JEAN DIEUDONNÉ

Mémoire de Bertram Kostant sur les applications de la cohomologie des algèbres de Lie réductives

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 243, p. 39-51
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__39_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 243

Décembre 1962

MÉMOIRE DE BERTRAM KOSTANT (*)
SUR LES APPLICATIONS DE LA COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE RÉDUCTIVES

par Jean DIEUDONNÉ

En étudiant la cohomologie de l'algèbre de Lie du groupe linéaire complexe $\mathfrak{gl}(n, \underset{\sim}{C})$, KOSTANT a découvert de remarquables équivalences entre une formule de Dynkin caractérisant les éléments primitifs dans l'algèbre de cohomologie et deux résultats qui paraissaient n'avoir guère de rapports avec cette question : une identité matricielle d'Amitsur-Levitski, et un théorème de Frobenius sur les caractères du groupe alterné.

1. Enoncé des trois théorèmes équivalents.

A. L'identité d'Amitsur-Levitski ([1], [4]). - Etant données $2n$ matrices carrées d'ordre n (sur un anneau commutatif quelconque) $\underline{A}_1 , \ldots , \underline{A}_{2n}$ (1), on a la relation

$$(1) \qquad [\underline{A}_1 \underline{A}_2 \ldots \underline{A}_{2n}] = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \underline{A}_{\sigma(1)} \underline{A}_{\sigma(2)} \ldots \underline{A}_{\sigma(2n)} = 0$$

la somme étant étendue à toutes les permutations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{2n}$.

B. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive sur un corps de caractéristique 0 , et soit $C_*(\mathfrak{g})$ l'algèbre extérieure sur $\mathfrak{g}$; l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ (resp. l'algèbre d'homologie $H_*(\mathfrak{g})$) s'identifie à la sous-algèbre $J^*(\mathfrak{g})$ (resp. $J_*(\mathfrak{g})$) de l'algèbre extérieure du dual de $\mathfrak{g}$ (resp. de $\mathfrak{g}$) formée des "cochaînes invariantes" (resp. "chaînes invariantes"), c'est-à-dire annulées par le prolongement θ^* (resp. θ_*) à $C^*(\mathfrak{g})$ (resp. à $C_*(\mathfrak{g})$) de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ (on rappelle que $\theta_*(\underline{X})$ (resp. $\theta^*(\underline{X})$) est le prolongement canonique en une dérivation de $C_*(\mathfrak{g})$ (resp. $C^*(\mathfrak{g})$) de la dérivation

(*) KOSTANT (Bertram). - A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitski and cohomology theory, J. Math. and Mech., t. 7, 1958, p. 237-264.

(1) Dans ce texte, les majuscules latines spécialement soulignées, et les minuscules latines utilisées comme symboles, apparaîtraient en italiques en typographie. Par contre, les majuscules latines non soulignées resteraient en caractères romains.

$\mathrm{ad}(\underline{X})$ de g (resp. de $- {}^t\mathrm{ad}(X)$)). Dans chaque $J^r(g)$ (resp. $J_r(g)$) les <u>éléments primitifs</u> sont ceux qui sont orthogonaux aux r-vecteurs décomposables de $J_r(g)$ (resp. $J^r(g)$), et on prouve (HOPF-SAMELSON-KOSZUL [5]) que $H^*(g)$ (resp. $H_*(g)$) est canoniquement isomorphe à l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel gradué $P^*(g)$ (resp. $P_*(g)$) des éléments primitifs.

Si on prend en particulier $g = gl(n, \underset{\sim}{C})$ (de sorte que les éléments de g sont des matrices carrées d'ordre n sur $\underset{\sim}{C}$), il y a un élément primitif $b_j \in P^*(g)$ pour chaque degré impair $j = 1, 3, \ldots, 2n-1$, défini à un facteur près et ce sont les seuls. DYNKIN [3], utilisant des résultats de CARTAN-CHEVALLEY, a prouvé que b_j (qu'on peut considérer comme une forme linéaire sur la j-ième puissance extérieure de g) est donné à un facteur près par

$$(2) \quad \langle b_j , \underline{A}_1 \wedge \underline{A}_2 \wedge \ldots \wedge \underline{A}_j \rangle = \mathrm{Tr}[\underline{A}_1 \underline{A}_2 \ldots \underline{A}_j] \quad \text{où les } \underline{A}_j \in gl(n, \underset{\sim}{C}) \quad .$$

