Roger Godement

Quelques résultats nouveaux de Kostant sur les groupes semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n^{o} 260, p. 251-258
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__251_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 260

Décembre 1963

QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX DE KOSTANT SUR LES GROUPES SEMI-SIMPLES

par Roger GODEMENT

1. Eléments réguliers.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe réductive de rang r ; pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on note $\mathfrak{g}(X)$ le centralisateur de X dans $\mathfrak{g}$ (noté $\mathfrak{g}^X$ par KOSTANT) ; c'est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui, pour tout X semi-simple et régulier, est de dimension r, et qui par suite est dans tous les cas de dimension au moins r (quand les fibres dégénèrent, elles s'enflent). KOSTANT propose, à juste titre, de qualifier de régulier tout $X \in \mathfrak{g}$, même non semi-simple, tel que $\dim \mathfrak{g}(X) = r$. Cette notion se réduit dans le cas semi-simple à celle qu'on connait depuis longtemps. Si au contraire X est nilpotent, pour que X soit régulier il faut et il suffit qu'il soit principal au sens d'un article antérieur de KOSTANT ([2] ; voir aussi [3]), et parmi les nombreuses façons de caractériser les éléments nilpotents principaux figure la suivante : si l'on fait opérer le groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$ sur le cône $\mathcal{P}$ des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$, alors $\mathcal{P}$ se décompose en un nombre fini d'orbites ; l'une d'elles, et une seulement, est ouverte, et ce sont ses éléments qui sont principaux (en sorte que les nilpotents principaux sont deux à deux conjugués par G). Enfin, si $X \in \mathfrak{g}$ n'est ni semi-simple ni nilpotent, on le décompose en ses composantes semi-simple X_s et nilpotente X_n ; la sous-algèbre $\mathfrak{g}(X_s)$ est réductive, et cela dit X est régulier dans $\mathfrak{g}$ si et seulement si X_n est nilpotent principal dans $\mathfrak{g}(X_s)$. Etant donné le théorème de conjugaison des nilpotents principaux, on déduit de ce qui précède que l'application $X \to X_s$ induit une bijection de l'ensemble des classes d'éléments réguliers sur l'ensemble des classes d'éléments semi-simples de $\mathfrak{g}$ (la classe des nilpotents principaux correspondant à l'orbite de 0).

2. Les variétés $P(\xi)$.

Désignons par S l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$, et par J la sous-algèbre des invariants du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$; on sait que les $f \in J$ sont déterminées par leurs restrictions à une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, et que celles-ci ne sont autres que les invariants du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$. Il s'ensuit trivialement que les invariants permettent de "séparer" les classes d'éléments semi-simples. Mais si $X = X_s + X_n$ on a $f(X) = f(X_s)$ pour tout $f \in J$ (parce qu'on peut, à l'aide de G, faire tendre X_n vers 0 sans bouger X_s) ; comme deux éléments réguliers dont les composantes semi-simples sont conjuguées sont eux-mêmes conjugués, on voit donc que les invariants de G permettent de séparer les classes d'éléments réguliers ; il y a même plus ; soit ξ un homomorphisme de J dans le corps de base ; regardant J comme l'algèbre des invariants du groupe de Weyl de g par rapport à $\mathfrak{h}$, il existe évidemment un $X \in \mathfrak{h}$, unique modulo le groupe de Weyl, tel que $\xi(f) = f(X)$ pour tout $f \in J$; remplaçant X par un élément régulier qui l'admet pour composante semi-simple on voit donc que, pour tout homomorphisme ξ de J dans le corps de base, il existe un élément régulier X (unique modulo G) tel que $\xi(f) = f(X)$ pour tout $f \in J$. Bien entendu, l'orateur n'a pas l'intention de continuer à cacher plus longtemps le fait que J est une algèbre de polynômes à r variables, en sorte que ses homomorphismes dans le corps de base se calculent facilement lorsqu'on connait r générateurs algébriquement indépendants de J ; cela signifie évidemment que le quotient par G de la variété (ouverte dans g) des éléments réguliers est isomorphe à un espace affine de dimension r.

