simples (tout au plus) pour $s = 0$ et $s = 1$. On déduit de là le prolongement analytique de la série $E(g\ ;\ \mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ s)$, en choisissant convenablement φ . Le plus simple est de poser

$$\varphi(x) = \prod \varphi_p(x_p) \quad ,$$

et de choisir comme suit les facteurs locaux φ_p . Pour un idéal premier p de k , où $\mathfrak{b}$ est non ramifiée (i. e. induit l'identité sur la composante p-adique M_p de M), et pour lequel, par conséquent, le caractère χ n'est pas non plus ramifié (donc induit l'identité sur le sous-groupe o_p^* de k_p^* formé des unités de l'anneau o_p des entiers de k_p), on prendra

$$(4.14)\qquad \varphi_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si le vecteur } x \in V_p \text{ est entier,} \\ 0 & \text{si } x \text{ n'est pas entier ;} \end{cases}$$

si par contre la représentation $\mathfrak{b}$ n'est pas triviale sur M_p (p fini), on prendra

$$(4.15)\qquad \varphi_p(x) = \begin{cases} \mathfrak{b}(m)\ P(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ) & \text{si } x = m(e_1) \text{ pour un } m \in M_p \ , \\ 0 \quad \text{si } x \notin M_p(e_1) & ; \end{cases}$$

la contribution des idéaux premiers de k au calcul de $L_{\varphi}(\chi\ ,\ 2s)$ est alors égale, à un facteur constant près, au produit de $P(\mathfrak{b}\ ,\ \chi)$ par

$$(4.16)\qquad \prod_{\mathfrak{b}_p = \mathrm{id}} [1 - \overline{\chi(p)}/N(p)^{2s}]^{-1} \quad ,$$

où $\mathfrak{b}_p$ désigne la restriction de $\mathfrak{b}$ à M_p ; si l'on introduit la fonction

$$(4.17)\qquad L(\bar{\chi}\ ,\ s) = \prod [1 - \overline{\chi(p)}/N(p)^{s}]^{-1}$$

de Hecke associée à $\bar{\chi}$ (le produit précédent est étendu à tous les p premiers où χ n'est pas ramifié), et si l'on désigne par S l'ensemble des p premiers où $\mathfrak{b}_p$ est non triviale, mais où χ est non ramifié (circonstance qui peut se produire : le groupe $SL(2)$ d'un anneau fini admet des représentations irréductibles non triviales qui contiennent la représentation unité du sous-groupe des matrices triangulaires), on voit que la fonction (4.16) est égale, à un facteur constant près, à

(4.18)
$$L(\bar{\chi}\ ,\ 2s)\ \prod_{p\in S}\ [1-\overline{\chi(p)}/N(p)^{2s}]\quad .$$

Si maintenant p est une place à l'infini, et si $k_p = \underset{\sim}{R}$, on peut supposer que $M_p = SO(2)$ et que $\mathfrak{d}$ se réduit sur M_p à la représentation

(4.19)
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \longmapsto \exp im_p\,\theta\quad ,$$

où m_p est un entier ; on a alors nécessairement une relation de la forme

(4.20)
$$\chi_p(t) = \operatorname{sgn}^{m_p}(t)\,|t|^{i\nu_p}\quad ,$$

où ν_p est réel, et en choisissant

(4.21)
$$\varphi_p(x) = (x_1 \pm ix_2)^{|m_p|}\ \exp[-\pi(x_1^2 + x_2^2)]$$

avec le signe $+$ si $m_p \geqslant 0$, et le signe $-$ si $m_p \leqslant 0$, et où x_1 , x_2 désignent les coordonnées du vecteur $x \in V_p = R^2$, on trouve dans le calcul de $L_\varphi(\chi\ ,\ 2s)$ une contribution proportionnelle à

(4.22)
$$\pi^{-s}\ \Gamma[s + \tfrac{1}{2}(|\mu_p| - i\nu_p)]\quad .$$

Enfin, pour une place p où $k_p = C$, on peut supposer que $M_p = SU(2)$, et que la contribution de M_p à la représentation irréductible $\mathfrak{d}$ de M est la représentation évidente de $SU(2)$ dans l'espace des polynômes homogènes de degré ρ_p sur $V_p = C^2$; le caractère χ_p devant être un poids de $\mathfrak{d}_p$ est nécessairement de la forme

(4.23)
$$\chi_p(t) = t^{\mu_p}|t|^{-\mu_p+i\nu_p}\quad ,$$

où ν_p est réel, et où μ_p est un entier tel que

(4.24)
$$-\rho_p \leqslant \mu_p \leqslant \rho_p\ ,\qquad \mu_p \equiv \rho_p\ \ (\mathrm{mod}\ 2)\quad ;$$

les coefficients de $\mathfrak{d}_p(m)$ sont alors des polynômes homogèhes de degré ρ_p en les coefficients de la matrice m , de sorte que l'on peut choisir

(4.25) $\varphi_p(x) = \mathfrak{d}(m)\ P(\mathfrak{d}\ ,\ \chi)t^{\rho_p}\ \exp(-\pi t^2)$ si $x = m(e_1)t$ avec $t \geqslant 0$

- cette fonction est évidemment de classe C^∞ et à décroissance rapide. La contribution de la place p dans le calcul de $L_\varphi(\chi\ ,\ 2s)$ est alors, comme on le voit aussitôt, proportionnelle à

(4.26) $$P(\mathfrak{d}\ ,\ \chi)\pi^{-2s}\ \Gamma[2s + \tfrac{1}{2}(\rho_p + \mu_p - i\nu_p)]\ .$$

On voit donc en définitive qu'il est possible de choisir la fonction φ de telle sorte que l'on ait

(4.27) $$L_\varphi(\chi\ ,\ 2s) = \varepsilon(\mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ s)\ L(\overline{\chi}\ ,\ 2s)\ P(\mathfrak{d}\ ,\ \chi)\ ,$$

où $L(\overline{\chi}\ ,\ 2s)$ est la fonction (4.17) de Hecke, et où

(4.28) $$\varepsilon(\mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ s) = \pi^{-ns} \prod_{k_p = \mathbb{R}} \Gamma[s+\tfrac{1}{2}(|\mu_p|-i\nu_p)] \prod_{k_p = \mathbb{C}} \Gamma[2s+\tfrac{1}{2}(\rho_p+\mu_p-i\nu_p)] \prod_{p\in S} [1-\overline{\chi(p)}/N(p)^{2s}]$$

à un facteur constant près ; on pose bien entendu $n = [k : \mathbb{Q}]$.

