

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LUC ILLUSIE

Contractibilité du groupe linéaire des espaces de Hilbert de dimension infinie

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 284, p. 105-113

http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__105_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONTRACTIBILITÉ DU GROUPE LINÉAIRE
DES ESPACES DE HILBERT DE DIMENSION INFINIE

par Luc ILLUSIE

(d'après N. KUIPER [4])

Dans cet exposé, on suppose choisi un corps de base Λ , qui pourra être \mathbb{R} , \mathbb{C} , ou \mathbb{H} . Quand on parlera d'espaces (resp. fibrés) vectoriels, il sera sous-entendu qu'il s'agit d'espaces (resp. fibrés) vectoriels sur Λ .

1. Le théorème de N. KUIPER.

Dans [4], N. KUIPER a prouvé le résultat suivant :

THÉORÈME. - Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit $L(H)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de H , muni de la topologie de la norme. Alors le groupe $GL(H)$ des éléments inversibles de $L(H)$, muni de la topologie induite par celle de $L(H)$, est contractile.

Voici les principales étapes de la démonstration de ce théorème.

1° Réduction à la contractibilité faible. - $GL(H)$ étant ouvert dans $L(H)$, le lemme 1 ci-dessous montre qu'il suffit de prouver que $GL(H)$ est faiblement contractile (i. e. que tous ses groupes d'homotopie sont nuls).

LEMME 1 (cf. MIINOR [7]). - Soit U un ouvert d'un espace vectoriel localement convexe métrisable E . Il existe un complexe simplicial N , une application continue $\varphi : U \rightarrow N$ et une application continue $\psi : N \rightarrow U$ affine sur les simplexes de N telles que $\psi\varphi$ soit homotope à l'identité de U .

Démonstration du lemme 1. - Choisissons sur E une métrique invariante par translation et pour laquelle les boules soient convexes. Pour tout $x \in E$ et tout nombre réel $r > 0$, notons $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r . Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de U par des boules $U_i = B(x_i, r_i)$ telles que $B(x_i, 3r_i) \subset U$ pour tout $i \in I$. \mathcal{U} jouit alors de la propriété suivante :

(1) Si (i_0, \dots, i_p) est un simplexe du nerf N de \mathcal{U} , l'enveloppe convexe de $U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_p}$ est contenue dans U .

Soit maintenant $\varphi : U \rightarrow N$ l'application continue définie par une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ sur U subordonnée à \mathcal{U} . Définissons d'autre part, grâce à (1), une application continue $\psi : N \rightarrow U$ en posant $\psi(i) = x_i$ si i est un sommet de N et en prolongeant ψ de manière affine aux simplexes de N . Alors $\psi\varphi$ est homotope à l'identité de U , car, en vertu de (1), le segment joignant x à $\psi\varphi(x)$ est contenu dans U pour tout $x \in U$, ce qui démontre le lemme 1.

(Remarque : on aurait pu montrer aussi que $\varphi\psi$ est homotope à l'identité de N .)

2° Réduction à (a). - Soit $f : S^n \rightarrow GL(H)$ une application continue. Il existe alors une triangulation P de S^n et une application continue $f_1 : S^n \rightarrow GL(H)$, homotope à f et telle que la restriction de f_1 à chaque simplexe de P soit linéaire affine.

En effet, avec les notations du lemme 1, où $E = L(H)$ et $U = GL(H)$, soit P une triangulation finie de S^n telle que le recouvrement de S^n formé par les étoiles des sommets de P soit plus fin que $f^{-1}(U)$. Choisissons pour chaque sommet p de P un indice $i(p)$ tel que l'image par f de l'étoile de p soit contenue dans $U_{i(p)}$. L'application $f_1 : S^n \rightarrow GL(H)$, définie en posant $f_1(p) = x_{i(p)}$ si p est un sommet de P et en prolongeant de manière affine aux simplexes de P , répond à la question.