Pour tout homomorphisme ξ de J dans le corps de base, on désignera par $\wp(\xi)$ la sous-variété de g formée des $X \in g$ tels que l'on ait $f(X) = \xi(f)$ pour tout $f \in J$; ces sous-variétés sont fermées et invariantes par le groupe adjoint, et forment une partition de g ; vu ce qu'on a établi plus haut, concernant la séparation par les invariants des classes d'éléments semi-simples (resp. réguliers), chaque variété $\wp(\xi)$ contient exactement une classe d'éléments semi-simples et une classe d'éléments réguliers ; et si l'on choisit un $H \in \wp(\xi)$ semi-simple, alors $\wp(\xi)$ est l'ensemble des $X = s(H + N)$ avec $s \in G$ et N nilpotent commutant à H ; comme, dans $g(H)$, les nilpotents se répartissent en un nombre fini de classes, on voit immédiatement que $\wp(\xi)$ est réunion d'un nombre fini d'orbites de G, celle de dimension maximum étant formée des éléments réguliers de $\wp(\xi)$, et celle de dimension minimum des éléments semi-simples ; en outre, la "grosse" orbite est ouverte et partout dense dans $\wp(\xi)$, tandis que la "petite" est fermée.

L'un des buts principaux de KOSTANT est d'étudier les propriétés algébriques des variétés $\wp(\xi)$, adhérences des orbites des éléments réguliers, de g. Le résultat fondamental dans cet ordre d'idées est le suivant :

THÉORÈME 1. - Les variétés $\wp(\xi)$ possèdent les propriétés suivantes :

(a) $\wp(\xi)$ est irréductible et de dimension $n - r$;

(b) $\mathcal{P}(\xi)$ *est une intersection complète* ;

(c) $\mathcal{P}(\xi)$ *est normale* ;

(d) *les points simples de* $\mathcal{P}(\xi)$ *sont les éléments réguliers de* $\mathcal{P}(\xi)$;

(e) *l'idéal de* $\mathcal{P}(\xi)$ *dans* S *est engendré par les polynômes* $f - \xi(f)$, $f \in J$.

Dans cet énoncé, la propriété (a) est évidente puisque l'orbite d'un élément régulier de $\mathfrak{g}$ est connexe et de dimension $n - r$. La propriété (b) signifie que l'idéal de $\mathcal{P}(\xi)$ dans S est engendré par r fonctions ; mais c'est aussi le plus petit idéal premier de S contenant les $f - \xi(f)$, $f \in J$, et comme J admet un système de r générateurs il est clair que (b) sera établie si l'on prouve que, dans S , les $f - \xi(f)$, $f \in J$, engendrent l'idéal de $\mathcal{P}(\xi)$, i. e. engendrent un idéal *premier* : ainsi la démonstration de (b) revient à celle de (e). Lorsque (b) est démontré, pour prouver (c) il suffit de montrer que la variété singulière de $\mathcal{P}(\xi)$ est de codimension 2 au moins dans $\mathcal{P}(\xi)$; or cette variété singulière, modulo (d), est la réunion des orbites de dimension $< n - r$ contenues dans $\mathcal{P}(\xi)$; pour montrer que c'est de codimension 2 au moins dans $\mathcal{P}(\xi)$, il suffit donc d'établir que *la dimension de toute orbite du groupe adjoint est congrue à* $n - r$ modulo 2 et comme $n - r$ est bien connu pour être pair (si α est racine, il en est de même de $-\alpha$) il suffit donc, pour établir (c), de montrer que *toute orbite de* G *est de dimension paire*, ce qui est facile (*).