On déduit immédiatement de là les conséquences suivantes. Tout d'abord la fonction $E(g\ ;\ \mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ s)$ est méromorphe dans tout le plan, et son produit par la fonction (4.27) n'a de pôles qu'en $s = 0$ et $s = 1$; ces pôles sont simples, et disparaissent si $\mathfrak{d}$ n'est pas la représentation unité. Comme le facteur (4.28) ne possède aucun zéro dans le demi-plan $Re(s) > 0$, on en déduit que, dans ce demi-plan, les pôles de $E(g\ ;\ \mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ s)$ sont tout au plus les zéros de la fonction $L(\chi\ ,\ 2s)$ et le point $s = 1$. Comme $L(\chi\ ,\ 2s)$ ne s'annule pas pour $Re(s) \geqslant \frac{1}{2}$, on en déduit que <u>la fonction</u> $E(g\ ;\ \mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ s)$ <u>est holomorphe dans tout le demi-plan</u> $Re(s) \geqslant \frac{1}{2}$, <u>à l'exception de la fonction</u> $E(g\ ;\ id\ ,\ id\ ,\ s)$ <u>qui admet dans ce demi-plan un pôle simple en</u> $s = 1$ avec un résidu qui, d'après (4.12), est nécessairement égal à $c = \hat{\varphi}(0)/L_\varphi(id\ ,\ 2)$ pour toute fonction $\varphi \in S(V_A)$ invariante par M . Comme

$$L_\varphi(id\ ,\ 2) = \int_{G_A/U_A} \varphi[g(e_1)]\ dg\ ,$$

on a donc la formule

(4.28 bis) $$\hat{\varphi}(0) = \int_{V_A} \varphi(x)\ dx = c\int_{G_A/U_A} \varphi[g(e_1)]\ dg = c\int_{G_A/G_k} dg \sum_{\substack{\xi\in V_k \\ \xi\neq 0}} \varphi[g(\xi)]\ ,$$

et si on la compare avec la formule de WEIL ([16], p. 55) on voit que la mesure de Tamagawa de G_A est $c.dg$; comme G_A/G_k est de volume 1 pour la mesure de Tamagawa, on obtient donc, avec le choix de dg adopté ici, la relation

(4.28 ter) $$\int_{G_A/G_k} dg = 1/c \qquad \text{où}\quad c = \operatorname*{Res}_{s=1} E(g\ ;\ id\ ,\ id\ ,\ s)\ .$$

Enfin, (4.13) conduit à une équation fonctionnelle pour les séries d'Eisenstein, à savoir

$$(4.29)\qquad E(g\,;\,\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s) = E(g\,;\,\mathfrak{d}\,,\,\bar{\chi}\,,\,1-s)\,\Psi(\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s)\quad,$$

où

$$(4.30)\qquad \Psi(\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s) = P(\mathfrak{d}\,,\,\bar{\chi})\,\frac{L_{\hat{\varphi}}(\bar{\chi}\,,\,2-2s)}{\varepsilon(\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s)\,L(\chi\,,\,2s)}\,P(\mathfrak{d}\,,\,\chi)\quad,$$

la fonction φ étant choisie comme plus haut. Cette fonction est méromorphe dans tout le plan, et même holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}$ [y compris si $\mathfrak{d}$ est triviale, car alors les pôles simples en $s = 1$ dans la fraction $L_{\hat{\varphi}}(\bar{\chi}\,,\,2-2s)/L_{\varphi}(\chi\,,\,2s)$ se neutralisent] ; on a évidemment

$$(4.31)\qquad L_{\hat{\psi}}(\bar{\chi}\,,\,2-2s) = \Psi(\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s)\,L_{\psi}(\chi\,,\,2s)$$

pour toute fonction $\psi \in S(V_A)$ d'espèce $\mathfrak{d}$; on observera qu'ici la transformation de Fourier $\psi \longmapsto \hat{\psi}$ porte sur les <u>deux</u> variables dont dépend ψ .

D'autre part, la formule (4.11) conduit immédiatement, pour les coefficients de Fourier de $E(g\,;\,\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s)$, à des expressions analogues à (3.13) et (3.14), en particulier à

$$(4.32)\qquad E^{o}(g\,;\,\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s) = L(g\,;\,\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,2s) + \int_{U_A} L(guw\,;\,\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,2s)\,du\quad;$$

comparant avec (4.29), on déduit immédiatement de là que

$$(4.33)\qquad \int_{U_A} L(guw\,;\,\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,2s)\,du = L(g\,;\,\mathfrak{d}\,,\,\bar{\chi}\,,\,2-2s)\,\Psi(\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s)\quad,$$

en sorte que

$$(4.34)\qquad E^{o}(g;\mathfrak{d},\chi,s) = L(g;\mathfrak{d},\chi,2s) + L(g;\mathfrak{d},\bar{\chi},2-2s)\Psi(\mathfrak{d},\chi,s)\quad.$$

Comme $L(g\,;\,\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s)$ se réduit à $P(\mathfrak{d}\,,\,\chi)$ pour $g = e$, la compatibilité avec (4.29) exige que

$$(4.35)\qquad \Psi(\mathfrak{d},\bar{\chi},1-s)\Psi(\mathfrak{d},\chi,s) = P(\mathfrak{d},\chi)\ ;\qquad \Psi(\mathfrak{d},\chi,s)\Psi(\mathfrak{d},\bar{\chi},1-s) = P(\mathfrak{d},\bar{\chi})\quad,$$

en sorte que $\Psi(\mathfrak{d}\,,\,\chi\,,\,s)$ peut s'identifier à un isomorphisme du sous-espace $\mathcal{H}(\mathfrak{d}\,,\,\chi)$ sur le sous-espace $\mathcal{H}(\mathfrak{d}\,,\,\bar{\chi})$. Nous verrons plus loin - relation (6.16) - que cet isomorphisme est <u>isométrique</u> pour $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, i. e. sur la droite critique.

5. <u>Transformée de Laplace d'une fonction modulaire</u>.

Soit Φ une fonction modulaire. Puisque la fonction $\Phi^{o}(g)$ est invariante à droite par $H_k\, U_A$, il s'impose d'étudier sur H_A la fonction $h \longmapsto \Phi^0(gh)$, et puisqu'elle est invariante à droite par le sous-groupe discret H_k , il s'impose de lui faire subir une transformation de Fourier ou de Laplace sur le groupe H_A/H_k . On est ainsi conduit à introduire la transformée de Laplace de Φ , à savoir la fonction

(5.1) $$\hat{\Phi}(g\ ;\ \chi\ ,\ s) = \int_{H_A/H_k} \Phi^0(gh)\ \overline{\chi(h)}\,|\beta(h)|^{1-s}\ dh \quad ,$$

laquelle - à supposer qu'elle ait un sens - vérifie évidemment l'identité

(5.2) $$\hat{\Phi}(ghu\ ;\ \chi\ ,\ s) = \hat{\Phi}(g\ ;\ \chi\ ,\ s)\ \chi(h)\,|\beta(h)|^{s-1} \quad ,$$

et dépend d'une variable complexe s et d'un Grössencharakter χ . L'identité (5.2) signifie que, pour χ et s donnés, et si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, la fonction $\hat{\Phi}(g\ ;\ \chi\ ,\ s)$ appartient à l'espace vectoriel de la représentation de G_A (*) induite par la représentation