Comme $f_1(S^n)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L(H)$, le théorème sera donc démontré si l'on prouve l'assertion suivante :

(a) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L(H)$. Alors l'injection canonique $V \cap GL(H) \rightarrow GL(H)$ est homotope à l'application constante

$$V \cap GL(H) \rightarrow 1 \in GL(H) .$$

3° Réduction au cas séparable. - On remarque qu'il suffit de démontrer (a) lorsque H est séparable (i. e. de dimension \aleph_0). En effet, si A est la sous- \ast -algèbre unitaire engendrée par V , il existe une famille $(H_i)_{i \in I}$ de sous-espaces séparables de H , stables par A et deux à deux orthogonaux, telle que $H = \bigoplus_{i \in I} H_i$ (somme hilbertienne). Pour le voir, on considère l'ensemble des familles $(H_i)_{i \in I}$ de sous-espaces séparables de H stables par A et deux à deux orthogonaux. Ordonné par inclusion, c'est un ensemble inductif. Soit $(H_i)_{i \in I}$ un élément maximal, et soit H' l'orthogonal de la somme hilbertienne $\bigoplus_{i \in I} H_i$. Alors H' est stable par A . Si H' était de dimension $\geq \aleph_0$, il existerait un sous-espace séparable $H'' \subset H'$ et AH'' serait un sous-espace séparable (puisque A admet une base algébrique dénombrable comme espace vectoriel sur Λ) orthogonal à tous les

H_i et stable par A , ce qui contredirait le caractère maximal de la famille $(H_i)_{i \in I}$. H' est donc de dimension finie, et l'on obtient la décomposition annoncée en remplaçant l'un des H_i par $H_i \oplus H'$.

4° Un lemme déjà connu sur les espaces de Hilbert séparables, et réduction à (b).

LEMME 2. - Soient H un espace de Hilbert séparable et H' un sous-espace de H de dimension infinie. Notons $GL(H, H')$ le sous-groupe de $GL(H)$ formé des éléments qui induisent l'identité sur H' . Alors l'injection canonique

$$GL(H, H') \rightarrow GL(H)$$

est homotope à l'application constante $GL(H, H') \rightarrow 1 \in GL(H)$.

Démonstration du lemme 2. - Par rapport à la décomposition $H = H'^{\perp} \oplus H'$, les éléments de $GL(H, H')$ s'expriment par des matrices du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & I \end{pmatrix}$ et l'application qui, à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & I \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} a & 0 \\ (1-t)b & I \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$, définit une rétraction par déformation de $GL(H, H')$ sur $GL(H'^{\perp}) \times I_{H'}$.

Posons maintenant $H'^{\perp} = H''$, et identifions H' à la somme hilbertienne $H'' \oplus H'' \oplus \dots$ (\aleph_0 termes). L'application $s : GL(H'') \rightarrow GL(H)$ définie par $s(g) = g \oplus g^{-1} \oplus g \oplus \dots$ est homotope (par rotations), d'une part à l'injection $g \mapsto g \oplus I \oplus I \oplus \dots$, et d'autre part à l'application constante $g \mapsto I \oplus I \oplus \dots$, ce qui démontre le lemme 2.

Le lemme 2 montre qu'il suffit, pour prouver l'assertion (a) dans le cas H séparable, de prouver l'assertion suivante.

(b) Soient H un espace de Hilbert séparable et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L(H)$. Alors il existe un sous-espace H' de H de dimension infinie tel que l'injection canonique de $V \cap GL(H)$ dans $GL(H)$ soit homotope à une application de $V \cap GL(H)$ dans $GL(H)$ dont l'image soit contenue dans $GL(H, H')$.

5° Dernière étape : démonstration de (b). - Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que V contienne l'identité, et soit $n = \dim V$. Il existe alors une suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de H , et une suite $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces de H de dimension $n + 1$ deux à deux orthogonaux tels que $Va_i \subset E_i$ pour tout i . (La construction par récurrence de ces deux suites est immédiate et laissée au lecteur.) Choisissons de plus, pour chaque i , un sous-espace F_i de E_i de dimension n contenant Va_i . Enfin, notons S_i la sphère unité de F_i .

Cela posé, on commence par déformer $K = V \cap GL(H)$ en K_1 dans $GL(H)$ de manière à avoir $K_1 a_i \subset S_i$ pour tout i . Considérons en effet l'application

$\lambda : K \times [0, 1] \rightarrow GL(H)$ définie par $\lambda(v, t)_{E_i} = I_{E_i}$, (où E_i est l'orthogonal de la somme hilbertienne $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_i$) et

$$\lambda(v, t)_{E_i} = (1 - t + t/\|va_i\|)I_{E_i}$$

pour $(v, t) \in K \times [0, 1]$, et posons

$$\mu(v, t) = \lambda(v, t)v.$$

Alors $\mu : K \times [0, 1] \rightarrow GL(H)$ est une application continue telle que $\mu(\cdot, 0)$ soit l'injection canonique et $\mu(K, 1)a_i \subset S_i$ pour tout i .