En définitive, on voit que les deux assertions sérieuses du théorème 1 sont (d) et (e), la dernière revenant à dire que les $f - \xi(f)$, $f \in J$, engendrent dans S un idéal premier. En fait, ces deux assertions sont elles-mêmes conséquences du résultat que voici :

THÉORÈME 2. - *Soit* $(u_1 , \ldots , u_r)$ *un système de* r *générateurs homogènes algébriquement indépendants de* J . *Pour qu'un* $X \in \mathfrak{g}$ *soit régulier, il faut et il suffit que les différentielles des* u_i *soient linéairement indépendantes en* X .

(*) Voici une démonstration due à KIRILLOV. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque, u un élément du dual de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{n}$ l'annulateur de u dans $\mathfrak{g}$; les $X \in \mathfrak{n}$ sont évidemment caractérisés par le fait qu'on a $u([X , Y]) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$; comme le premier membre est une forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$, on en conclut que $\mathfrak{n}$ est de codimension paire dans $\mathfrak{g}$. Dans le cas semi-simple, la forme de Killing transforme u en un élément arbitraire de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{n}$ en le centralisateur de celui-ci dans $\mathfrak{g}$, d'où le fait que les orbites sont de dimension paire.

Si en effet les assertions (d) et (e) sont établies, le théorème 2 s'obtient à l'aide du critère habituel de Zariski pour les points simples ; inversement, si le théorème 2 est établi, alors l'idéal de S engendré par les $u_i - \xi(u_i)$ est premier, ce qui prouve (e), et les éléments réguliers de $\mathcal{P}(\xi)$ sont déterminés par le critère de Zariski, i. e. sont les points simples de $\mathcal{P}(\xi)$.

Tout revient donc, en définitive, à établir le théorème 2, ou le résultat apparemment plus faible que voici :

pour que X soit régulier, il faut et il suffit qu'il existe r invariants dont les différentielles soient linéairement indépendantes en X.

3. Indications sur la démonstration du théorème 2.

Pour établir le théorème 2, on choisit une fois pour toutes des éléments Y, H, X de $\mathfrak{g}$ vérifiant les formules $[H, X] = X$, $[H, Y] = -Y$, $[X, Y] = H$ en prenant de plus X nilpotent principal ; le système (Y, H, X) est unique modulo G, et engendre une sous-algèbre (simple de dimension trois) principale de $\mathfrak{g}$ au sens de [2]. Les valeurs propres de $\mathrm{ad}(H)$ dans $\mathfrak{g}$ (et dans les algèbres symétriques) sont entières ; la valeur propre 0 définit une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, les valeurs propres positives (resp. négatives) une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{n}^+$ (resp. $\mathfrak{n}^-$) invariante par $\mathfrak{h}$, et on obtient la situation traditionnelle $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^+$. Soit $\mathfrak{g}(X)$ le centralisateur de X dans $\mathfrak{g}$; il est commutatif et de dimension r, et contenu dans $\mathfrak{n}^+$, il admet une base $(Z_i)_{1\leq i\leq r}$ formée de vecteurs vérifiant $[H, Z_i] = m_i Z_i$ où les m_i sont des entiers strictement positifs dont KOSTANT a donné dans [2] une interprétation mirifique : en supposant $m_1 \leq \dots \leq m_r$ et en choisissant les invariants fondamentaux u_i de telle sorte que $d^\circ(u_1) \leq \dots \leq d^\circ(u_r)$, on a

$$d^\circ(u_i) = m_i + 1$$

pour tout i. Ceci dit, on introduit dans $\mathfrak{g}$ la variété linéaire affine

$$\mathcal{V} = Y + \mathfrak{g}(X) \qquad ,$$

et on a le résultat fondamental que voici :

THÉORÈME 3. - Tout élément de $\mathcal{V}$ est régulier, tout élément régulier de $\mathfrak{g}$ possède un et un seul conjugué dans $\mathcal{V}$, et en outre l'application qui, à chaque $f \in J$, associe sa restriction à $\mathcal{V}$ est un isomorphisme de J sur l'anneau des fonctions polynomiales sur $\mathcal{V}$.

