HERVÉ JACQUET

# Mémoire de Langlands sur la dimension des espaces de formes automorphes

*Séminaire N. Bourbaki*, 1964, exp. nº 261, p. 259-273

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__259_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 261 Décembre 1963

# MÉMOIRE DE LANGLANDS
# SUR LA DIMENSION DES ESPACES DE FORMES AUTOMORPHES

par Hervé JACQUET

La formule des traces de Selberg ramène le calcul de la dimension des espaces de formes automorphes à l'évaluation de certaines intégrales, du moins lorsqu'il y a un domaine fondamental compact [2]. Ces intégrales sont calculées par LANGLANDS [13].

## 1. Domaines symétriques bornés et fonctions noyaux.

Soit $\overline{G}$ la composante neutre du groupe des transformations conformes d'un domaine symétrique borné. On sait que $\overline{G}$ est semi-simple avec un centre trivial, et que tout sous-groupe compact maximal d'une composante simple a un centre non discret. Réciproquement si $\overline{G}$ est un groupe connexe semi-simple possédant ces propriétés, c'est la composante neutre du groupe des transformations conformes d'un domaine symétrique borné que l'on peut construire comme suit. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\overline{G}$, $\mathfrak{g}_c$ sa complexification, $G_c$ le groupe de Lie complexe simplement connexe d'algèbre $\mathfrak{g}_c$ et enfin $G$ le sous-groupe réel connexe d'algèbre $\mathfrak{g}$. Donnons-nous une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, l'involution de Cartan $\theta$ correspondante. Soient $\mathfrak{k}_c$ et $\mathfrak{p}_c$ les complexifications de $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$.

Pour toute racine $\alpha$ de $\mathfrak{g}_c$ par rapport à $\mathfrak{h}$, on a soit $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}_c$ (on dit alors que $\alpha$ est compacte), soit $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}_c$. Il est possible d'ordonner les racines de telle manière que $\mathfrak{p}_c = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$, $\mathfrak{p}_+$ désignant la somme des espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ où $\alpha$ parcourt les racines positives non compactes. On a alors

$$\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_c \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$$

$$[\mathfrak{p}_+ , \mathfrak{p}_+] = 0 , \qquad [\mathfrak{k}_c , \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{p}_+ , \qquad [\mathfrak{p}_- , \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{k}_c$$

etc. Désignons par $P_+$, $P_-$, $K_c$, $K$ les sous-groupes connexes de $G_c$ d'algèbres $\mathfrak{p}_+$, $\mathfrak{p}_-$, $\mathfrak{k}_c$, $\mathfrak{k}$. On sait que $GK_c P_-$ est un ouvert de $P_+ K_c P_-$, lequel est lui-même ouvert dans $G_c$. Comme $G \cap K_c P_- = K$ et $P_+ \cap K_c P_- = \{1\}$, on voit que $G/K \simeq GK_c P_-/K_c P_-$ s'identifie à un ouvert $B$ de $P_+ K_c P^-/K_c P^- \simeq P_+$. L'exponentielle définit une bijection de $\mathfrak{p}_+$ sur $P_+$ ; donc $P_+$ est muni d'une structure d'espace vectoriel complexe et $B$ est dans $P^+$ un domaine symétrique borné. Enfin $G$ opère dans $G/K \cong B$ par des transformations conformes. Si $Z$ désigne le centre (fini) de $G$, on sait que $Z$ est contenu dans le compact maximal $K$ et $\overline{G} = G/Z$ est exactement la composante neutre du groupe des transformations conformes de $B$.

Soient $\sigma$ une représentation unitaire irréductible de $K_c$ dans un espace hilbertien $F$ de dimension finie $d$. Pour tout $p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, $\mathcal{H}^p(\sigma)$ désigne l'espace des applications holomorphes $\varphi$ de $W = P_- K_c G$ dans $F$ satisfaisant

$$\varphi(pkg) = \sigma(k)\ \varphi(g) \tag{1}$$

dont la restriction à $G$ est une fonction de puissance $p$-ième intégrable.

D'après (1) ces fonctions sont bien déterminées par leur restriction à $G$. Ainsi $\mathcal{H}^2(\sigma)$ s'interprète comme sous-espace <u>fermé</u> de $L^2(G) \otimes F$. Ce sous-espace admet une fonction noyau $K_\sigma$ application de $W \times W$ dans $\mathcal{L}(F)$ caractérisée par les propriétés suivantes :

(i) $x \to K_\sigma(x\ ,\ y)$ est holomorphe

(ii) $K_\sigma(x\ ,\ y)^* = K_\sigma(y\ ,\ x)$

(iii) $K_\sigma(pkxg\ ,\ yg) = \sigma(k)\ K_\sigma(x\ ,\ y) \qquad (k \in K_c\ ,\ p \in P_-\ ,\ g \in G)$

(iv) Pour toute $\varphi \in \mathcal{H}^2(\sigma)$, $\varphi(x) = \int_G K_\sigma(x\ ,\ y)\ \varphi(y)\ dy$.

Soient $\mathfrak{k}'_c$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{k}$ et $c$ son centre. On a

$$\mathfrak{k}_c = \mathfrak{k}'_c + c \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_c = \mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c + c \quad .$$

Toute racine compacte $\alpha$ est nulle sur le centre et s'interprète comme racine de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{k}'_c$ par rapport à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c$. Le vecteur de Weyl $H_\alpha$ correspondant est dans $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c$. Au contraire si $\alpha$ est non compacte, $\alpha$ n'est pas nulle sur $c$. Désignons par $\Lambda_\sigma$ le poids dominant de $\sigma$ (i. e. la restriction de $\Lambda_\sigma$ à $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c$ est le poids dominant de la restriction de $\sigma$ à $\mathfrak{k}'_c$) et par $\psi_o$ un vecteur unitaire de $F$ correspondant à ce poids dominant. Pour toute racine positive, $\Lambda_\sigma(H_\beta)$ est un entier positif si $\beta$ est compacte. Si pour toute racine positive non compacte $\Lambda_\sigma(H_\beta) + \rho(H_\beta) < 0$ ($\rho$ désigne la demi-somme des racines positives), l'espace $\mathcal{H}^2(\sigma)$ n'est pas nul ([6], p. 612). Nous ferons désormais cette hypothèse.