On va maintenant déformer $K_1 = \mu(K, 1)$ en K_2 dans $GL(H)$ de manière que $K_2 a_i = a_i$ pour tout i . On va utiliser pour cela le lemme suivant :

LEMME 3. - Soient E un espace de Hilbert de dimension finie, F un hyperplan, a un vecteur unitaire de F . Notons $S(E)$ (resp. $S(F)$) la sphère unité de E (resp. F) et $U(E)$ le groupe unitaire de E . Il existe alors une application continue $f : S(F) \times [0, 1] \rightarrow U(E)$ telle que $f(x, 0) = I_E$ et $f(x, 1)x = a$ pour tout $x \in S(F)$.

Démonstration du lemme 3. - Considérons le fibré principal $p : U(E) \rightarrow S(E)$ défini par $p(u) = u^{-1}(a)$. Soit $S(E)'$ le complémentaire dans $S(E)$ d'un point de $S(E)$ non situé sur F . Alors $S(E)'$ est contractile et contient $S(F)$. Il existe donc, d'une part une section continue s de p au-dessus de $S(E)'$ telle que $s(a) = I_E$, et d'autre part une application continue $r : S(F) \times [0, 1] \rightarrow S(E)'$ telle que $r(x, 0) = a$ et $r(x, 1) = x$ pour tout $x \in S(F)$. L'application $f = sr : S(F) \times [0, 1] \rightarrow U(E)$ répond alors à la question.

Soient donc E un espace de Hilbert de dimension $n + 1$, F un hyperplan, a un vecteur unitaire de F , et $f : S(F) \times [0, 1] \rightarrow U(E)$ une application satisfaisant aux conditions du lemme 3. Donnons-nous, pour chaque i , une isométrie α_i de E_i sur E telle que $\alpha_i(F_i) = F$ et $\alpha_i(a_i) = a$. Notons

$$f_i : K_1 \times [0, 1] \rightarrow U(E_i)$$

l'application définie par

$$f_i(v, t) = \alpha_i^{-1} f(\alpha_i va_i, t)\alpha_i$$

pour $(v, t) \in K_1 \times [0, 1]$, et

$$\tilde{f} : K_1 \times [0, 1] \rightarrow GL(H)$$

l'application définie par

$$\tilde{f}(v, t)_{E_i} = I_{E_i}, \text{ et } \tilde{f}(v, t)_{E_i} = f_i(v, t).$$

Alors l'application \tilde{f} est continue, et l'application continue

$$g : K_1 \times [0, 1] \rightarrow GL(H)$$

définie par $g(v, t) = \tilde{f}(v, t)v$ est telle que $g(\cdot, 0)$ soit l'injection canonique et que $g(K_1, 1)a_i = a_i$ pour tout i .

En composant les déformations de K en K_1 et de K_1 en $K_2 = g(K_1, 1)$, on obtient finalement une homotopie entre l'injection canonique de K dans $GL(H)$ et une application de K dans $GL(H)$ dont l'image laisse fixe le sous-espace séparable H' de H engendré par le système orthonormal $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ce qui démontre (b) et achève la démonstration du théorème.

2. Applications.

1° Contractibilité de $U(H)$. - Si H est un espace de Hilbert de dimension infinie, son groupe unitaire $U(H)$ est contractile.

En effet, $GL(H)$ s'identifie à $U(H) \times P(H)$, $P(H)$ désignant l'ensemble des endomorphismes hermitiens définis positifs de H , d'où le résultat, puisque $P(H)$ est contractile.

2° Trivialité de fibrés. - Si H est un espace de Hilbert de dimension infinie, tout fibré principal E de groupe $GL(H)$ (resp. $U(H)$) et de base paracompacte est trivial. En effet, le faisceau des germes de sections continues de E est mou (DIXMIER-DOUADY, [1], n° 11, lemme 4).

3° Contractibilité de la grassmannienne $G_{\infty, \infty}(H)$. - Si H est un espace de Hilbert séparable, la grassmannienne $G_{\infty, \infty}(H)$ des sous-espaces de H , de dimension et de codimension infinies, est contractile. En effet, soit $E \in G_{\infty, \infty}(H)$. L'application $p : U(H) \rightarrow G_{\infty, \infty}(H)$ définie par $p(u) = u(E)$ fait de $U(H)$ un fibré principal sur $G_{\infty, \infty}(H)$, de groupe $U(E) \times U(E^\perp)$. Ce fibré est trivial d'après le 2°, donc $G_{\infty, \infty}(H)$ a le type d'homotopie de $U(H)$, i. e. est contractile.