(5.3) $$h \longmapsto \chi(h)\,|\beta(h)|^{s-\frac{1}{2}}$$

de dimension 1 du sous-groupe $H_A\ U_A$ de G_A , laquelle est évidemment unitaire puisque l'on a $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Malheureusement, l'intégrale (5.1) présente une nette tendance à diverger pour $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, et on ne pourra atteindre cette "droite critique" que par prolongement analytique, comme on va le voir. Nous allons tout d'abord montrer que, si la fonction Φ est bornée et à support compact modulo G_k , l'intégrale (5.1) converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(*) Soient G un groupe localement compact, P un sous-groupe fermé de G , et $d_r\,p$ une mesure invariante à droite sur P ; posons $d_l p = d_r(p^{-1})$ et $d_r p = \Delta(p) d_l p$; soit $\mathcal{K}(G\ ,\ P)$ l'espace des fonctions $\varphi(g)$ continues et à support compact modulo P qui vérifient $\varphi(gp) = \varphi(g)\ \Delta(p)^{-1}$; il est facile de voir qu'il existe sur $\mathcal{K}(G\ ,\ P)$ une forme linéaire positive $\varphi \longmapsto \int \varphi(g)$ et une seule qui est invariante par les translations à gauche de G . Cela dit, soit $p \longmapsto T(p)$ une représentation unitaire de P dans un espace de Hilbert F ; soit $\mathcal{K}^T(G\ ,\ P)$ l'espace des fonctions continues $\varphi : G \longrightarrow F$ qui vérifient

$$\varphi(gp) = T(p)^{-1}\ \varphi(g)\ \Delta(p)^{-\frac{1}{2}}$$

et sont à support compact modulo P ; pour $\varphi\ ,\ \psi \in \mathcal{K}^T(G\ ,\ P)$ il est clair que la fonction $\langle\varphi(g)\ ,\ \psi(g)\rangle$ est dans $\mathcal{K}(G\ ,\ P)$, ce qui permet de définir sur $\mathcal{K}^T(G\ ,P)$ un produit scalaire

$$\langle\varphi\ ,\ \psi\rangle = \int \langle\varphi(g)\ ,\ \psi(g)\rangle \quad ,$$

et d'obtenir, par complétion, un espace de Hilbert ; en faisant agir G sur les fonctions φ considérées à l'aide des translations à gauche, on obtient alors, par définition, la représentation unitaire de G induite par T .

Si en effet Φ est nulle en dehors de $S.G_k$, où S est compact, la fonction $\Phi^o(gh)$, pour g donné et h variable, est nulle en dehors de $H_A \cap g^{-1} SG_k U_A$, partie de H_A sur laquelle $|\beta(h)|$ reste au large de 0 comme on le voit facilement ; il reste alors à vérifier que l'intégrale $\int_{\substack{H_A/H_k \\ |\beta(h)|\geq\varepsilon}} |\beta(h)|^{1-s}\, dh$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, ce qui est clair.

Pour obtenir le prolongement analytique de la transformée de Laplace $\hat{\Phi}(g\,;\chi\,,s)$, nous allons calculer le "produit scalaire" de la fonction Φ et d'une série d'Eisenstein, i. e.

$$\int_{G_A/G_k} E(g\,;\,\mathfrak{d}\,,\chi\,,\bar{s})^*\,\Phi(g)\,dg$$

$$= \int_{G_A/G_k} dg \sum_{G_k/H_kU_k} L(g\gamma\,;\mathfrak{d}\,,\chi\,,\bar{s})^*\,\Phi(g\gamma) = \int_{G_A/H_kU_k} L(g\,;\mathfrak{d}\,,\chi\,,\bar{s})^*\,\Phi(g)\,dg$$

$$= \int_M dm \int_{H_A/H_k} |\beta(h)|\,dh \int_{U_A/U_k} [\mathfrak{d}(m)\,P(\mathfrak{d}\,,\chi)\,\chi(h)\,|\beta(h)|^{-\bar{s}}]^* \times \Phi(mhu)\,du \quad ,$$

d'où immédiatement

$$\int_{G_A/G_k} E(g\,;\,\mathfrak{d}\,,\chi\,,\bar{s})^*\,\Phi(g)\,dg = \hat{\Phi}(\mathfrak{d}\,,\chi\,,s) \quad , \tag{5.4}$$

où l'on a introduit la $\mathfrak{d}$-composante

$$\hat{\Phi}(\mathfrak{d}\,,\chi\,,s) = \int_M \mathfrak{d}(m)^{-1}\,\hat{\Phi}(m\,;\chi\,,s)\,dm = P(\mathfrak{d}\,,\chi)\,\hat{\Phi}(\mathfrak{d}\,,\chi\,,s) \tag{5.5}$$

de la transformée de Laplace de Φ.

Ces calculs sont justifiés au minimum si Φ est bornée et à support compact mod G_k, et si de plus $\mathrm{Re}(s) > 1$. Mais en fait, il est clair que si Φ est bornée et à support compact mod G_k, le premier membre de (5.4) a toujours un sens. Il s'ensuit aussitôt que la fonction $\hat{\Phi}(\mathfrak{d}\,,\chi\,,s)$ se prolonge analytiquement à tout le plan, et est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$, sauf si $\mathfrak{d}$ et χ sont triviaux, auquel cas la fonction $\hat{\Phi}(\mathfrak{d}\,,\chi\,,s)$ admet un pôle simple en $s = 1$, avec un résidu égal à

$$c\int_{G_A/G_k} \Phi(g)\,dg = c(\Phi\,,1) = \int_{G_A/G_k} \Phi(g)\,dg \Big/ \int_{G_A/G_k} dg \quad , \tag{5.6}$$

où c est le résidu (indépendant de g) de $E(g\,;\,\mathrm{id}\,,\mathrm{id}\,,s)$ en $s = 1$, et $(\Phi\,,1)$ le produit scalaire dans $L^2(G_A/G_k)$ de la fonction Φ et de la constante 1. En outre, on a l'équation fonctionnelle

$$\hat{\Phi}(\mathfrak{d}\,,\chi\,,s) = \Psi(\mathfrak{d}\,,\chi\,,\bar{s})^*\,\hat{\Phi}(\mathfrak{d}\,,\bar{\chi}\,,1-s) \quad . \tag{5.7}$$