Nous allons calculer la fonction $f(g) = (K(g\ ,\ 1)\ \psi_o\ ,\ \psi_o)$. Pour cela on remarque que

(i) $f(ng) = f(g)$ si $n$ est dans le groupe engendré par l'algèbre $\Sigma\, CX_{+\alpha}$ ($\alpha$ parcourant les racines positives compactes).

(ii) $f(pg) = \psi(g)$ , $(p \in P_-)$ .

(iii) $f(\exp Hg) = \exp \Lambda_\sigma(H)\ f(H)$ si $H \in \mathfrak{h}_c$ .

(iv) $f(g \exp H) = \exp(-\Lambda_\sigma(H))\ f(H)$ si $H \in \mathfrak{h}$ .

D'après [5], lesmmes 6 et 14, il n'existe qu'une fonction à un facteur constant près satisfaisant à ces conditions. Pour la calculer introduisons la forme linéaire $\Lambda_o$ sur $\mathfrak{h}_c$ qui coïncide avec $\Lambda_\sigma$ sur $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}_c$ , et est nulle sur les $H_\alpha$ où $\alpha$ est une racine positive non compacte. Cette forme linéaire est donc à valeurs entières positives sur tous les $H_\alpha$ . C'est le poids dominant d'une représentation irréductible $\zeta$ de $G_c$ bien déterminée à une équivalence près. Soit $\Phi_o$ un vecteur unitaire correspondant à $\Lambda_o$ .

D'autre part, soient $g \in G_c$ et $z \in \mathfrak{p}^+$ tels que $g \exp z \in P_+ K_c P_-$ . On a

$$g \exp z = p_+ kp_- \quad (p_+ \in P_+\ ,\ \ k \in K_c\ ,\ \ p_- \in P_-) \qquad .$$

Nous poserons $\mu(g\ , z) = k$ et $p_+ = \exp(g.z)$ . Du reste $g \exp z_1$ est encore dans $P_+ K_c P_-$ pour $z_1$ voisin de $z$ , et l'application $z_1 \to g \circ z_1$ de $\mathfrak{p}_+$ dans $\mathfrak{p}_+$ a pour application linéaire tangente au point $z$ la restriction de $\mathrm{ad}\mu(g\ , z)$ à $\mathfrak{p}_+$ . Finalement $\mu$ est une application holomorphe d'un ouvert de $G \times \mathfrak{p}_+$ dans $K_c$ et vérifie

$$\mu(g_1\ g_2\ , z) = \mu(g_1\ , g_2 . z) \quad \text{et} \quad \mu(k\ , 0) = k \quad (k \in K_c) \qquad .$$

Elle est notamment définie sur $G \times B$ (si on regarde $B$ comme plongé dans $\mathfrak{p}_+$ ). Comme $B$ est simplement connexe, $\mu$ définit une application encore notée $\mu$ de $\tilde{G} \times B$ dans $\tilde{K}_c$ ( $\tilde{G}$ revêtement de $G$ , $\tilde{K}_c$ revêtement de $K_c$ ). Enfin $\tilde{K}_c$ est produit direct d'un groupe compact et d'un groupe abélien $C$ d'algèbre $\mathfrak{c}$ . Nous désignerons par $\pi$ l'application composée de la projection de $\tilde{K}_c$ sur $C$ et du logarithme (en sorte que si $X \in \mathfrak{k}_c$ , $\pi(\exp X)$ n'est autre que le composant de $X$ dans $\mathfrak{c}$ pour la somme directe $\mathfrak{k}_c = \mathfrak{k}'_c \oplus \mathfrak{c}$ ) par $\nu$ la projection de $\tilde{G}$ sur $G$ , et nous poserons pour $g \in \tilde{G}$

$$\Gamma(g) = \pi(\mu^{-1}(g^{-1}\ , 0)) \quad \text{et} \quad \psi(g) = (\zeta(\nu(g))\ \Phi_o\ , \Phi_o)\ \exp \Lambda_\sigma(\Gamma(g))$$

avec $\lambda_\sigma = \Lambda_\sigma - \Lambda_o$ .

Alors

$$f(\nu(g)) = f(1)\ \psi(g) \quad \text{pour tout} \quad g \in \tilde{G} \qquad .$$

Soit $\rho_+$ la demi-somme des racines positives non compactes. Si pour toute racine non compacte $\beta$,

$$\Lambda_\sigma(H_\beta)^* + \rho(H_\beta) + 2\rho_+(H_\beta) < 1$$

la fonction $\psi$ est intégrable ([6], p. 610). Comme $\sigma$ est irréductible, il en est de même de $K(g , 1)$. Il en résulte que, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}^p(\sigma)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, on a encore

$$\varphi(x) = \int_G K(x , y)\ \varphi(y)\ dy \quad .$$

Nous ferons désormais cette hypothèse supplémentaire.

2. Dimensions des espaces de formes automorphes.

Soit $\Gamma$ un sous-groupe discret de $G$ à quotient compact.

L'espace $\mathcal{H}(\Gamma , \sigma)$ des formes automorphes d'espèce $\sigma$ pour $\Gamma$ se définit comme l'espace vectoriel des applications holomorphes :

$$\varphi : \ W = P - K_c\ G \to F$$

vérifiant

$$\varphi(pkg\gamma) = \sigma(k)\ \varphi(g) \qquad (p \in P_- , \ k \in K_c , \ g \in G , \ \gamma \in \Gamma) \quad .$$

Ces applications s'interprètent encore comme des applications de $G$ ou de $G/\Gamma$ dans $F$. Comme $G/\Gamma$ est compact, toutes ces fonctions sont bornées $\mathcal{H}(\Gamma , \sigma)$ est donc un sous-espace de $\mathcal{H}^\infty(\sigma)$ et de $L^2(G/\Gamma , F)$. Il est de dimension finie, donc fermé.