C. Le résultat de Frobenius dont il est question est un cas particulier de sa détermination des caractères du groupe alterné $\mathfrak{A}_r$ [2]. Rappelons d'abord comment on détermine les idéaux bilatères minimaux de l'algèbre I (ou I_r) du groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$ sur $\underset{\sim}{C}$ [2], [6]. A toute <u>partition</u> $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de r telle que $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = r$, on associe un "tableau d'Young" obtenu en prenant comme première ligne les nombres de 1 à α_1, comme seconde ceux de $\alpha_1 + 1$ à $\alpha_1 + \alpha_2$, et ainsi de suite. On forme alors dans I les éléments $P_\alpha = \sum \rho$, somme étendue aux $\rho \in \mathfrak{S}_r$ laissant invariante chaque colonne du tableau, $N_\alpha = \sum \varepsilon_\tau . \tau$, somme étendue aux $\tau \in \mathfrak{S}_r$ laissant invariants chaque ligne du tableau ; $P_\alpha N_\alpha$ est, à un facteur scalaire près, un idempotent engendrant un idéal à gauche minimal de I ; on note I_α l'algèbre simple composante de I qui contient cet idempotent, et on montre que I est composée directe de toutes les I_α lorsque α parcourt l'ensemble Ω des partitions de r en suites décroissantes. A chaque I_α correspond classiquement une représentation irréductible $\underline{C}_\alpha$ de $\mathfrak{S}_r$ dans l'espace V_α (idéal minimal de I_α). Si on restraint $\underline{C}_\alpha$ au groupe alterné $\mathfrak{A}_r$, ou bien la représentation reste irréductible, ou bien V_α se décompose en somme directe $V_\alpha^+ \oplus V_\alpha^-$ de deux sous-espaces stables par $\mathfrak{A}_r$, dans chacun desquels la restriction de $\underline{C}_\alpha$ à $\mathfrak{A}_r$ donne une représentation irréductible, ces deux représentations $\underline{C}_\alpha^+$ et $\underline{C}_\alpha^-$ étant inéquivalentes ; en outre, si $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ est une permutation impaire, $\underline{C}_\alpha(\sigma)$ permute V_α^+ et V_α^-. On prouve que les α pour lesquels se produit cette décomposition sont exactement ceux qui correspondent à un tableau d'Young symétrique par rapport à la diagonale ; on note Ω_o (ou $\Omega_o(r)$) l'ensemble de ces partitions.

Si χ_α^+ et χ_α^- sont les caractères de $\underline{C}_\alpha^+$ et $\underline{C}_\alpha^-$ pour $\alpha \in \Omega_o$, on a

$$\chi_\alpha^-(\sigma) = \chi_\alpha^+(\xi\sigma\xi^{-1}) \qquad ,$$

où $\xi \in \mathfrak{S}_r$ est une permutation impaire ; χ_α^+ et χ_α^- ne peuvent donc être distincts que sur les classes d'éléments conjugués de $\mathfrak{A}_r$ qui ne sont pas des classes d'éléments conjugués de $\mathfrak{S}_r$. Une telle classe s'obtient en partant d'une classe $\mathfrak{F}_\delta$ d'éléments conjugués dans $\mathfrak{S}_r$, contenue dans $\mathfrak{A}_r$, et qui se décompose en deux classes $\mathfrak{F}_\delta^+$ et $\mathfrak{F}_\delta^-$ d'éléments conjugués dans $\mathfrak{A}_r$. Ici l'indice est un élément $\delta \in \Omega$, où les nombres δ_i sont les longueurs des cycles en lesquels se décomposent les permutations de $\mathfrak{F}_\delta$. On montre facilement que $\mathfrak{F}_\delta$ se décompose en $\mathfrak{F}_\delta^+$ et $\mathfrak{F}_\delta^-$ si et seulement si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{F}_\delta$, le centralisateur $\mathcal{B}(\sigma)$ de σ dans $\mathfrak{S}_r$ est contenu dans $\mathfrak{A}_r$; une autre condition équivalente est que, dans $\delta = (\delta_1 , \dots , \delta_k)$, les δ_k soient impairs et tous distincts. On note Δ (ou $\Delta(r)$) l'ensemble de ces partitions.

La condition $\mathcal{B}(\sigma) \subset \mathfrak{A}_r$ peut s'interpréter encore autrement dans l'algèbre I ; considérons l'élément

$$h^\sigma = r!^{-1} \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_r} \varepsilon_\rho . \rho\sigma\rho^{-1} \qquad . \tag{3}$$

La condition $\mathcal{B}(\sigma) \subset \mathfrak{A}_r$ équivaut à $h^\sigma \neq 0$; s'il en est ainsi (de sorte que $\sigma \in \mathfrak{F}_\delta$), h^σ est proportionnel à l'élément suivant, ne dépendant que de δ ,

$$h_\delta = \sum_{\rho\in\mathfrak{F}_\delta^+} \rho - \sum_{\tau\in\mathfrak{F}_\delta^-} \tau \qquad . \tag{4}$$

(Car tous les h^ρ sont égaux à h^σ et les h^τ à $- h^\sigma$.)