Quant à $\hat{\Phi}(g ; \chi , s)$, on la calcule immédiatement en fonction des intégrales (5.5) ; le résultat obtenu est que

$$(5.8) \qquad \hat{\Phi}(g ; \chi , s) = \sum_{\mathfrak{d}} \mathrm{Sp}[\hat{\Phi}(\mathfrak{d} , \chi , s) \, L(g ; \mathfrak{d} , \chi , 2 - 2s)] ,$$

où le symbole Sp désigne la trace multipliée par la dimension de la représentation $\mathfrak{d}$ correspondante. Nous déduirons plus loin de là, et de (5.7), une équation fonctionnelle pour la transformée de Laplace $\hat{\Phi}$, à savoir la relation

$$(5.9) \qquad \int_{U_A} \hat{\Phi}(guw ; \chi , s) \, du = \hat{\Phi}(g ; \bar{\chi} , 1 - s) .$$

6. Transformées de Laplace des fonctions θ_F .

Considérons la représentation unité du sous-groupe $H_k U_A$ de G_A ; si l'on désire construire la représentation de G_A induite par celle-ci, on est amené à considérer les fonctions $F(g)$ qui sont invariantes à droite par $H_k U_A$ et telles que l'intégrale

$$(6.1) \qquad \|F\|^2 = \int_{G_A/H_k U_A} |F(g)|^2 \, dg = \int_{MH_A/H_k} |F(mh)|^2 \, |\beta(h)| \, dm \, dh$$

converge (il y a ici une mesure invariante sur le quotient puisque $H_k U_A$ est unimodulaire). Si l'on veut essayer de plonger cette représentation dans la représentation de G_A dans l'espace $L^2(G_A/G_k)$, on est amené à transformer chaque fonction F en une fonction invariante à droite par G_k . Supposant tout d'abord, dans ce numéro, F continue et à support compact modulo $H_k U_A$ pour éviter des questions de convergence, on est ainsi amené à former la fonction modulaire

$$(6.2) \qquad \theta_F(g) = \sum_{G_k/H_k U_k} F(g\gamma) = F(g) + \sum_{U_k} F(g\eta w) \qquad \text{où} \quad w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

("théorème de Bruhat"). Evidemment θ_F est continue à support compact mod G_k , et on a

$$(6.3) \qquad \theta_F^0(g) = \int_{U_A/U_k} \theta_F(gu) \, du = F(g) + F'(g) \qquad \text{où} \quad F'(g) = \int_{U_A} F(guw) \, du ,$$

de sorte qu'en posant

$$(6.4) \qquad L_F(g ; \chi , s) = \int_{H_A/H_k} F(gh) \, \overline{\chi(h)} \, |\beta(h)|^{s/2} \, dh ,$$

on obtient immédiatement

$$(6.5) \qquad \hat{\theta}_F(g ; \chi , s) = L_F(g ; \chi , 2 - 2s) + \int_{U_A} L_F(guw ; \bar{\chi} , 2s) \, du .$$

Comme $h \longmapsto F(gh)$ est continue à support compact mod H_k, l'intégrale (6.4) converge quel que soit s et représente une fonction entière de s ; par contre, l'intégrale figurant au second membre de (6.5) ne converge que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Posant

(6.6) $$\hat{\theta}_F(\mathfrak{d}, \chi, s) = \int \mathfrak{d}(m)^{-1} \hat{\theta}_F(m ; \chi, s)\, dm ,$$

on a, d'après le numéro précédent, l'équation fonctionnelle

(6.7) $$\hat{\theta}_F(\mathfrak{d}, \chi, s) = \Psi(\mathfrak{d}, \chi, \bar{s})^* \hat{\theta}_F(\mathfrak{d}, \bar{\chi}, 1 - s) .$$

Mais si l'on pose

(6.8) $$L_F(g ; \mathfrak{d}, \chi, s) = \int \mathfrak{d}(m)^{-1} L_F(mg ; \chi, s)\, dm ,$$

il est clair que

(6.9) $$\hat{\theta}_F(\mathfrak{d}, \chi, s) = L_F(\mathfrak{d}, \chi, 2 - 2s) + \int L_F(uw ; \mathfrak{d}, \bar{\chi}, 2s)\, du ,$$

où l'on a posé

(6.10) $$L_F(\mathfrak{d}, \chi, s) = L_F(e ; \mathfrak{d}, \chi, s) = \iint_{MH_A/H_k} F(mh)\, \mathfrak{d}(m)^{-1}\, \overline{\chi(h)}\, |\beta(h)|^{s/2}\, dm\, dh ;$$

d'autre part, la façon dont $L_F(g ; \mathfrak{d}, \bar{\chi}, s)$ se transforme par $g \longmapsto mghu$ montre aussitôt que

(6.11) $$L_F(g ; \mathfrak{d}, \bar{\chi}, s) = L(g ; \mathfrak{d}, \bar{\chi}, s)\, L_F(\mathfrak{d}, \bar{\chi}, s) ,$$

de sorte qu'en utilisant (4.33), il vient

(6.12) $$\int_{U_A} L_F(uw ; \mathfrak{d}, \bar{\chi}, 2s)\, du = \Psi(\mathfrak{d}, \bar{\chi}, s)\, L_F(\mathfrak{d}, \bar{\chi}, 2s) .$$

Portant dans (6.9), il vient donc

(6.13) $$\hat{\theta}_F(\mathfrak{d}, \chi, s) = L_F(\mathfrak{d}, \chi, 2 - 2s) + \Psi(\mathfrak{d}, \bar{\chi}, s)\, L_F(\mathfrak{d}, \bar{\chi}, 2s) .$$

De là et de (6.7), on déduit la relation

(6.14) $$[P(\mathfrak{d}, \chi) - \Psi(\mathfrak{d}, \chi, \bar{s})^* \Psi(\mathfrak{d}, \chi, 1 - s)]\, L_F(\mathfrak{d}, \chi, 2 - 2s) = [\Psi(\mathfrak{d}, \chi, \bar{s})^* - \Psi(\mathfrak{d}, \bar{\chi}, s)]\, L_F(\mathfrak{d}, \bar{\chi}, 2s) .$$

Mais si l'on remplace la fonction $F(g)$ par

$$\int_{H_A/H_k} F(gh^{-1})\, \omega(h)\, dh ,$$

où ω est continue à support compact sur H_A/H_k, on constate immédiatement que

$L_F(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ 2s)$ est multiplié par le facteur

$$\hat{\omega}(\chi\ ,\ s) = \int_{H_A/H_k} \omega(h)\ \overline{\chi(h)}\,|\beta(h)|^s\ dh \quad ,$$

de sorte que (6.14) subsiste si l'on multiplie le premier membre par $\hat{\omega}(\chi\ ,\ 1-s)$ et le second par $\hat{\omega}(\bar{\chi}\ ,\ s)$; comme il ne saurait exister de relation linéaire non triviale entre $\hat{\omega}(\chi\ ,\ 1-s)$ et $\hat{\omega}(\bar{\chi}\ ,\ s)$, on en déduit que chaque membre de (6.14) est nul, et comme F est arbitraire, il s'ensuit aussitôt qu'on a les relations

$$(6.15) \qquad \Psi(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ \bar{s})^* = \Psi(\mathfrak{b}\ ,\ \bar{\chi}\ ,\ s) \quad ,$$

$$(6.16) \qquad \Psi(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ \bar{s})^*\ \Psi(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ 1-s) = P(\mathfrak{b}\ ,\ \chi) \quad ;$$

du reste,(6.16) se réduit à (4.34) modulo (6.15).