Pour toute $\varphi \in \mathcal{H}(\Gamma , \sigma)$ on a :

$$\varphi(x) = \int_G K(x , y)\ \varphi(y)\ dy \quad .$$

On en conclut que la projection orthogonale $A$ de $L^2(G/\Gamma , F)$ sur le sous-espace fermé $\mathcal{H}(\Gamma , \sigma)$ est donné par

$$(A\varphi)\ x = \int_G K(x , y)\ \varphi(y)\ dy \quad .$$

On a donc $\dim \mathcal{H}(\Gamma , \sigma) = \operatorname{tr} A$. D'après la formule des traces [2], on a le théorème suivant :

THÉORÈME.

$$\dim \mathcal{H}(\Gamma , \sigma) = \sum_\gamma v(G_\gamma/\Gamma_\gamma)\ \chi(\gamma)$$

où

$$\chi(\gamma) = \int_{G/G_\gamma} \mathrm{tr}\{K(g\gamma g^{-1}, 1)\}\, d\dot{g} \quad .$$

La somme est étendue à un ensemble de représentants des classes d'éléments conjugués de $\Gamma$.

Pour $\gamma \in G$, on désigne par $G_\gamma$ le centralisateur de $\gamma$ dans $G$ et, si $\gamma \in \Gamma$, par $\Gamma_\gamma$ le centralisateur de $\gamma$ dans $\Gamma$.

Remarque. - Il est clair que $G/G_\gamma$ admet une mesure G-invariante. Du reste tout élément $\gamma \in \Gamma$ est semi-simple ([1], p. 525), et le centralisateur $G_\gamma$ d'un élément $\gamma$ semi-simple est réductif donc unimodulaire : cela entraîne l'existence d'une mesure invariante $d\dot{g}$ sur $G/G_\gamma$. On impose naturellement que $dg = dg_\gamma\, d\dot{g}$.

D'autre part, pour tout $g \in G$, le déterminant de la restriction de $\mu(g, 0)$ à $p^+$ ne dépend que de la classe de $g$ dans $B = G/K$, d'où une fonction $\Delta(z)$ sur $B$. Choisissons une fois pour toutes une mesure euclidienne $\mu(z)$ sur $p^+$ ; alors $|\Delta(z)|^2 \mu(z) = dz$ est une mesure invariante sur $B$. Nous imposerons à la mesure $dk$ de $K$ d'être de masse $1$, et à $dg$ de vérifier $dg = dk\, dz$.

Calculons $\chi(\gamma)$ $(\gamma \in M)$. D'après les relations d'orthogonalité de Schur

$$\chi(\gamma) = d \int_{G/G_\gamma} \int_K f(kg\gamma g^{-1} k^{-1})\, dk\, d\dot{g} \quad .$$

Soit $\gamma'$ un élément de $\widetilde{G}$ qui se projette sur $\gamma$. L'intégrale précédente s'écrit

$$\begin{aligned} \chi(\gamma) &= df(1) \int_{G/G_\gamma} \int_K \psi(kg\gamma' g^{-1} k^{-1})\, dk\, d\dot{g} \\ &= df(1)[G : G_\gamma^o]^{-1} \int_{G/G_\gamma^o} \int_K \psi(kg\gamma' g^{-1} k^{-1})\, dk\, d\dot{g} \quad . \end{aligned}$$

(On écrit $g\gamma' g^{-1}$ pour $g'\gamma' g'^{-1}$, $g'$ étant un élément de $\widetilde{G}$ qui se projette sur $g$.) On calcule facilement $df(1) = \chi(1)$

$$df(1) = \chi(1) = \frac{(-1)^b}{v(B)} \prod_{\beta\in P} \left(\frac{\Lambda_\sigma(H) + \rho(H_\beta)}{\rho(H_\beta)}\right)$$

$v(B)$ désignant le volume euclidien de $B$ et $b$ la dimension complexe de $B$.

Nous allons calculer $\chi$ par une méthode de prolongement analytique.

Pour toute forme linéaire $\lambda$ de $\mathfrak{h}_c$ nulle sur $\mathfrak{k}'_c \cap \mathfrak{h}_c$, posons

$$d_\lambda = \frac{(-1)^b}{v(B)} \prod_{\beta\in P} \left(\frac{\Lambda(H) + \rho(H_\beta)}{\rho(H_\beta)}\right) \qquad (\Lambda = \lambda + \Lambda_o)$$

$$\psi_\lambda(g) = (\zeta(g)\,\Phi_o\,,\,\Phi_o)\,\exp\lambda(\Gamma(g)) \qquad (g \in \tilde{G})$$

et considérons l'intégrale

$$d_\lambda[G_{\nu\gamma} : G^o_{\nu\gamma}]^{-1} \int_{G/G^o_{\nu\gamma}} \int_K \psi_\lambda(kg\gamma g^{-1}\,k^{-1})\,dk\,d\dot{g} \qquad (\gamma \in \tilde{G}\,,\quad \nu(\gamma) \in \Gamma) \qquad .$$

PROPOSITION 1. - Il existe un domaine $D$ dans $c^*$ tel que, pour tout $\lambda \in \overline{D}$, l'intégrale converge absolument pour tout $\gamma \in \tilde{\tilde{G}}$ se projettant dans $\Gamma$. L'intégrale est une fonction continue de $\lambda$ sur $\overline{D}$ et holomorphe à l'intérieur, $\lambda_\sigma \in \overline{D}$.

Soient $\gamma_1\ \gamma_2 \cdots \gamma_s$ des racines positives non compactes telles que $\alpha = \Sigma\, R(X_{\gamma_i} + X - \gamma_i)$ soit une sous-algèbre abélienne maximale de $p$. Alors si $\mathrm{Re}\,\lambda(H_{\gamma_i})$ $(1 \leq i \leq s)$ est négatif assez grand, $\lambda \in D$. (cf. [13], p. 109-111).