Les éléments h_δ sont trivialement linéairement indépendants, et forment une base de l'image H (ou H_r) de I par le projecteur

$$f \rightsquigarrow \Gamma(f) = r!^{-1} \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_r} \varepsilon_\rho . \rho f\rho^{-1} \qquad ;$$

ce sous-espace H peut être caractérisé comme formé des éléments de I qui

<u>commutent avec les permutations paires et anticommutent avec les permutations impaires</u> ; d'après ce qui précède, sa dimension est donc égale au nombre de partitions de r en entiers impairs distincts. Or, on a une seconde base "naturelle" de H. Pour cela, identifions une fonction f sur $\mathfrak{S}_r$ à l'élément $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} f(\sigma).\sigma$ de I. Notons que $\chi_\alpha^+ + \chi_\alpha^-$ s'identifie au caractère de $\underline{C}_\alpha$ pour $\alpha \in \Omega_0$ en prolongeant χ_α^+ et χ_α^- par 0 pour les permutations impaires ξ : en effet, la définition de $\underline{C}_\alpha$ montre que $\underline{C}_\alpha(\xi)$ a une trace nulle pour ξ impaire. On sait que le caractère de $\underline{C}_\alpha$ est, à un scalaire près, l'élément unité e_α de l'algèbre simple I_α ; on a donc $e_\alpha = c(\chi_\alpha^+ + \chi_\alpha^-)$, et comme $\chi_\alpha^+ . \chi_\alpha^- = 0$ dans l'algèbre du groupe $\mathfrak{A}_r$, et a fortiori dans I , on a

$$\chi_\alpha^+ = c^{-1} e_\alpha . \chi_\alpha^+ \in I_\alpha \quad \text{et} \quad \chi_\alpha^- = c^{-1} e_\alpha . \chi_\alpha^- \in I_\alpha \quad .$$

A fortiori, on a

$$h_\alpha^0 = \chi_\alpha^+ - \chi_\alpha^- \in I_\alpha \quad .$$

Notons maintenant que, les caractères χ_α^+ et χ_α^- étant des éléments centraux de l'algèbre de $\mathfrak{A}_r$, h_α^0 appartient à H . Or :

LEMME 1.— <u>On a</u> $H \cap I_\alpha = 0$ <u>pour</u> $\alpha \notin \Omega_0$, <u>et</u> $\dim(H \cap I_\alpha) = 1$ <u>pour</u> $\alpha \in \Omega_0$, <u>et</u> H <u>est somme directe des</u> $H \cap I_\alpha$.

En effet, par définition de Γ , on a $\Gamma(I_\alpha) \subset I_\alpha$, donc $H \cap I_\alpha = \Gamma(I_\alpha)$ et $H = \bigoplus_\alpha (H \cap I_\alpha)$, donc $\underline{C}_\alpha(H)$ est isomorphe à $H \cap I_\alpha$. Pour $\alpha \notin \Omega_0$, une matrice $\underline{U}$ de $\underline{C}_\alpha(H)$ doit par définition commuter avec l'image par $\underline{C}_\alpha$ de $\mathfrak{A}_r$, qui est aussi l'image de $\mathfrak{S}_r$, donc $\underline{U}$ est une matrice scalaire, et ne peut anticommuter avec les $\underline{C}_\alpha(\xi)$ pour ξ impaire que si elle est nulle. De même pour $\alpha \in \Omega_0$, $\underline{U}$ doit commuter avec les $\underline{C}_\alpha(\sigma)$ pour σ paire, anticommuter avec $\underline{C}(\sigma)$ pour σ impaire ; on en déduit aussitôt que $\underline{U}$ laisse stables V_α^+ et V_α^- et est une matrice scalaire sur chacun d'eux ; en outre, les diagonales doivent être opposées, donc les $\underline{U}$ vérifiant cette condition forment un espace vectoriel de dimension 1 .

Ceci prouve que h_α^0 est une base de $H \cap I_\alpha$ pour $\alpha \in \Omega_0$, et les h_α^0 forment une base de H lorsque α parcourt Ω_0 . Le théorème général de Frobenius affirme que <u>pour tout</u> $\alpha \in \Omega_0$, h_α^0 <u>et</u> h_δ <u>sont proportionnels, pourvu qu'on prenne pour</u> $\delta = \delta(\alpha)$ <u>la partition définie par</u> $\delta_j = 2(\alpha_j - j) + 1$ [2].

Le seul cas du théorème de Frobenius que l'on considère ici est le cas où $r = 2s - 1$ est <u>impair</u> et où on prend pour α la partition $\gamma = (s , 1 , \ldots , 1)$.

Le théorème équivaut alors à l'assertion suivante :

C : si λ est la permutation circulaire $(1\ 2\ \dots\ r)$, on a $h^\lambda \in I_\gamma$.

2. Preuve de (B) $\Longrightarrow$ (A).

LEMME 2. - Soient $\underline{A}_i$ $(1 \leq i \leq m)$ des matrices carrées de même ordre sur un anneau commutatif. Alors, si m est pair, on a

$$\mathrm{Tr}[\underline{A}_1\ \underline{A}_2\ \dots\ \underline{A}_m] = 0 \tag{5}$$

et si m est impair

$$\mathrm{Tr}[\underline{A}_1\ \underline{A}_2\ \dots\ \underline{A}_m] = m.\mathrm{Tr}(\underline{A}_m[\underline{A}_1\ \underline{A}_2\ \dots\ \underline{A}_{m-1}]) \tag{6}$$