7. Calcul du produit scalaire de deux fonctions θ .

Soient F et G deux fonctions invariantes à droite par $H_k\ U_A$, et continues à support compact mod $H_k\ U_A$. Nous allons calculer le produit scalaire des fonctions modulaires θ_F et θ_G dans l'espace $L^2(G_A/G_k)$, i. e. l'expression

$$(7.1) \quad (\theta_F , \theta_G) = \int_{G_A/G_k} \theta_F(g)\ \overline{\theta_G(g)}\ dg = \int_{G_A/G_k} d\dot{g} \sum_{G_k/H_kU_k} F(g\gamma)\ \overline{\theta_G(g\gamma)}$$

$$= \int_{G_A/H_kU_k} F(g)\ \overline{\theta_G(g)}\ d\dot{g} = \int_{G_A/H_kU_A} F(g)\ \overline{\theta^o_G(g)}\ d\dot{g} = \iint_{MH_A/H_k} F(mh)\ \overline{\theta^o_G(mh)}\ |\beta(h)|\ dm\,dh$$

$$= \int_M dm \int_{H_A/H_k} \{F(mh)\,|\beta(h)|^{\sigma}\}\{\theta^o_G(mh)\,|\beta(h)|^{1-\sigma}\}^*\ dh \quad ,$$

le signe $*$ indiquant l'imaginaire conjugué quand c'est un scalaire, et l'adjoint quand c'est un opérateur ; on suppose ici σ réel. Comme les fonctions

$$F(mh)\,|\beta(h)|^{\sigma} \qquad \text{et} \qquad \theta^o_G(mh)\,|\beta(h)|^{1-\sigma}$$

sont, sur H_A/H_k , bornées et intégrables pour $\sigma > 1$ (pour la première c'est évident, pour la seconde cela résulte de l'existence de $\hat{\theta}_G(g\ ;\ \chi\ ,\ s)$ pour $Re(s) > 1$), on peut appliquer la formule de Plancherel sur H_A/H_k , ce qui conduit visiblement à la relation

$$(7.2) \quad 2\pi i(\theta_F\ ,\ \theta_G) = \sum_{\chi} \int_M dm \int_{Re(s)=\sigma} L_F(m\ ;\ \chi\ ,\ 2s)\ \hat{\theta}_G(m\ ;\ \chi\ ,\ \bar{s})^*\ ds$$

$$= \sum_{\mathfrak{b},\chi} \int_{Re(s)=\sigma} Sp[L_F(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ 2s)\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ \bar{s})^*]\ ds \quad ,$$

d'après PETER-WEYL. Ceci suppose a priori $\sigma > 1$. Mais les fonctions qu'on intègre sont holomorphes dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}$, à l'exception de la fonction $\hat{\theta}_G(\mathrm{id}\ ,\ \mathrm{id}\ ,\ \bar{s})^*$ qui possède, en $s = 1$, un pôle simple de résidu égal à $c\overline{(\theta_G\ ,\ 1)}$, où

$$(7.3) \qquad c = \operatorname*{Res}_{s=1} E(g\ ;\ \mathrm{id}\ ,\ \mathrm{id}\ ,\ s) = 1/\text{volume de } G_A/G_k\ , \quad \text{d'après (4.28 ter)} \quad ;$$

de plus, ces fonctions décroissent à l'infini assez vite pour que l'on puisse déplacer le contour d'intégration jusqu'à la droite critique $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$: c'est évidemment le cas de $L_F(\mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ 2s)$ en vertu du théorème de Paley-Wiener si l'on suppose que la fonction $F(g)$ est de classe C^∞ par rapport aux composantes à l'infini de g ; et pour montrer qu'il en est de même de $\hat{\theta}_G(\mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ s)$, il suffit, d'après (6.13), de montrer que la fonction $\psi(\mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ s)$ est à croissance polynomiale au plus en s dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui résulte par exemple de (4.30) ou (4.31) : le rapport $L(\bar{\chi}\ ,\ 2 - 2s)/L(\chi\ ,\ 2s)$ est, dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}$, à croissance logarithmique à l'infini (voir par exemple [7], § 46 et 47), cependant que les rapports de la forme $\Gamma(1 - s + a)/\Gamma(s + a)$ ou $\Gamma(2 - 2s + a)/\Gamma(2s + a)$ qui proviennent des places à l'infini sont, dans chaque bande verticale, à croissance polynomiale.

On peut donc bien, dans (7.2), intégrer sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, à condition bien-entendu de tenir compte au passage du résidu correspondant au pôle simple $s = 1$ dans le terme de (7.2) qui correspond à $\mathfrak{d} = \mathrm{id}$, $\chi = \mathrm{id}$. Le résidu du facteur $\theta_G(\mathrm{id}\ ,\ \mathrm{id}\ ,\ \bar{s})^*$ est, d'après (5.6), égal à $c\overline{(\theta_G\ ,\ 1)}$; on a donc en $s = 1$ un résidu égal à

$$(7.4) \qquad c.L_F(\mathrm{id}\ ,\ \mathrm{id}\ ,\ 2)\overline{(\theta_G\ ,\ 1)} \quad ;$$

mais d'après (6.10) on a

$$(7.5) \qquad L_F(\mathrm{id}\ ,\ \mathrm{id}\ ,\ 2) = \iint_{MH_A/H_k} F(mh)|\beta(h)|\ dm\ dh = \int_{G_A/H_kU_A} F(g)\ dg$$
$$= \int_{G_A/H_kU_k} F(g)\ dg = \int_{G_A/G_k} \theta_F(g)\ dg = (\theta_F\ ,\ 1) \quad ;$$

le résidu cherché est donc égal à

$$(7.6) \qquad c(\theta_F\ ,\ 1)\overline{(\theta_G\ ,\ 1)} \quad ,$$

et il reste à appliquer le théorème de Cauchy, ce qui donne

$$2\pi i(\theta_F , \theta_G) - 2\pi i c(\theta_F , 1)\overline{(\theta_G , 1)}$$

$$= \sum_{\mathfrak{d},\chi} \int_{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}} \mathrm{Sp}[L_F(\mathfrak{d} , \chi , 2s)\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{d} , \chi , \bar{s})^*]\ ds$$

$$= \sum_{\mathfrak{d},\chi} \int_{\substack{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}\\ \mathrm{Im}(s)>0}} \mathrm{Sp}[L_F(\mathfrak{d} , \chi , 2 - 2s)\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{d} , \chi , s)^*]\ ds$$