Remarque. - Au contraire, la grassmannienne $G_n(H)$ des sous-espaces de dimension finie n de H n'est pas contractile, mais est un espace classifiant pour le groupe unitaire $U(n)$. Cela résulte de la contractibilité de la variété de Stiefel $V_n(H)$ des n -repères de H ; cette propriété était déjà connue avant le théorème de Kuiper, c'est une conséquence facile de la contractibilité de $U(H)$ pour la

topologie simple forte (cf. DIXMIER-DOUADY, [1], n° 11).

4° Type d'homotopie de l'espace des opérateurs à indice de H . - Dans ce qui suit, H désigne un espace de Hilbert séparable. Soit $C(H)$ l'espace des opérateurs compacts de H (c'est un idéal bilatère fermé de $L(H)$), et posons

$$L'(H) = L(H)/C(H) .$$

Soit $p : L(H) \rightarrow L'(H)$ l'épimorphisme canonique. Un théorème de E. MICHAEL, [6], (tout épimorphisme d'espaces de Banach admet une section continue) assure que p est une fibration. Notons $F(H)$ l'espace des opérateurs à indice de H (i. e. dont le noyau et le conoyau sont de dimensions finies) et $GL'(H)$ le groupe des éléments inversibles de $L'(H)$. On sait que

$$F(H) = p^{-1}(GL'(H)) ;$$

autrement dit, $F(H)$ n'est autre que le fibré induit par $L(H)$ au-dessus de $GL'(H)$. D'autre part, l'indice

$$i : F(H) \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} ,$$

défini par

$$i(f) = \dim \text{Ker } f - \dim \text{Coker } f ,$$

passé au quotient et définit un homomorphisme i' du groupe multiplicatif $GL'(H)$ dans le groupe additif $\underline{\mathbb{Z}}$. $GL'_0(H) = \text{Ker } i'$ est la composante connexe de l'élément neutre dans $GL'(H)$, et $GL'(H)$ s'identifie à $\underline{\mathbb{Z}} \times GL'_0(H)$. De plus, $p^{-1}(GL'_0(H)) = F_0(H)$ est l'ensemble des opérateurs d'indice nul, et la restriction de p à l'ouvert $GL(H) \subset F_0(H)$ fait de $GL(H)$ un fibré principal sur $GL'_0(H)$, de fibre le groupe $GC(H) = GL(H) \cap (I + C(H))$

PROPOSITION (PALAIS, [8]). - Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ une base orthonormale de H . Identifions $GL(n, \Lambda)$ au sous-groupe de $GL(H)$ laissant fixe e_i pour $i > n$ et invariant le sous-espace engendré par e_1, \dots, e_n . Posons

$$GL(\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} GL(n, \Lambda) \subset GL(H) .$$

Alors

- a. l'adhérence de $GL(\infty)$ dans $GL(H)$ est égale à $GC(H)$;
- b. l'injection canonique $GL(\infty) \rightarrow GC(H)$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration

a. Notons H' le sous-espace de H algébriquement engendré par les e_i , et V le sous-espace de $L(H)$ formé des éléments $f \in L(H)$ tels que $f(H) \subset H'$ et $f(e_i) = 0$, pour tout i , sauf un nombre fini. Alors V est dense dans l'espace des opérateurs de rang fini, qui, à son tour, est dense dans $C(H)$. L'assertion s'en déduit aussitôt, car $GL(\infty)$ coïncide avec l'ensemble des éléments inversibles de $I + V$.

b. C'est une conséquence de la densité de V dans $C(H)$ et du lemme suivant :

LEMME. - Soient E un espace vectoriel localement convexe métrisable, E' un espace vectoriel topologique, $f : E' \rightarrow E$ une application linéaire continue d'image dense. Alors, pour tout ouvert U de E , l'application $f|_{U'} : U' \rightarrow U$, où $U' = f^{-1}(U)$, est une équivalence d'homotopie.

(La démonstration de ce lemme se fait comme celle du lemme 1, en construisant un complexe simplicial N et des applications continues $\varphi : U \rightarrow N$, $\psi : N \rightarrow U'$ telles que $\psi\varphi$ soit inverse de $f|_{U'} : U' \rightarrow U$ à homotopie près.)