Il suffit donc de calculer l'intégrale précédente lorsque $\lambda(H_{\gamma_i})$ est négatif assez grand.

PROPOSITION 2. - Soient $\gamma$ un élément semi-simple de $\tilde{G}$. Pour $\lambda(H_{\gamma_i})$ négatif assez grand $\psi_\lambda(kg\gamma g^{-1}\,k^{-1})$ est une fonction intégrable par rapport à $d\dot{g}\,dk$. (cf. [13], p. 122-124)

Si $\psi_\lambda(kg\gamma g^{-1}\,k^{-1})$ est intégrable, l'intégrale double, précédente se réduit à une intégrale sur $G/G^o_\gamma$. Finalement $\gamma$ étant un élément semi-simple de $\tilde{G}$, il nous faut calculer l'intégrale

$$J(\gamma\,,\,\lambda) = d_\lambda \int_{G/G^o_\gamma} \psi_\lambda(g\gamma g^{-1})\,d\dot{g}$$

définie pour $\lambda(H_{\gamma_i})$ négatif assez petit (on écrit $G_\gamma$ pour $G_{\nu\gamma}$). Bien entendu $J(\gamma\,,\,\lambda)$ ne dépend que de la classe de $\gamma$ dans $G$.

Remarquons d'autre part que tout élément $\gamma$ semi-simple centralise une sous-algèbre de Cartan $i$ de $\mathfrak{g}$ que l'on peut supposer invariante par $\theta$, quitte à remplacer $\gamma$ par un élément conjugué ([7]).

Nous allons prouver que $J(\gamma\,,\,\lambda) = 0$ si $\gamma$ n'a pas de point fixe dans $B$. Observons à ce sujet :

PROPOSITION 3. - Pour $\gamma \in \tilde{G}$ (ou $\gamma \in G$) semi-simple, les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\gamma$ admet un point fixe dans $G/K$

(ii) $\gamma$ est conjugué à un élément de $K$.

(iii) $\gamma$ centralise une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ conjuguée à $\mathfrak{h}$.

(iv) $\gamma$ centralise une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui engendre dans $G$ un sous-groupe compact.

(v) $\gamma$ est conjugué à un élément de la forme $\exp H$ $(H \in \mathfrak{h})$.

(i) $\iff$ (ii) puisque $G = K.\exp \mathfrak{p}$.

(iii) $\iff$ (iv), évident.

(ii) $\implies$ (iii). On peut supposer $\gamma \in K$. Alors $\gamma$ centralise une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{k}$. Une telle algèbre est conjuguée à $\mathfrak{h}$.

(iii) $\implies$ (v). Le centralisateur de $\mathfrak{h}$ est connexe, c'est-à-dire est le groupe connexe $A$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

(v) $\implies$ (iii), évident.

3. Calcul de $J(\gamma, \lambda)$ pour $\gamma$ régulier ayant un point fixe dans $B$.

On peut supposer que $\gamma = \exp H$ $(H \in \mathfrak{h})$. Comme $\gamma$ est régulier $G^o_\gamma = A$, groupe engendré par $\mathfrak{h}$. Normalisons la mesure de Haar de $A$ en lui imposant d'être de masse 1. Alors

$$J(\gamma, \lambda) = d_\lambda \int_G \psi_\lambda(g\gamma g^{-1})\, dg \quad .$$

Pour chaque $\lambda$, posons $\Lambda = \lambda + \Lambda_o$. Comme $\lambda$ est nulle sur $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c$, $\Lambda$ coïncide avec $\Lambda_\sigma$ sur $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{k}'_c$, donc prend des valeurs entières positives sur les $H_\alpha$ où $\alpha$ est une racine positive compacte. HARISH-CHANDRA ([4] et [5]) associe à $\Lambda$ une représentation $\pi_\Lambda$ de $G$ dont le caractère districution est donné par :

$$\begin{aligned} T(f) &= \mathrm{tr}\left(\int_G f(x)\, \pi(x)\, dx\right) \\ &= d_\lambda \int_G dg \int_{\tilde{G}} f(g g_1 g^{-1})\, \psi_\lambda(g_1)\, dg_1 \end{aligned}$$

$f$ fonction de classe $C^\infty$ à support compact.

D'autre part d'après [5] et [7], $T$ coincide sur l'ensemble des éléments réguliers avec une fonction $r$

$$T(f) = \int_{\tilde{G}} f(g_1)\ r(g_1)\ dg_1$$

$f$ à support contenu dans l'ensemble des éléments réguliers.

Donc

$$r(\gamma) = d_\lambda \int_G \psi_\lambda(g\gamma g^{-1})\ dg = J(\gamma\ ,\ \lambda) \qquad .$$

Comme on connait $r$ , on en tire

$$J(\gamma\ ,\ \lambda) = \{ \prod_{\alpha\in P} (\exp(\tfrac{\alpha}{2}(H)) - \exp(-\tfrac{\alpha}{2}(H)))\}^{-1} \sum_{s\in W} \varepsilon(s)\ \exp(s\Lambda(H) + \rho(H))$$

$W$ est le groupe de Weyl de $K_c$ et $\varepsilon(s) = \pm 1$ suivant que $s$ est produit d'un nombre pair ou impair de réflections.

Remarque. – Si $\lambda = \lambda_\sigma$ , $\pi_{\Lambda_\sigma}$ n'est autre que la représentation de $G$ dans $\mathcal{H}^2(\sigma)$ .

4. $J(\gamma\ ,\ \lambda) = 0$ pour $\gamma$ régulier sans point fixe dans $B$ .

On peut supposer que $\gamma$ centralise une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$ invariante par $\theta$ . On a $\mathfrak{i} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{i} \cap \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p} \neq 0$ .