$$+ \sum_{\mathfrak{d},\chi} \int_{\substack{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}\\ \mathrm{Im}(s)>0}} \mathrm{Sp}[L_F(\mathfrak{d} , \chi , 2s)\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{d} , \chi , 1 - s)^*]\, ds$$

et en utilisant l'équation fonctionnelle (6.7), on trouve

$$\sum_{\mathfrak{d},\chi} \int \mathrm{Sp}[L_F(\mathfrak{d} , \chi , 2 - 2s)\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{d} , \chi , s)^*]\ ds$$

$$+ \sum_{\mathfrak{d},\chi} \int \mathrm{Sp}[L_F(\mathfrak{d} , \chi , 2s)\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{d} , \bar{\chi} , s)^*\ \psi(\mathfrak{d} , \bar{\chi} , s)]\ ds \quad ,$$

où l'on intègre sur la moitié supérieure de la droite critique. En groupant le terme $\mathfrak{d} , \chi$ de la première somme avec le terme $\mathfrak{d} , \bar{\chi}$ de la seconde, on trouve une contribution égale à l'intégrale de la fonction

$$\mathrm{Sp}\{[L_F(\mathfrak{d} , \chi , 2 - 2s) + \psi(\mathfrak{d} , \chi , s)\ L_F(\mathfrak{d} , \bar{\chi} , 2s)]\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{d} , \chi , s)^*\}$$

$$= \mathrm{Sp}[\hat{\theta}_F(\mathfrak{d} , \chi , s)\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{d} , \chi , s)^*] \quad ,$$

d'après (6.13), de sorte qu'en définitive on obtient la formule

$$(7.7) \quad (\theta_F , \theta_G) = c(\theta_F , 1)\overline{(\theta_G , 1)} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mathfrak{d},\chi} \int_{\substack{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}\\ \mathrm{Im}(s)>0}} \mathrm{Sp}[\hat{\theta}_F(\mathfrak{d} , \chi , s)\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{d} , \chi , s)^*]\, ds \quad .$$

On notera que l'on a, d'après (4.28 ter),

$$c = 1 \Big/ \int_{G_A/G_k} dg \quad ;$$

si l'on utilisait la mesure normalisée, i. e. telle que G_A/G_k soit de volume 1 (il se trouve que c'est la mesure de Tamagawa de G), les produits scalaires calculés dans la nouvelle mesure s'obtiendraient en multipliant par c les expressions utilisées ici ; si donc l'on affecte d'un indice τ le produit scalaire calculé à l'aide de la mesure normalisée, on obtient au lieu de (7.7) la formule

$$(7.8) \quad (\theta_F , \theta_G)_\tau$$

$$= (\theta_F , 1)_\tau \overline{(\theta_G , 1)_\tau} + \frac{c}{2\pi i}\sum_{\mathfrak{d},\chi} \int_{\substack{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}\\ \mathrm{Im}(s)>0}} \mathrm{Sp}[\hat{\theta}_F(\mathfrak{d} , \chi , s)\ \hat{\theta}_G(\mathfrak{d} , \chi , s)^*]\, ds \quad .$$

Si l'on somme par rapport à $\mathfrak{d}$ dans la formule précédente, on trouve évidemment

$$(7.9) \qquad (\Phi , \Psi)_T = \frac{c}{2\pi i} \sum_\chi \int ds \int_M \hat{\Phi}(m ; \chi , s) \overline{\hat{\Psi}(m ; \chi , s)} dm + (\Phi , 1)_T \overline{(\Psi , 1)_T}$$

lorsque les fonctions modulaires Φ et Ψ sont de la forme θ_F, avec F continue à support compact mod $H_k U_A$, et où l'on intègre sur la moitié supérieure de la droite $Re(s) = \frac{1}{2}$. Considérons alors, pour $Re(s) = \frac{1}{2}$, la représentation (unitaire de dimension 1)

$$(7.10) \qquad hu \longmapsto \chi(h) |\beta(h)|^{s-\frac{1}{2}}$$

de $H_A U_A$ et la représentation unitaire de G_A qu'elle induit (voir la note du n° 5). Comme on l'a vu au n° 5, la fonction $\hat{\Phi}(g ; \chi , s)$ appartient à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(\chi ; s)$ de la représentation en question, et si l'on note $\hat{\Phi}(\chi , s)$ l'élément de $\mathcal{H}(\chi , s)$ ainsi obtenu, la formule (7.10) s'écrit

$$(7.11) \qquad (\Phi , \Psi)_T = \frac{c}{2\pi i} \sum_\chi \int \langle \hat{\Phi}(\chi , s) , \hat{\Psi}(\chi , s) \rangle ds + (\Phi , 1)_T \overline{(\Psi , 1)_T} ,$$

où l'on intègre par rapport à s le produit scalaire, dans $\mathcal{H}(\chi , s)$, des vecteurs $\hat{\Phi}(\chi , s)$ et $\hat{\Psi}(\chi , s)$. Si l'on note $\mathcal{H}$ le sous-espace fermé de $L^2(G_A/G_k)$ engendré par les θ_F, et dans lequel ces fonctions sont partout denses, il est clair que le groupe G_A opère sur $\mathcal{H}$ et sur les $\mathcal{H}(\chi , s)$ d'une façon compatible avec l'application $\Phi \longmapsto \hat{\Phi}(\chi , s)$, de sorte que (7.11) apparaît comme une décomposition de la représentation évidente de G_A dans $\mathcal{H}$ en la somme continue des représentations de G_A dans les $\mathcal{H}(\chi , s)$, et de la représentation unité de G_A, qui intervient dans la décomposition avec la multiplicité 1 .

Si l'on veut attribuer à l'expression "somme continue" le sens précis qu'on trouvera par exemple dans [3], il faut vérifier que les "champs de vecteurs" $(\chi , s) \longmapsto \hat{\Phi}(\chi , s)$ associés aux fonctions de la forme θ_F permettent de munir canoniquement la famille des $\mathcal{H}(\chi , s)$ d'une structure de famille continue d'espaces de Hilbert, et qu'ils sont partout denses dans l'espace des champs de vecteurs de carré intégrable. Cela résulte des propriétés suivantes. Tout d'abord les produits scalaires $\langle \hat{\Phi}(\chi , s) , \hat{\Psi}(\chi , s) \rangle$ sont continus et intégrables puisque ce sont les restrictions à $Re(s) = \frac{1}{2}$ de fonctions analytiques et à décroissance rapide dans le demi-plan $Re(s) \geqslant \frac{1}{2}$. D'autre part, pour χ et s donnés, les vecteurs $\hat{\Phi}(\chi , s)$ sont denses dans $\mathcal{H}(\chi , s)$, par exemple parce qu'ils forment un sous-espace invariant alors que la représentation de G_A dans $\mathcal{H}(\chi , s)$ est irréductible comme le montrent les raisonnements classiques de GEL'FAND et NAJMARK. Enfin, la famille des champs de vecteurs $\hat{\Phi}(\chi , s)$ reste stable lorsqu'on multiplie ceux-ci par une fonction "arbitraire", ou presque, de χ et de s, disons par la transformée de Fourier d'une fonction $\omega(h)$ sur H_A/H_k qui est continue à support compact et C^∞ le long de la composante à l'infini de H_A : il suffit, pour le voir, d'examiner la façon dont varie la transformée de Laplace de θ_F lorsque l'on remplace la fonction F par la fonction