COROLLAIRE. - $F_0(H)$ est un classifiant pour le groupe unitaire infini

$$U = \varinjlim_n U(n, \Lambda) .$$

Démonstration. - $GL(H)$ étant contractile, le fibré principal $GL(H) \rightarrow GL'_0(H)$ est universel pour le groupe $GC(H)$. D'après la proposition, l'injection $U \rightarrow GC(H)$ est une équivalence d'homotopie. Il en résulte (DOLD [2]) que $GL'_0(H)$ est un classifiant pour U . Mais $F_0(H)$, fibré sur $GL'_0(H)$ de fibre $C(H)$, a le type d'homotopie de $GL'_0(H)$, d'où le corollaire.

Pour tout couple d'espaces topologiques (X, Y) , notons $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X dans Y . Le corollaire précédent prouve l'existence d'un isomorphisme de foncteurs sur la catégorie des espaces compacts à valeurs dans la catégorie des ensembles $(\ , F(H)) \rightarrow K$. Dans [3] et [9], on construit, par une autre méthode, un tel isomorphisme. On montre de plus que $F(H)$ est un anneau à homotopie près⁽¹⁾, et l'homomorphisme construit est un isomorphisme de foncteurs à valeurs dans la catégorie des anneaux. Voici brièvement comment on procède.

On considère, pour tout espace topologique X , la catégorie $C^\infty(X)$ des complexes bornés de fibrés hilbertiens (au sens de LANG [5], chap. 7) sur X , dont les ensembles de cohomologie sont, en chaque point, des espaces vectoriels de dimension

⁽¹⁾ Si le corps de base est \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

finie. Passant au quotient dans $C^\infty(X)$ par la relation d'équivalence engendrée par déformation des complexes et addition de complexes acycliques, on obtient un groupe abélien noté $K^\infty(X)$. C'est même un anneau, le produit étant défini à partir du produit tensoriel des complexes. Une application continue de X dans $F(H)$ définit canoniquement un objet de $C^\infty(X)$ réduit aux degrés 0 et 1 ; on obtient donc, par passage au quotient, une application naturelle $\varphi_X : (X, F(H)) \rightarrow K(X)$. Si X est paracompact, le théorème de Kuiper entraîne que φ_X est une bijection. Grâce à cette bijection on peut munir $F(H)$ d'une structure d'anneau à homotopie près (l'addition s'interprétant comme la composition des opérateurs). D'autre part, la catégorie $C^\infty(X)$ contient la sous-catégorie $C(X)$ des complexes de fibrés de dimension finie. Passant au quotient dans $C(X)$ par la relation d'équivalence engendrée par déformation des complexes et addition de complexes acycliques de $C(X)$, on obtient le groupe usuel $K(X)$ (tout au moins si X est paracompact). L'injection $C(X) \subset C^\infty(X)$ définit par passage aux quotients un morphisme naturel $i_X : K(X) \rightarrow K^\infty(X)$. On démontre que si X est compact, i_X est un isomorphisme, l'isomorphisme inverse $\chi_X : K^\infty(X) \rightarrow K(X)$ correspondant, grosso modo, à une caractéristique d'Euler-Poincaré. On a donc finalement, pour tout X compact, un isomorphisme naturel

$$\chi_X \varphi_X : (X, F(H)) \rightarrow K(X)$$

respectant les structures d'anneaux.

On laisse au lecteur courageux le soin de s'assurer que cet isomorphisme coïncide avec l'isomorphisme construit à partir du corollaire ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DIXMIER (J.) et DOUADY (A.). - Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^* -algèbres, Bull. Soc. math France, t. 91, 1963, p. 227-284.
- [2] DOLD (Albrecht). - Partitions of unity in the theory of fibrations, Annals of Math., Series 2, t. 78, 1963, p. 223-255.
- [3] JAENICH (K.). - Vektorraum Bündel und der Raum der Fredholm-Operatoren, Dissertation Bonn, 1964.
- [4] KUIPER (Nicolaas). - The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, Topology (à paraître).
- [5] LANG (Serge). - Introduction to differentiable manifolds. - New York, Interscience Publishers, 1962.
- [6] MICHAEL (Ernest A.). - Continuous selections, I, Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 361-382.

- [7] MILNOR (John). - On spaces having the homotopy type of a CW-complex, Trans. Amer. math. Soc., t. 90, 1959, p. 272-280.
 - [8] PALAIS (Richard S.). - On the homotopy type of certain groups of operators, Topology (à paraître).
 - [9] SHIH Weishu. - Séminaire sur la K-théorie topologique, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, 1964/65.
-