Introduisons pour toute forme linéaire $\mu$ sur $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p}$ le sous-espace $\mathfrak{g}_\mu$ des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $[X\ ,\ H] = \mu(H)\ X$ $(H \in \mathfrak{i})$ . Ordonnons les $\mu$ tels que $\mathfrak{g}_\mu \neq \{0\}$ et soit $\mathfrak{n} = \sum_{\mu>0} \mathfrak{g}_\mu$ et $\mathfrak{m}$ l'orthogonal de $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p}$ dans son centralisateur pour la forme $-\beta(X\ ,\ \theta Y)$ . Désignons par $N$ et $M$ , les sous-groupes correspondants. On a :

$$\int_{G/G^o_\gamma} \psi_\lambda(g\gamma g^{-1})\ d\dot{g} = \int_{K\times M\times N} \psi_\lambda(kmn\gamma n^{-1}\ m^{-1}\ k^{-1})\ dk\ dm\ dn$$

( $G^o_\gamma$ est le groupe d'algèbre $\mathfrak{i}$ puisque $\gamma$ est régulier, cf. [9], p. 212).

On fait le changement de variable $n'\gamma = n\gamma n^{-1}$ , puis $n'm = mn$ , il vient

$$= \xi^{-1}(\gamma) \int_{K\times M\times N} \psi_\lambda(kmn\gamma m^{-1}\ k^{-1})\ dk\ dm\ dn\ .$$

où $\xi(\gamma)$ est de déterminant de la restriction de $I - \mathrm{ad}\gamma$ à $\mathfrak{n}$ , celui de la restriction de $\mathrm{ad}m$ à $\mathfrak{n}$ étant $1$ .

On peut supposer $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a} = \sum R(X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i})$ . Posons

$$t = \exp \frac{\pi}{4}\ \mathrm{ad}(\sum_{i=1} X_{\gamma_i} - X_{-\gamma_i}) \qquad .$$

On a

$$t(X_{\gamma_j} + X_{-\gamma_j}) = H_{\gamma_j} \quad .$$

Donc

$$t(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p}) \subset t(\mathfrak{a}) = \sum \mathbb{R} H_{\gamma_i}$$

et

$$[X_{\gamma_\ell} , t(H)] = \gamma_\ell(t(H))\, X_{\gamma_\ell} \quad \text{pour} \quad H \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{p} \quad .$$

Soit :

$$[t^{-1}(X_{\gamma_\ell}) , H] = \gamma_\ell(t(H))\, t^{-1}(X_{\gamma_\ell}) \quad .$$

Donc $t^{-1}(X_{\gamma_\ell})$ ou $t^{-1}(X_{\gamma_\ell})$ est dans $\mathfrak{n}_c$ par exemple $t^{-1}(X_{\gamma_\ell})$. On a

$$t^{-1}(X_{\gamma_\ell}) = \frac{1}{2}(X_{\gamma_\ell} - X_{-\gamma_\ell} - H_{\gamma_\ell})$$

la semi-involution de $\underset{\sim}{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ associe à $\mathfrak{g}$ transforme $X_{\gamma_\ell}$ en $X_{-\gamma_\ell}$, donc $H_{\gamma_\ell}$ en $H_{\gamma_\ell}$, et finalement $t^{-1}(X_{\gamma_\ell})$ en $-t^{-1}(X_{\gamma_\ell})$. En définitive :

$$X = 2it^{-1}(X_{\gamma_\ell}) = i(X_{\gamma_\ell} - X_{-\gamma_\ell} - H_{\gamma_\ell})$$

est dans $\mathfrak{n}$.

Désignons par $N_1$ le sous-groupe à un paramètre engendré par $X$. $N_1$ est fermé, et l'intégrale s'écrit

$$\xi^{-1}(\gamma) \int_{K\times M\times N_1\setminus N} \{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda(k \exp(tX)\; nm\gamma m^{-1}\; k^{-1})\; dt\}\; dk\; dm \quad .$$

On va montrer que, pour $\lambda(H_{\gamma_\ell})$ négatif assez petit, la fonction à intégrer est une fonction holomorphe de $t$ dans le demi-plan $\operatorname{Im} t > -\frac{1}{2}$ majorée par $c(1 + |t|)^{-2}$. La formule intégrale de Cauchy montre alors que l'intégrale est nulle.

On a :

(1) $\quad \psi_\lambda(k \exp tX\; nm\gamma m^{-1}\; k^{-1})$

$$= (\zeta(k)\; \zeta(\exp tX)\; \zeta(nm\gamma m^{-1}\; k^{-1})\; \Phi_o , \Phi_o) \exp \lambda\Gamma(g)$$

avec $g = \exp(tX)\; nm\gamma m^{-1}$ et

(2) $\quad \Gamma(g) = -\pi(\mu(m\gamma m^{-1}\, n^{-1}\, , \exp(-\, tX).0) - \pi(\mu(\exp(-\, tX))\, , 0))$ .

Or

$$\exp(-\, tX) =$$

$$= \exp(-\, it(1 - it)^{-1}\, X_{\gamma_\ell})\, \exp(\log(1 - it)\, H_{\gamma_\ell})\, \exp(it(1 - it)^{-1}\, X_{-\gamma_\ell}) \quad .$$

Donc

$$\exp(-\, tX).0 = -\, it(1 - it)^{-1}\, X_{\gamma_\ell}$$

$$\mu(\exp(-\, tX)\, , 0) = \exp(\log(1 - it)\, H_{\gamma_\ell}) \quad .$$

Dans (1), le premier facteur est un polynôme en $t$ , donc est majoré par $C(1 + |t|)^n$ pour tout $t$ . Pour majorer le deuxième facteur, remarquons que le premier terme dans (2) est une fonction holomorphe et bornée de $t$ pourvu que $\exp(-\, tX).0 = it(1 - it)^{-1}\, X_{\gamma_\ell}$ appartienne à $B$ . Or ceci a lieu si $|it(1 - it)^{-1}| < 1$ , soit $\operatorname{Im} t > -\frac{1}{2}$ . En effet :

LEMME 1. - <u>Si</u> $t \in \underset{\sim}{C}$ <u>et</u> $|t| < 1$ , $tX_{\gamma_\ell}$ <u>est dans</u> $B$ .