Soit $\mathfrak{C}$ le sous-groupe cyclique de $\mathfrak{S}_m$ engendré par la permutation circulaire $\lambda = (1\ 2\ \dots\ m)$, et soit $\mathfrak{D}$ le sous-groupe des permutations laissant fixe m, de sorte que toute permutation de $\mathfrak{S}_m$ s'écrit $\sigma\tau$ avec $\sigma \in \mathfrak{D}$, $\tau \in \mathfrak{C}$, de façon unique. On a alors

$$\mathrm{Tr}[\underline{A}_1\ \underline{A}_2\ \dots\ \underline{A}_m] = \sum_{\sigma\in\mathfrak{D}} \varepsilon_\sigma \sum_{\tau\in\mathfrak{C}} \varepsilon_\tau \mathrm{Tr}(\underline{A}_{\sigma\tau(1)}\ \underline{A}_{\sigma\tau(2)}\ \dots\ \underline{A}_{\sigma\tau(m)}) .$$

Mais la trace étant invariante par permutation circulaire, et le cycle λ étant une permutation impaire si m est pair et paire si m est impair, on obtient

$$\sum_{\tau\in\mathfrak{C}} \varepsilon_\tau \mathrm{Tr}(\underline{A}_{\sigma\tau(1)}\ \dots\ \underline{A}_{\sigma\tau(m)}) = 0$$

lorsque m est pair, et

$$\sum_{\tau\in\mathfrak{C}} \varepsilon_\tau \mathrm{Tr}(\underline{A}_{\sigma\tau(1)}\ \dots\ \underline{A}_{\sigma\tau(m)}) = m.\mathrm{Tr}(\underline{A}_{\sigma(1)}\ \underline{A}_{\sigma(2)}\ \dots\ \underline{A}_{\sigma(m)})$$

si m est impair, d'où (6) en tenant compte de ce que $\sigma(m) = m$.

Cela étant, la démonstration de (B) $\Longrightarrow$ (A) repose sur le théorème de fonctorialité des éléments primitifs (KOSZUL-SAMELSON [5]) : si $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sont deux algèbres de Lie réductives sur un corps de caractéristique 0, et $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorphisme, alors $\varphi^* : J^*(\mathfrak{h}) \to J^*(\mathfrak{g})$ applique $P^*(\mathfrak{h})$ dans $P^*(\mathfrak{g})$.

Pour démontrer (A), on peut se borner au cas où l'anneau de base est le corps des nombres complexes, la formule étant vraie pour toutes les matrices si elle l'est pour les unités matricielles. Appliquons alors la propriété précédente au cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \underset{\sim}{C})$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n+1, \underset{\sim}{C})$, et à l'injection naturelle $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$; l'image par φ^* de l'élément primitif b_{2n+1} de $P^*(\mathfrak{h})$ est un élément primitif de $P^*(\mathfrak{g})$ de degré $2n+1$, donc est 0, et la formule de Dynkin (2) donne

$$\operatorname{Tr}[\underline{A}_1 \underline{A}_2 \cdots \underline{A}_{2n+1}] = 0$$

quelles que soient les matrices $\underline{A}_i$ d'ordre n ; la conclusion résulte alors aussitôt de (6).

On voit aisément qu'il n'y a pas d'identité multilinéaire de degré $< 2n$ satisfaite par les matrices d'ordre n. Par contre, la même méthode que ci-dessus appliquée aux matrices symétriques gauches d'ordre $n = 2m$ (et utilisant la connaissance des éléments primitifs de $\mathfrak{sp}(2m, \underset{\sim}{C})$, donne pour ces matrices, l'identité nouvelle

$$[\underline{A}_1 \underline{A}_2 \cdots \underline{A}_{4m-2}] = 0 \quad .$$

3. Preuve de (C) $\Longleftrightarrow$ (A).

Tout le reste du travail de KOSTANT repose sur la théorie classique de Schur liant les représentations linéaires du groupe symétrique à celles du groupe linéaire [2], [6]. Si E est un espace vectoriel complexe de dimension n, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$ opère sur l'espace tensoriel $E^{\otimes r}$ par

$$\underline{B}(\sigma).x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes x_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(r)} \tag{7}$$

et le I-module $E^{\otimes r}$ ainsi défini se décompose en somme directe des

$$I_\alpha . E^{\otimes r} = \underline{B}(e_\alpha)\, E^{\otimes r} = E_\alpha \quad ,$$

dont certains peuvent être nuls. On montre [6] que si $\ell(\alpha)$ est le nombre de lignes du tableau d'Young correspondant à la partition α (autrement dit le nombre d'éléments de la partition), la condition $E_\alpha \neq 0$ équivaut à $\ell(\alpha) \leqslant n$. Avec les notations de la fin du n° 1, l'énoncé de (C) est équivalent au suivant :

C' : Soit $r = 2s - 1$; on a

$$(8) \qquad \underline{B}(h^\lambda) = \underline{B}\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma . \sigma\lambda\sigma^{-1}\Big) = 0$$

si et seulement si $s > n$.