$$\int_{H_A/H_k} F(gh)\ \omega(h)\ dh \quad .$$

Pour parvenir à une décomposition complète de la représentation de G_A dans $L^2(G_A/G_k)$, il faut encore examiner le sous-espace de $L^2(G_A/G_k)$ orthogonal aux θ_F ; or, <u>ce n'est autre que le sous-espace $L^2_0(G_A/G_k)$ des formes paraboliques</u>. En effet, pour $\Phi \in L^2(G_A/G_k)$ et $F(g)$ continue à support compact modulo $H_k\ U_A$, on a

$$(\Phi\ ,\ \theta_F) = \int_{G_A/H_kU_A} \Phi^0(g)\ \overline{F(g)}\ dg = \iint_{MH_A/H_k} \Phi^0(mh)\ \overline{F(mh)}\,|\beta(h)|\ dm\ dh \quad ,$$

comme le montre un calcul trivial - voir (7.1) - et comme F est "arbitraire", on en déduit immédiatement que Φ ne peut être orthogonal aux θ_F que si $\Phi^0 = 0$, comme annoncé.

En définitive, on voit que le "spectre" de $L^2(G_A/G_k)$ se compose :

(1) d'un spectre discret avec multiplicités finies dans le sous-espace des formes paraboliques,

(2) de la représentation unité, comptée une fois,

(3) d'un spectre continu, formé des représentations de la "série principale", intervenant chacune une fois, la mesure spectrale étant - à un facteur près - la mesure de Lebesgue.

Voir [1] ; les démonstrations ne semblent pas avoir encore été publiées.

8. Equation fonctionnelle des transformées de Laplace.

Reprenons une fonction modulaire Φ continue et à support compact mod G_k , et supposons qu'elle se transforme suivant une représentation de dimension finie de M - de sorte que les fonctions $\hat{\Phi}(\mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ s)$ ne sont différentes de 0 que pour un nombre fini de classes $\mathfrak{d}$. La relation (6.15) permet alors de mettre l'équation fonctionnelle (5.7) sous la forme

$$(8.1)\qquad \hat{\Phi}(\mathfrak{d}\ ,\ \chi\ ,\ s) = \Psi(\mathfrak{d}\ ,\ \bar{\chi}\ ,\ s)\ \hat{\Phi}(\mathfrak{d}\ ,\ \bar{\chi}\ ,\ 1-s) \quad ;$$

on en déduit aussitôt la relation

$$(8.2)\qquad \int_{U_A} \hat{\Phi}(guw\ ;\ \chi\ ,\ s)\ du = \hat{\Phi}(g\ ;\ \bar{\chi}\ ,\ 1-s) \quad ,$$

en utilisant (5.8) et (4.33) ; le premier membre de (8.2) converge pour $\mathrm{Re}(s) < 0$

comme on le voit facilement en comparant avec (4.33), qui converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Mais d'autre part

$$\int_{U_A} \hat{\Phi}(guw\ ;\ \chi\ ,\ s)\ du = \int_{U_A} du \int_{H_A/H_k} \Phi^o(guwh)\ \overline{\chi(h)}\,|\beta(h)|^{1-s}\ dh$$
$$= \iint_{U_A H_A/H_k} \Phi^o(guwh)\ \overline{\chi(h)}\,|\beta(h)|^{1-s}\ du\ dh$$
$$= \iint_{U_A H_A/H_k} \Phi^o(ghuw)\ \chi(h)\,|\beta(h)|^{s}\ du\ dh\quad ,$$

et la comparaison avec

$$\hat{\Phi}(g\ ;\ \bar{\chi}\ ,\ 1-s) = \int_{H_A/H_k} \Phi^o(gh)\ \chi(h)\,|\beta(h)|^{s}\ dh$$

montre, puisque χ et s sont arbitraires (à ceci près qu'on suppose $\mathrm{Re}(s) < 0$ pour que les intégrales convergent), que l'on a

$$(8.3)\qquad \int_{U_A} \Phi^o(guw)\ du = \Phi^o(g)$$

pour Φ continue à support compact mod G_k et se transformant suivant une représentation de dimension finie de M . Il est sans doute utile d'observer que la convergence de l'intégrale (8.3) n'est nullement évidente a priori, attendu qu'on intègre ici sur un "horicycle" une fonction qui, sur cet horicycle, n'est pas à support compact. Nous ne voyons pas d'autre moyen de prouver la convergence de (8.3) que d'appliquer Lebesgue-Fubini dans le calcul qui vient de nous y conduire, en prenant s réel, pour χ le caractère identité, et en remplaçant Φ par $|\Phi|$ de façon à n'intégrer que des fonctions positives.

Il est intéressant d'appliquer (8.3) au cas où $\Phi = \theta_F$, avec F continue à support compact mod $H_k\ U_A$. Un calcul trivial - au point où l'on en est - montre que

$$(8.4)\qquad \theta_F^o(g) = F(g) + F'(g) \qquad \text{où}\quad F'(g) = \int F(guw)\ du\quad ,$$

voir du reste (6.3). On en déduit immédiatement la formule d'inversion suivante :

$$(8.5)\qquad F'(g) = \int_{U_A} F(guw)\ du \implies F(g) = \int_{U_A} F'(guw)\ du\quad ,$$

à condition encore une fois que F soit continue à support compact modulo $H_k\ U_A$, résultat étrange dû à GEL'FAND, GRAEV et PJATECKIJ-ŠAPIRO [1].