Soit $H \in \mathfrak{h}$ , tel que $\exp \gamma_\ell(H) = \dfrac{\bar{t}}{|t|}$ ( $\gamma_\ell(H)$ est imaginaire pure).

Remplaçant $tX_{\gamma_\ell}$ par $\operatorname{ad} \exp H(tX_{\gamma_\ell}) = t \exp \gamma_\ell(H)\, X_{\gamma_\ell}$ , on voit que l'on peut supposer $t \in \underset{\sim}{R}$ . Dans ce cas, posons $t = \operatorname{th} t'$ , et calculons

$$\exp(t'(X_{\gamma_\ell} + X_{-\gamma_\ell})) = \exp \operatorname{th} t' X_{\gamma_\ell}\, \exp \log \operatorname{ch} t' H_{\gamma_\ell}\, \exp \operatorname{th} t' X_{-\gamma_\ell}$$

$\exp(t'(X_{\gamma_\ell} + X_{-\gamma_\ell})).0 = \operatorname{th} t' X_{\gamma_\ell} = tX_{\gamma_\ell}$ est dans $B$ , puisque $\exp(t'(X_{\gamma_\ell} + X_{-\gamma_\ell}))$ est dans $G$ .

Le deuxième terme dans (2) s'écrit

$$-\, \pi(\mu(\exp(-\, tX)\, , 0) = \log(1 - ti)\, \pi(\exp(H_{\gamma_\ell}) = \log(1 - ti)\, H'_{\gamma_\ell}$$

( $H'_{\gamma_\ell}$ composant de $H_{\gamma_\ell}$ dans $c$ ). C'est une fonction holomorphe pour $\operatorname{Im} t > -\frac{1}{2}$.

Pour ces valeurs de $t$ , on a finalement une majoration de la forme

$$|\psi_\lambda(k \exp tX\; nm\; m^{-1}\; k^{-1})| \leq C(1 + |t|)^n\, |1 - ti|^{\operatorname{Re}\lambda(H_{\gamma_\ell})}$$

et si $\lambda(H_{\gamma_\ell})$ est négatif assez petit

$$|\psi_\lambda(k \exp tX\; nm\gamma m^{-1}\; k^{-1})| \leq C(1 + |t|)^{-2} \quad .$$

Donc $J(\gamma\, , \lambda) = 0$ .

5. Passage du cas régulier au cas singulier.

Soit toujours $\mathfrak{i}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $\gamma$ appartienne au centralisateur $I$ de $\mathfrak{i}$. On peut supposer $\theta(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}$. Alors $\theta(\mathfrak{g}_\gamma) = \mathfrak{g}_\gamma$, $\mathfrak{g}_\gamma$ désignant le centralisateur de $\gamma$. L'algèbre réductive $\mathfrak{g}_\gamma$ est somme directe de son algèbre dérivée $\mathfrak{g}_1$ et de son centre $\mathfrak{a}$ tous deux invariants par $\theta$. La restriction de $\theta$ à $\mathfrak{g}_1$ est une involution de Cartan. Soit $\mathfrak{i}_1$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_1$ invariante par $\theta$ et fondamentale (i. e. la trace de $\mathfrak{i}_1$ sur $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_1$ est un sous-espace abélien maximal). Alors $\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ invariante par $\theta$ et centralisée par $\gamma$. On peut donc prendre $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{a}$. Désignons par $G_1$ le sous-groupe connexe de $G$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$, par $I_1$ le centralisateur de $\mathfrak{i}_1$ dans $G_1$. Pour passer du cas régulier au cas singulier, on utilise les lemmes suivants.

LEMME 2. - Soient $m$ une fonction numérique sur $\widetilde{G}_1$ (revêtement de $G_1$) et $\Phi_m$ la fonction numérique définie sur l'ensemble des éléments réguliers de $\widetilde{I}_1$ (centralisateur de $\mathfrak{i}_1$ dans $\widetilde{G}_1$) par :

$$\Phi_m(\gamma_1) = \Delta(\gamma_1) \int_{G_1/I_1^o} m(g_1 \gamma_1 g_1^{-1})\, d\dot{g}_1$$

où

$$\Delta(\gamma_1) = \exp(-\rho_1(H_1)) \prod_{\alpha\in P_1} (\exp(\alpha(H_1)) - 1)$$

$H_1 \in \mathfrak{i}_{1c}$ et $\exp H_1$ est l'image de $\gamma_1$ dans le groupe simplement connexe d'algèbre $\mathfrak{g}_{1c}$. $P_1$ est l'ensemble des racines positives de $\mathfrak{g}_{1c}$ par rapport à $\mathfrak{i}_1$, et $\rho_1$ leur demi-somme. Soit $D$ l'opérateur différentiel invariant $\prod_{\alpha\in P_1} H_\alpha$ sur $\widetilde{I}_1$. Alors, lorsque $\gamma_1$ tend vers $1$ en restant régulier,

$$\lim D\Phi_m(\gamma_1) = am(1)$$

si $m$ est continue à support compact et où $a$ est une constante non nulle indépendante de $m$ (cf. [10]).

LEMME 3. - Soit $f$ continue à support compact sur $\widetilde{G}$. Pour $g \in G$, posons

$$m_g(g') = f(g\gamma g' g^{-1}) \quad .$$

Alors

$$\int_{G/G_\gamma^o} d\dot{g}\, D\Phi m_g(\gamma_1) \to a \int_{G/G_\gamma^o} d\dot{g}\, m_g(1)$$

<u>lorsque</u> $\gamma_1 \in I_1$ <u>tend vers</u> $1$ <u>en restant régulier ainsi que</u> $\gamma\gamma_1$ .