On a

$$\mathrm{End}(E^{\otimes r}) = (\mathfrak{gl}(n, \underset{\sim}{C}))^{\otimes r} \qquad ,$$

et dire que $\underline{B}(h^\lambda)$ est l'endomorphisme 0 dans $E^{\otimes r}$ équivaut à dire que l'on a

$$(9) \qquad \mathrm{Tr}(\underline{B}(h^\lambda) . \underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2 \otimes \dots \otimes \underline{A}_r) = 0$$

quels que soient les $\underline{A}_i \in \mathfrak{gl}(n, \underset{\sim}{C})$. Or on a le lemme suivant, généralisation d'un résultat de Schur :

LEMME 3. - Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_r$,

$$(10) \qquad \mathrm{Tr}(\underline{B}(\sigma) . \underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2 \otimes \dots \otimes \underline{A}_r) = \mathrm{Tr}(\underline{P}_1)\ \mathrm{Tr}(\underline{P}_2) \dots \mathrm{Tr}(\underline{P}_k)$$

où les matrices P_j sont définies comme suit : on décompose σ^{-1} en cycles $\sigma^{-1} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$, et si $\lambda_j = (i_1\ i_2\ \dots\ i_h)$,

$$\underline{P}_j = \underline{A}_{i_1} \underline{A}_{i_2} \dots \underline{A}_{i_h} \qquad .$$

La démonstration est un exercice d'algèbre linéaire ; il suffit de prouver (10) pour $\underline{A}_i = x_i \otimes x_i^*$, où $x_i \in E$, $x_i^* \in E^*$, et de noter que si $(a_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base de E, $(a_j^*)_{1\leq j\leq n}$ la base duale, et $\underline{C} = (\underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2 \otimes \dots \otimes \underline{A}_r) . \underline{B}(\sigma)$, on a

$$\langle \underline{C}(a_{j_1} \otimes \dots \otimes a_{j_r}) , a_{j_1}^* \otimes \dots \otimes a_{j_r}^* \rangle = \prod_{i=1}^{r} \langle x_i , a_{j_i}^* \rangle \langle a_{j_i} , x_{\sigma(i)}^* \rangle \qquad .$$

Appliquant ceci au cas où $\sigma = \tau\lambda^{-1}\tau^{-1}$, il vient

$$\mathrm{Tr}(\underline{B}(\tau\lambda^{-1}\tau^{-1}) . \underline{A}_1 \otimes \dots \otimes \underline{A}_r) = \mathrm{Tr}(\underline{A}_{\tau(1)} \underline{A}_{\tau(2)} \dots \underline{A}_{\tau(r)})$$

et comme λ et λ^{-1} sont conjuguées,

$$\operatorname{Tr}(\underline{B}(h^{\lambda}).\underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2 \otimes \ldots \otimes \underline{A}_r) = \operatorname{Tr}[\underline{A}_1\, \underline{A}_2 \ldots \underline{A}_r] \quad . \tag{11}$$

Cela étant, (C') entraîne que, si on prend $s = n + 1$, donc $r = 2n + 1$, le second membre de (11) est nul, d'où (1) en vertu du lemme 2. Inversement, (1) implique aussi $[\underline{A}_1\, \underline{A}_2 \ldots \underline{A}_t] = 0$ pour $t > 2n$, donc le premier membre de (11) est nul pour tout $r = 2s - 1$ avec $s > n$, et au contraire ne l'est pas pour $s = n$, ce qui prouve (C').

4. Preuve de (C) $\Longrightarrow$ (B).

Il s'agit de la partie la plus intéressante du mémoire, qui introduit une interprétation de l'homologie et de la cohomologie de $g = gl(n, \underset{\sim}{C})$ au moyen des opérateurs de symétrisation $\underline{B}(h_\beta)$. Partons de l'isomorphisme canonique de l'espace $C_r(g) = \bigwedge^r g$, puissance extérieure r-ième de g, sur le sous-espace $g_{\omega(r)}$ de $g^{\otimes r}$, formé des tenseurs antisymétriques, isomorphisme défini par

$$\eta_r(\underline{A}_1 \wedge \underline{A}_2 \wedge \ldots \wedge \underline{A}_r) = (r!)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma . \underline{A}_{\sigma(1)} \otimes \underline{A}_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes \underline{A}_{\sigma(r)} \quad . \tag{12}$$

Considérons maintenant la représentation adjointe ρ de $G = \underset{\sim}{GL}(n, \underset{\sim}{C})$ dans son algèbre de Lie g, donnée ici par $\operatorname{Ad}(\underline{V}).\underline{A} = \underline{VAV}^{-1}$. On en déduit canoniquement une représentation linéaire ρ_r de G dans $g^{\otimes r}$,

$$\begin{aligned}\rho_r(\underline{V}) : \underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2 \otimes \ldots \otimes \underline{A}_r &\longrightarrow (\underline{VA}_1\, \underline{V}^{-1}) \otimes \ldots \otimes (\underline{VA}_r\, \underline{V}^{-1}) \\ &= \underline{V}^{\otimes r}(\underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2 \otimes \ldots \otimes \underline{A}_r)(\underline{V}^{-1})^{\otimes r} \quad .\end{aligned}$$