D'autre part, reprenons la relation (7.8) en supposant θ_F et θ_G orthogonales aux constantes, de sorte que

(8.6) $$(\theta_F\ ,\ \theta_G) = \frac{c}{2\pi i}\sum_{\mathfrak{b},\chi}\int_{\substack{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}\\ \mathrm{Im}(s)>0}} \mathrm{Sp}[\theta_F(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ s)\ \theta_G(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ s)^*]\ ds\ ;$$

si l'on remplace χ et s par $\overline{\chi}$ et $1 - s$ (i. e. par $\overline{\chi}$ et $\overline{s}$, puisqu'on se trouve sur la droite critique), les transformées de Laplace figurant au second membre sont toutes les deux multipliées par $\mathfrak{y}(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ 1 - s)$; mais (6.16) montre que $\mathfrak{y}(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ 1 - s)^*\ \mathfrak{y}(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ 1 - s) = P(\mathfrak{b}\ ,\ \chi)$ sur la droite critique, et par suite le terme $\chi\ ,\ s$ de (8.6) est égal au terme $\overline{\chi}\ ,\ \overline{s}$; on en déduit que

$$(\theta_F\ ,\ \theta_G) = \frac{c}{4\pi i}\sum\int_{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}} \mathrm{Sp}[\theta_F(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ s)\ \theta_G(\mathfrak{b}\ ,\ \chi\ ,\ \overline{s})^*]\ ds\ ,$$

où l'on intègre cette fois sur toute la droite critique. D'après PETER-WEYL, il vient donc

$$(\theta_F\ ,\ \theta_G) = \frac{c}{4\pi i}\iint_{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}} \theta_F(m\ ;\ \chi\ ,\ s)\ \overline{\theta_G(m\ ;\ \chi\ ,\ s)}\ dm\ ds\ ,$$

et comme l'application $(\chi\ ,\ s) \longmapsto \theta_F(m\ ;\ \chi\ ,\ s)$ est la transformée de Fourier de la fonction $h \longmapsto \theta_F^o(mh)|\beta(h)|^{\frac{1}{2}}$, d'après (5.1), on en déduit finalement que

(8.7) $$(\theta_F, \theta_G) = \frac{c}{2}\iint_{MH_A/H_k} \theta_F^o(mh)\ \overline{\theta_G^o(mh)}\,|\beta(h)|\ dm\,dh = \frac{c}{2}\int_{G_A/H_kU_A} \theta_F^o(g)\ \overline{\theta_G^o(g)}\ dg\ ,$$

l'intégrale convergeant à cause, par exemple, des propriétés de décroissance à l'infini de la transformée de Laplace de θ_F. On en déduit que l'application $\Phi \longmapsto \Phi^o$ est (au facteur $c/2$ près) un homomorphisme <u>isométrique</u> de la représentation de G_A dans le sous-espace de $L^2(G_A/G_k)$ orthogonal au spectre discret, dans la représentation de G_A induite par la représentation unité du sous-groupe $H_k\,U_A$. Il est facile de voir, comme l'ont annoncé GEL'FAND, GRAEV et PJATECKIJ-ŠAPIRO, que l'image de ce sous-espace de $L^2(G_A/G_k)$ dans la représentation induite en question, i. e. dans $L^2(G_A/H_k\ U_A)$, est formée des fonctions qui satisfont à l'équation fonctionnelle (8.3). On obtient ainsi en quelque sorte "la moitié" de $L^2(G_A/H_k\ U_A)$, car les représentations (5.3) de la série principale, qui interviennent dans $L^2(G_A/H_k\ U_A)$ avec la multiplicité 2 - les représentations $\chi\ ,\ s$ et $\overline{\chi}\ ,\ \overline{s}$ sont équivalentes - n'interviennent dans $L^2(G_A/G_k)$ qu'avec la multiplicité 1.

Faisons, pour conclure, les remarques suivantes. La première version de cet exposé, rédigée en décembre 1964, a été complètement remaniée en février-mars 1966. A en juger par les indications de la note [1], les méthodes de GEL'FAND, GRAEV et PJATECKIJ-ŠAPIRO sont assez différentes de celles du présent exposé, qui ne sont pas non plus celles de SELBERG et LANGLANDS, puisqu'on a cherché à maximiser l'usage de l'arithmétique dans les démonstrations, alors que ces auteurs cherchent au contraire à le minimiser !

On pourrait grandement réduire les calculs (et notamment éviter entièrement les calculs du n° 4) si l'on pouvait démontrer la conjecture suivante. Considérons, comme au n° 3, une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(V_A)$ et la fonction

$$\theta_\varphi(g) = \sum_{\xi \neq 0} \varphi[g(\xi)] \quad ,$$

évidemment invariante par G_k. Il est facile de voir - d'autant plus que la chose se trouve démontrée dans WEIL [16] - que $\theta_\varphi \in L^1(G_A/G_k)$, mais en général il est faux que θ_φ se trouve dans L^2 ; une évaluation asymptotique utilisant la formule de Poisson montre que l'on a $\theta_\varphi \in L^2(G_A/G_k)$ si et seulement si

$$\int_A \varphi[g(e_1)x]\, dx = 0 \qquad \text{pour tout} \quad g \in G_A \quad .$$

Or la formule (8.6) est beaucoup plus facile à établir pour ces fonctions que pour celles que nous avons utilisées. Le problème est donc de démontrer a priori que les fonctions θ_φ qui sont dans $L^2(G_A/G_k)$ engendrent le "spectre continu", i. e. sont partout denses dans l'orthogonal du spectre discret (formes paraboliques et fonctions constantes).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GEL'FAND (I. M.), GRAEV (M. I.) i PJATECKIJ-ŠAPIRO (I. I.). - Predstavlenija grupp adelej, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 156, 1964, p. 487-490 ; Representations of adele groups, Soviet Math., t. 5, 1964, p. 657-661.

[2] GEL'FAND (I. M.) i PJATECKIJ-ŠAPIRO (I. I.). - Avtomorphnye funkcij i teorija predstavlenij, Trudy Moskovsk. Matem. Obščestva, t. 12, 1963, p. 389-412.

[3] GODEMENT (Roger). - Sur la théorie des représentations unitaires, Annals of Math., t. 53, 1951, p. 68-124.

[4] GODEMENT (Roger). - Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques, Séminaire Bourbaki, 15e année, 1962/63, n° 257, 25 p.

[5] GODEMENT (Roger). - The spectral decomposition of cusp-forms, Proceedings of the 1965 Summer institute on algebraic groups and discontinuous groups, p. 207-216 (à paraître).

[6] HECKE (E.). - Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abh. math. Semin. Hamburg Univ., t. 5, 1927, p. 199-224.

[7] LANDAU (E.). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. - New York, Chelsea publishing Comp., 1953.

[8] LANG (Serge). - Algebraic numbers. - Reading, Addison-Wesley publ. Comp., 1964.

[9] LANGLANDS (R.). - On the functional equations satisfied by Eisenstein series (à paraître).

[10] LANGLANDS (R.). - Eisenstein series, Proceedings of the 1965 Summer institute on algebraic groups and discontinuous groups (à paraître).

[11] MAAS (H.). - Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Annalen, t. 121, 1949, p. 141-183.

[12] MAAS (H.). - Lectures on modular functions of one complex variable. - Bombay, Tata Institute, 1964 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 29).

[13] ROELCKE (W.). - Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art, Sitz. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., 1953-1955, Abh. n° 4, p. 159-267.

[14] SELBERG (A.). - Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemanian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian math. Soc., t. 20, 1956, p. 47-87.

[15] TATE (J.). - Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions (Dissertation, Princeton 1950).

[16] WEIL (André). - Adeles and algebraic groups. - Princeton, Institute for advanced Study, 1961.