Ce lemme est facile. Notons que

$$\int_{G/I^o} f(\dot{g})\, d\dot{g} = [I_1 : I_1^o]^{-1} \int_{G/G_\gamma^o} d\dot{g} \int_{G_1/I_1^o} f(\dot{\widehat{gg_1}})\, d\dot{g}_1$$

donc

$$\int_{G/I^o} f(g\gamma\gamma_1 g^{-1})\, dg = [I_1 : I_1^o]^{-1} \int_{G/G_\gamma^o} d\dot{g} \int_{G_1/I_1^o} f(g\gamma g_1 \gamma_1 g_1^{-1} g^{-1})\, d\dot{g}_1$$

c'est-à-dire

$$\Delta(\gamma_1) \int_{G/I^o} f(g\gamma\gamma_1 g^{-1})\, dg = [I_1 : I_1^o]^{-1} \int_{G/G_\gamma^o} d\dot{g}\, \Phi_{m_g}(\gamma_1)$$

et finalement

$$\lim_{\gamma_1 \to 1} D\Delta(\gamma_1) \int_{G/I^o} f(g\gamma\gamma_1 g^{-1})\, dg = [I_1 : I_1^o]^{-1}\, a \int_{G/G_\gamma^o} d\dot{g}\, f(g\gamma g^{-1}) \quad .$$

LEMME 4. - <u>Le résultat précédent s'applique à</u> $f = d_\lambda \psi_\lambda$ <u>lorsque</u> $\lambda(H_{\gamma_1})$ <u>est négatif assez petit</u> (cf. [13], p. 116-125).

On a donc ($I^o = G^o_{\gamma\gamma_1}$ puisque $\gamma\gamma_1$ est régulier)

$$\lim_{\gamma_1 \to 1} D\Delta(\gamma_1)\, J(\gamma\gamma_1 , \lambda) = [I_1 : I_1^o]^{-1}\, a\, J(\gamma , \lambda) \quad .$$

Si $\gamma$ n'a pas de point fixe dans $B$ , $I^o = G^o_{\gamma\gamma_1}$ n'est pas compact, donc $\gamma\gamma_1$ n'a pas non plus de point fixe. Alors $J(\gamma\gamma_1 , \lambda) \doteq 0$ (cf. n° 3). Donc $J(\gamma , \lambda) = 0$.

Si $\gamma$ a un point fixe, $I^o$ est compact, donc $\gamma\gamma_1$ a aussi un point fixe. On peut supposer que

$$\gamma = \exp H \;,\quad \gamma_1 = \exp H_1 (H , H_1 \in \mathfrak{h}) \;,\quad \mathfrak{i} = \mathfrak{h} \;,\quad \mathfrak{i}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 \quad .$$

Alors $I_1$ est connexe et

$J(\gamma\gamma_1 , \lambda)$

$$= \{ \prod_{\alpha \in P} (\exp(\tfrac{\alpha}{2}(H)) - \exp(-\tfrac{\alpha}{2}(H)) \}^{-1} \sum_{s \in W} \varepsilon(s) \exp(s\Lambda(H + H_1) + s\,(H + H_1))$$

$$\Delta(\gamma_1) = \exp(-\rho_1(H_1)) \prod_{\alpha \in P_1} (\exp(\alpha(H_1)) - 1)$$

$$\Delta(\gamma_1)\, J(\gamma\gamma_1 , \lambda) = \prod_{\substack{\alpha \in P \\ \alpha \notin P_1}} (\exp(\tfrac{\alpha}{2}(H + H_1)) - \exp(-\tfrac{\alpha}{2}(H + H_1)))^{-1}$$

(pourvu que l'on ait ordonné les racines de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ de telle sorte que les racines positives de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ soient les racines positives $\alpha$ de $\mathfrak{h}$ dont le vecteur $X_\alpha$ est dans $\mathfrak{g}_{1,c}$ ).

On tire facilement de là que :

$$\lim_{\gamma_1 \to 1} D\Delta(\gamma_1)\ J(\gamma\gamma_1\ ,\ \lambda)$$

$$\prod_{\substack{\alpha \in P \\ \alpha \notin P_1}} \left(\exp\left(\tfrac{\alpha}{2}(H)\right) - \exp\left(-\tfrac{\alpha}{2}(H)\right)\right)^{-1} \omega_1 \sum_{W_1 \backslash W} \varepsilon(s) \prod_{\alpha \in P_1} \left(s\Lambda(H_\alpha) + s\rho(H_\alpha)\right) \exp(s\Lambda(H) + \rho(H)$$

$W_1$ est le groupe de Weyl de $\mathfrak{t}_c \cap \mathfrak{g}_{1c}$ et $\omega_1$ son ordre.

Reste à calculer $a$ . Il est facile de prouver que

$$\mathfrak{g}_{1c} = \mathfrak{t}_{1c} + \mathfrak{p}_{1+} + \mathfrak{p}_{1-} \qquad \text{où } \mathfrak{t}_{1c} = \mathfrak{g}_{1c} \cap \mathfrak{t}_{1c}\ ,\ \mathfrak{p}_{1+} = \mathfrak{g}_{1c} \cap \mathfrak{p}_+ \qquad .$$

Il en résulte que $G_1/K_1$ a une structure complexe.

C'est un domaine symétrique borné $B_\gamma$ . Le groupe $G_1$ est localement isomorphe au produit d'un groupe compact et du groupe des transformations conformes de $B_\gamma$ . On peut alors définir, pour toute forme linéaire $\lambda_1$ sur $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{g}_{1c}$ nulle sur $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}_{1c}$ $d_{\lambda_1}$ et $\psi_{\lambda_1}$ . Le lemme 2 s'applique à $m = \psi_{\lambda_1}$ et

$$\begin{aligned} a d_{\lambda_1} &= \lim_{\substack{\gamma_1 \to 1 \\ \gamma_1 \text{ régulier}}} \int_{G_1/I_1^o} \psi_{\lambda_1}(g_1\ \gamma_1\ g_1^{-1})\ d\dot{g}_1 \\ &= \lim_{\substack{H_1 \to 0 \\ H_1 \text{ régulier}}} D\{\textstyle\sum \varepsilon(s)\ \exp(s\Lambda_1(H_1) + s\rho_1(H_1))\} \\ &= \omega_1 \prod_{\alpha \in P_1} (\Lambda_1(H_\alpha) + \rho_1(H_\alpha)) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$d_{\lambda_1} = (-1)^{b_\gamma}/v(B_\gamma) \prod_{\alpha \in P_1} \frac{\Lambda_1(H_\alpha) + \rho_1(H_\alpha)}{\rho_1(H_\alpha)}$$

( $b_\gamma$ = dimensions complexes de $B_\gamma$ ).