En outre, la représentation linéaire de g dans $g^{\otimes r}$ dérivée de ρ_r n'est autre que la puissance tensorielle r-ième de la représentation adjointe ; elle laisse évidemment stable le sous-espace $g_{\omega(r)}$, et sa restriction à ce sous-espace s'identifie par l'isomorphisme (12) à la représentation θ_r obtenue par extension de la représentation adjointe à $C_r(g)$. Le sous-espace $J_r(g)$ des "chaînes invariantes" s'identifie donc au sous-espace de $g_{\omega(r)}$ formé des tenseurs antisymétriques invariants par ρ_r, ou encore des éléments de $g_{\omega(r)}$ qui commutent à toutes les matrices $\underline{V}^{\otimes r}$. Or, le théorème de commutation de I. SCHUR [6] affirme que les éléments de $g^{\otimes r}$ (identifié à $\operatorname{End}(E^{\otimes r})$, donc à l'anneau des matrices d'ordre n^r) qui commutent à toutes les $\underline{V}^{\otimes r}$ sont exactement les opérateurs $\underline{B}(t)$ où t parcourt l'algèbre I_r du groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$; $J_r(\mathfrak{g})$ est donc identifié à $\mathfrak{g}_{\omega(r)} \cap \underline{B}(I_r)$. Mais $\mathfrak{g}_{\omega(r)}$ est défini comme le sous-espace de $\mathfrak{g}^{\otimes r}$ commutant aux $\underline{B}(\sigma)$ pour σ paire et anticommutant aux $\underline{B}(\sigma)$ pour σ impaire ; si on se reporte à la définition du sous-espace H_r de I_r (n° 1), on obtient

$$\mathfrak{g}_{\omega(r)} \cap \underline{B}(I_r) = \underline{B}(H_r) \quad .$$

Pour avoir une interprétation analogue de $J^r(\mathfrak{g})$, on introduit sur $\mathfrak{g}$ la forme bilinéaire symétrique invariante correspondant à la représentation linéaire identique de cette algèbre de Lie, soit

$$(\underline{A}_1 | \underline{A}_2) = \mathrm{Tr}(\underline{A}_1\ \underline{A}_2) \tag{13}$$

qui est non dégénérée ; on l'étend canoniquement à $\mathfrak{g}^{\otimes r}$ et l'opérateur d'antisymétrisation est alors le projecteur orthogonal de $\mathfrak{g}^{\otimes r}$ sur $\mathfrak{g}_{\omega(r)}$, ce qui montre que $\mathfrak{g}_{\omega(r)}$ est un sous-espace non isotrope ; ceci permet d'identifier $\mathfrak{g}_{\omega(r)}$ à son dual, et de définir par transposition $\eta^r : \mathfrak{g}_{\omega(r)} \to C^r(\mathfrak{g})$:

$$\langle \eta^r(\underline{U})\ ,\ u \rangle = (\underline{U} | \eta_r(u)) \quad \text{pour} \quad \underline{U} \in \mathfrak{g}_{\omega(r)} \quad \text{et} \quad u \in C_r(\mathfrak{g}) \quad . \tag{14}$$

L'application η^1 est associée à (13) et si l'on pose $\eta^1(A_i) = a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, η^r transforme l'antisymétrisé de $\underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2 \otimes \cdots \otimes \underline{A}_r$ en $(r!)^{-1}\ a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r$. A l'aide de l'isomorphisme η^r , on identifie cette fois la restriction de ρ_r à $\mathfrak{g}_{\omega(r)}$ à la représentation obtenue par extension à $C^r(\mathfrak{g})$ de la représentation adjointe, et le même raisonnement que ci-dessus identifie cette fois $J^r(\mathfrak{g})$ à $\underline{B}(H_r)$ au moyen de η^r . On a donc démontré la première partie du

THÉORÈME.

(i) Les restrictions ψ_r de η_r à $J_r(\mathfrak{g})$ et ψ^r de η^r à $\underline{B}(H_r)$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$\psi_r : J_r(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \underline{B}(H_r) \ , \qquad \psi^r : \underline{B}(H_r) \xrightarrow{\sim} J^r(\mathfrak{g}) \quad .$$

(ii) Supposons que $r = 2p - 1$, $p > 1$, et soit γ la partition $(p, 1, 1, \ldots, 1)$ de r ; alors $b_r = \psi^r(\underline{B}(h_\gamma^o))$ appartient à $P^r(\mathfrak{g})$ et

<u>est</u> $\neq 0$ <u>si</u> $p \leq n$.

(iii) <u>Soit</u> $r = p + q$, <u>et soient</u> $\delta_1 \in \Delta(p)$, $\delta_2 \in \Delta(q)$; <u>posons</u>

$$\psi^p(\underline{B}(h_{\delta_1})) = u_p \in J^p(\mathfrak{g}) \; , \qquad \psi^q(\underline{B}(h_{\delta_2})) = u_q \in J^q(\mathfrak{g}) \qquad ,$$

<u>et soient</u> $v_p \in J_p(\mathfrak{g})$, $v_q \in J_q(\mathfrak{g})$ <u>tels que</u> $\psi_p(v_p) = \underline{B}(h_{\delta_1})$, $\psi_q(v_q) = \underline{B}(h_{\delta_2})$. <u>En juxtaposant les partitions</u> δ_1 <u>de</u> p <u>et</u> δ_2 <u>de</u> q <u>on obtient une partition</u> δ <u>de</u> r. <u>Si</u> $\delta \notin \Delta(r)$, <u>on a</u> $u_p \wedge u_q = 0$ <u>et</u> $v_p \wedge v_q = 0$. <u>Si au contraire</u> $\delta \in \Delta(r)$, <u>on a</u>

$$(15) \qquad \begin{cases} \psi^r(\underline{B}(h_\delta)) = c \cdot u_p \wedge u_q \\ \psi_r(v_p \wedge v_q) = c' \, \underline{B}(h_\delta) \end{cases}$$

<u>où</u> c <u>et</u> c' <u>sont des constantes</u> $\neq 0$.

La fin de la démonstration sera donnée au n° 5. Montrons ici comment : 1° la partie (ii) du théorème permet de prouver que (C) $\Longrightarrow$ (B) ; 2° les parties (ii) et (iii) permettent de prouver (C) (et par suite aussi (A) et (B)).

1° Rappelons que l'assertion (C) signifie que h^o_γ est <u>proportionnel à</u> h^λ (notations du n° 1) ; il résulte donc de (ii) et de (C) que b_r est proportionnel à $\psi^r(\underline{B}(h^\lambda))$; en vertu de (14), (13), (12) et du lemme 3, on a pour $r = 2p - 1$ et $p \leq n$,

$$\langle b_r \, , \underline{A}_1 \wedge \underline{A}_2 \wedge \dots \wedge \underline{A}_r \rangle = c \cdot \mathrm{Tr}[\underline{A}_1 \, \underline{A}_2 \dots \underline{A}_r]$$

où c est une constante ; ce n'est autre que la formule (2).

2° Supposons toujours $r = 2p - 1$, $p \leq n$; si $\delta \neq \delta(\gamma)$, δ peut se décomposer en deux partitions de r' et r'' tels que $r' + r'' = r$; il résulte donc de (iii) que l'élément $v_r \in J_r(\mathfrak{g})$, tel que $\underline{B}(h_\delta) = v_r$, est de la forme $v_{r'} \wedge v_{r''}$, avec $v_{r'} \in J_{r'}(\mathfrak{g})$, $v_{r''} \in J_{r''}(\mathfrak{g})$. Les éléments primitifs de $J^r(\mathfrak{g})$ étant orthogonaux aux éléments décomposables de $J_r(\mathfrak{g})$ par définition, il résulte de (ii) et de (14) que l'on a $(\underline{B}(h^o_\gamma) \,|\, \underline{B}(h_\delta)) = 0$ pour tout $\delta \neq \delta(\gamma)$ dans $\Delta(r)$. D'autre part, le fait que deux idéaux bilatères minimaux distincts s'annulent dans l'algèbre d'un groupe entraîne que $h^o_\alpha \, h^o_{\alpha'} = 0$ si $\alpha \neq \alpha'$, $(h^o_\alpha)^2 = c \cdot e_\alpha$

dans I (α , α' dans $\Omega_o(r)$, c scalaire $\neq 0$) ; comme $h_\delta \in H$ et que les h_α^o , pour $\alpha \in \Omega_o(r)$, forment une base de H , on peut écrire $h_\delta = \sum_\alpha a_\alpha h_\alpha^o$ et par suite $h_\delta h_\gamma^o = ca_\gamma e_\gamma$. Mais comme $\underline{B}$ est une représentation, on a

$$\mathrm{Tr}(\underline{B}(h_\delta h_\gamma^o)) = \mathrm{Tr}(\underline{B}(h_\delta)\,\underline{B}(h_\gamma^o)) = (\underline{B}(h_\delta)\,|\,\underline{B}(h_\gamma^o)) = 0$$

et comme $\underline{B}(e_\gamma)$ est un projecteur $\neq 0$, car $\ell(\gamma) = p \leqslant n$, $\mathrm{Tr}(\underline{B}(e_\gamma)) \neq 0$, d'où finalement $a_\gamma = 0$ et $h_\lambda h_\gamma^o = 0$ dans I pour $\delta \neq \delta(\gamma)$. Si

$$(f|g) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} f(\sigma)\,\overline{g(\sigma)}$$

est le produit scalaire usuel dans I , on a par suite $(h_\delta|h_\gamma^o) = 0$, car

$$h_\gamma^o(\sigma^{-1}) = \overline{h_\delta^o(\sigma)}$$

puisque h_γ^o est combinaison linéaire à coefficient réels de caractères de $\mathfrak{A}_r$, et $(h_\delta|h_\gamma^o)$ est la valeur en l'élément neutre de $\mathfrak{S}_r$ du produit $h_\delta h_\gamma^o$ dans I . Rappelons d'autre part que les h_δ pour $\delta \in \Delta(r)$ forment une base de H , orthogonale pour le produit scalaire $(f|g)$ puisque deux h_δ d'indices différents ne sont jamais $\neq 0$ simultanément dans $\mathfrak{S}_r$ (formule (4)). Ecrivant $h_\gamma^o = \sum_\delta c_\delta h_\delta$, il vient donc $c_\delta = 0$ pour $\delta \neq \delta(\gamma)$, ce qui achève de prouver (C).