D'où

$$a^{-1} = (-1)^{b_\gamma}/v(B_\gamma)\ \rho_1(H_\alpha)^{-1} \qquad .$$

(Bien entendu les mesures sur $G_1$ , $B_\gamma$ , $I_{1o}$ ont été normalisées comme sur $G$ , $B$ , $I_o$ .)

D'où $J(\gamma , \lambda)$ (voir n° 6).

6. Le résultat final.

$$\dim \mathcal{H}(\Gamma , \sigma) = \sum_{\gamma} v(G_\gamma/\Gamma_\gamma)\ \chi(\gamma)$$

la somme (finie) étant étendue à un ensemble de représentants des classes d'éléments conjugués de $\Gamma$ qui ont un point fixe dans $B$ .

$$\chi(\gamma) = (-1)^{b_\gamma}/v(B_\gamma)\ \{[G_\gamma : G_\gamma^o] \prod_{\alpha\in P_\gamma} \rho_\gamma(H_\alpha) \prod_{\substack{\alpha\in P\\ \alpha\notin P_\gamma}} (\exp(\tfrac{\alpha}{2}(H)) - \exp(-\tfrac{\alpha}{2}(H)))\}^{-1}$$

$$\times \sum_{s\in w_\gamma/w} \varepsilon(s) \prod_{\alpha\in P_\gamma} (s\Lambda(H_\alpha) + s\rho(H_\alpha))\ \exp(s\Lambda(H) + s\rho(H)) \quad .$$

$H$ est un élément de $\mathfrak{h}$ tel que $\exp H$ soit conjugué à $\gamma$ .

$\mathfrak{g}_\gamma$ désignant le centralisateur de $H$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$ sa partie semi-simple, $P_\gamma$ est l'ensemble des racines positives de $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$ par rapport à $\mathfrak{h}_{\gamma_1} = \mathfrak{g}_{\gamma_1} \cap \mathfrak{h}$ et $\rho_\gamma$ leur demi-somme. $w_\gamma$ est le groupe de Weyl de $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{\gamma_1}$ .

$B_\gamma$ est le domaine symétrique borné $G_{\gamma_1}/K_{\gamma_1}$ ( $G_{\gamma_1}$ groupe engendré par $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$ , et $K_{\gamma_1}$ groupe engendré par $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{\gamma_1}$ ). $b_\gamma$ est la dimension complexe de $B_\gamma$ .

Les mesures invariantes sont normalisées de la façon suivante : on part d'une mesure euclidienne sur $B_\gamma$ , on en déduit une mesure $G_{\gamma_1}$ invariante sur $B_\gamma = G_{\gamma_1}/K_{\gamma_1}$ puis une mesure invariante sur $G_{\gamma_1}$ . Les groupes compacts $A$ (groupe engendré par $\mathfrak{h}$ ) et $I_{\gamma_1}$ (groupe engendré par $\mathfrak{g}_{\gamma_1}$ ) ont des mesures de masse égale à $1$ . La mesure sur le centralisateur $G_\gamma$ de $\gamma$ dans $G$ , ou ce qui revient au même, le centralisateur $G_{\exp H}$ de $H$ dans $G$ , est déterminé par la formule d'intégration

$$\int_{G/A} f(\dot g)\ d\dot g = \int_{G/G^o_{\exp H}} d\dot g \int_{G_{\gamma_1}/I_{\gamma_1}} f(\dot{\widehat{gg_1}})\ dg_1 \quad .$$

Remarque. - Si $\gamma$ est régulier, il faut vérifier que la formule précédente redonne le résultat du n° 3. Or dans ce cas, $\mathfrak{g}_\gamma = \mathfrak{h}$ , $B_\gamma$ est réduit à un point, $v(B_\gamma) = 1$ , $P_\gamma$ est vide et $w_\gamma = \{1\}$ . La mesure de Haar de $G_\gamma$ qui est compact est égale à $1$ . On retombe bien sur ses pieds. De même si $\gamma = 1$ , $G_\gamma = G$ , $B_\gamma = B$ , $P_\gamma = P$ , $w_\gamma = w$ et la normalisation de la mesure de Haar de $G$ est celle du n° 1 . On retombe encore sur ses pieds.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BOREL (A.) and HARISH-CHANDRA. - Arithmetic subgroups of algebraic groups, Annals of Math., t. 75, 1962, p. 485-535.

[2] GODEMENT (Roger). - La formule des traces de Selberg, Séminaire Bourbaki, t. 15, 1962/63, n° 244, 10 p.

[3] HARISH-CHANDRA. - The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 76, 1954, p. 485-528.

[4] HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups, IV., Amer. J. of Math., t. 77, 1955, p. 743-777.

[5] HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups, V., Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 1-41.

[6] HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups, VI., Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 564-628.

[7] HARISH-CHANDRA. - The characters of semisimple Lie groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 83, 1956, p. 98-163.

[8] HARISH-CHANDRA. - Differential operators on a semisimple Lie algebra, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 87-120.

[9] HARISH-CHANDRA. - Fourier transforms on a semisimple Lie algebra, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 193-257.

[10] HARISH-CHANDRA. - A formula for semisimple Lie groups, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 733-760.

[11] HARISH-CHANDRA. - Spherical functions on a semisimple Lie groups, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 241-310.

[12] HELGASON (Sigurdur). - Differential geometry and symmetric spaces. - New York, Academic Press, 1962 (Pure and applied Mathematics, 12).

[13] LANGLANDS (R. P.). - The dimension of spaces of automorphics forms, Amer. J. of Math., t. 85, 1963, p. 99-125.