5. Preuve des parties (ii) et (iii) du théorème.

La démonstration de (iii) est conséquence facile de la formule du "shuffle"

$$(16)\qquad \langle u_p \wedge u_q\, , \underline{A}_1 \wedge \underline{A}_2 \wedge \dots \wedge \underline{A}_r\rangle = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \langle u_p\, , \underline{A}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \underline{A}_{\sigma(p)}\rangle \cdot \langle u_q\, , \underline{A}_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge \underline{A}_{\sigma(r)}\rangle \quad ,$$

σ parcourant les permutations de $\mathfrak{S}_r$ qui respectent l'ordre des intervalles $[1 , p]$ et $[p + 1 , r]$. Utilisant (12), (13), (14) et (16), on voit par un calcul élémentaire que si on pose $u_\sigma = \psi^p(\underline{B}(h^\sigma))$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, $u_\tau = \psi^p(\underline{B}(h^\tau))$ pour $\tau \in \mathfrak{S}_q$, on a $u_\sigma \wedge u_\tau = \psi^r(\underline{B}(h^{\hat\sigma\hat\tau}))$ où $\hat\sigma$ et $\hat\tau$ sont les images canoniques de σ et τ dans $\mathfrak{S}_r$, $\hat\sigma$ permutant les nombres de 1 à p et $\hat\tau$ de p + 1 à r . Ceci prouve la première formule (15) et on démontre de même la seconde.

Pour prouver (ii), on s'appuie sur le critère de primitivité suivant :

LEMME 4. - *Soient* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *deux algèbres de Lie réductives sur un corps de* caractéristique 0, $\varphi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ un homomorphisme, $\varphi^i : J^i(\mathfrak{a}) \to J^i(\mathfrak{b})$ et $\varphi_i : J_i(\mathfrak{b}) \to J_i(\mathfrak{a})$ les homomorphismes correspondants. Supposons que φ^i soit injectif pour $0 \leqslant i \leqslant k - 1$. Alors les éléments de $\mathrm{Ker}(\varphi^k)$ sont primitifs.

En effet, φ_i, transposé de φ^i, est surjectif pour $0 \leqslant i \leqslant k - 1$, donc si $u_i \in J_i(\mathfrak{a})$, $u_j \in J_j(\mathfrak{a})$, $i + j = k$, il y a $u'_i \in J_i(\mathfrak{b})$, $u'_j \in J_j(\mathfrak{b})$ tels que $\varphi_i(u'_i) = u_i$, $\varphi_j(u'_j) = u_j$, d'où pour $b_k \in \mathrm{Ker}(\varphi^k)$,

$$\langle u_i \wedge u_j , b_k \rangle = \langle \varphi_k(u'_i \wedge u'_j) , b_k \rangle = \langle u'_i \wedge u'_j , \varphi^k(b_k) \rangle = 0 \quad .$$

C. Q. F. D.

On applique ce lemme comme suit : soit E' un sous-espace de E de dimension $p - 1$; $E'^{\otimes r}$ s'identifie à un sous-espace de $E^{\otimes r}$, et la restriction de $\underline{B}(I)$ à $E'^{\otimes r}$ est l'ensemble $\underline{B}'(I)$ des opérateurs de symétrisation définis de la même façon. Si $\mathfrak{g}' = \mathfrak{gl}(p - 1 , \underset{\sim}{C})$ et si $\varphi : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ est l'injection canonique on vérifie aussitôt que pour tout $f \in H_r$, on a

$$\varphi^r(\psi^r(\underline{B}(f))) = \psi'^r(\underline{B}'(f)) \tag{17}$$

(cela ne suppose aucune relation entre r et p). Soit maintenant $r = 2p - 1$. Comme $\ell(\gamma) = p > p - 1 = \dim(E')$, on a $\underline{B}'(I_\gamma).E'^{\otimes r} = E'_\gamma = 0$ et par définition $\underline{B}'(h^0_\gamma) = 0$, d'où, par (17), $\varphi^r(b_r) = 0$. D'autre part, si $s < r$ et si $\beta \in \Omega_0(s)$, on a $\ell(\beta) < p$. On a donc $E'_\beta \neq 0$ pour $s < r$, et comme $\underline{B}'$ est alors injectif dans l'idéal bilatère $I_\beta \subset I_s$, on a $\underline{B}'(h^0_\beta) \neq 0$; compte tenu de (17), cela entraîne $\varphi^s(\psi^s(\underline{B}(h^0_\beta))) \neq 0$. Comme, pour $s < r$, les h^0_β forment une base de H_s, cela prouve que $\varphi^s : J^s(\mathfrak{g}) \to J^s(\mathfrak{g}')$ est injectif pour $s < r$; le lemme 4 montre alors que $b_r \in P^r(\mathfrak{g})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMITSUR (A. S.) and LEVITZKI (J.). - Minimal identities for algebras, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 449-463.

[2] BOERNER (Hermann). - Darstellungen von Gruppen. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1955 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 74).

[3] DYNKIN (E. B.). - Topological characteristics of homomorphisms of compact Lie groups, Mat. Sbornik, Nouvelle Série, t. 35 (77), 1954, p. 129-173.

[4] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1956 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 37).

[5] KOSZUL (Jean-Louis). - Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 65-127 (Thèse Sc. math. Paris. 1949).

[6] WEYL (Hermann). - The classical groups. - Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series, 1).