Dans cet énoncé, la seconde assertion résulte évidemment de la troisième ; $\mathcal{Y}$ joue en somme le rôle d'une <u>section</u> (rationnelle) de l'ouvert des éléments réguliers, fibré par le groupe adjoint G. Le théorème 3 rend évident le fait que les différentielles du_i sont linéairement indépendantes en tout point régulier ; la réciproque se démontre assez facilement directement, et le point essentiel reste donc le théorème 3. Le premier point s'établit facilement - on montre même en fait que tout point de la variété affine $Y + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^+$ est régulier. On remarque ensuite que tout élément régulier admet un conjugué dans la variété affine $Y + \mathfrak{h}$ (car si $H' \in \mathfrak{h}$ on a $f(Y + H') = f(H')$ pour tout $f \in J$) ; en notant M^+ le sous-groupe unipotent de G engendré par $\mathfrak{n}^+$, on établit ensuite, par des raisonnements faciles, que tout élément de $Y + \mathfrak{h}$ peut se transformer, à l'aide d'un (et u n seul) élément de M^+, en un élément de $\mathcal{Y}$, on a alors établi que tout élément régulier admet un conjugué dans $\mathcal{Y}$, et que les restrictions à $\mathcal{Y}$ des u_i sont algébriquement indépendantes. Il reste à montrer, c'est le point essentiel, que ces restrictions engendrent l'anneau des fonctions régulières sur $\mathcal{Y}$. Pour cela, on considère sur $\mathfrak{g}$ les opérateurs différentiels (du premier ordre à coefficients constants) ∂_{Z_i} correspondant aux éléments de base de $\mathfrak{g}(X)$ et on calcule les restrictions à $\mathcal{Y}$ des fonctions $\partial_{Z_i}(u_j)$; on constate facilement, par des considérations de degré <u>qui utilisent les relations</u> $d^{\circ}(u_i) = m_i + 1$, que ces restrictions sont nulles pour $i < j$, et égales pour $i = j$ à des constantes <u>non nulles</u> ; le théorème 3 résulte aussitôt de là - en fait on a même un résultat plus précis, à savoir qu'on peut choisir dans $\mathcal{Y}$ un système de coordonnées affines (z_i) de telle sorte qu'on ait, sur $\mathcal{Y}$, des relations de la forme

$$u_i = z_i + f_i(z_1 , \dots , z_{i-1}) \quad .$$

Tout cela ne présente pas de grosses difficultés techniques (pour peu qu'on connaisse les énoncés à démontrer), mais donne néanmoins le sentiment très net que la situation est loin d'être définitivement éclaircie, et comporte beaucoup trop de miracles inexpliqués.

4. Les polynômes comme module sur les invariants.

Il est facile de déduire des résultats précédents le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - <u>L'anneau</u> S <u>est un</u> J-<u>module libre</u>.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$; c'est une variété $\mathcal{P}(\xi)$, à savoir celle qui correspond à l'homomorphisme $f \to f(0)$ de J dans le corps de base ; désignant par J_+ le noyau de cet homomorphisme (invariants sans terme constant), on sait d'après le théorème 1 que l'idéal de $\mathcal{P}$ dans S est $J_+ S$ et est premier. Soit alors H un supplémentaire gradué de $J_+ S$ dans l'espace vectoriel S ; on va montrer qu'une base de H (sur C) est aussi une base de S comme J-module. Tout d'abord, on a $S = H.J$ par des considérations de degré à peu près triviales ; reste alors à montrer que, si des $f_i \in H$ sont indépendants sur C , ils le sont sur J , ou encore que <u>si des</u> $f_i \in S$ <u>sont linéairement indépendants sur</u> C <u>modulo</u> $J_+ S$, <u>ils sont indépendants sur</u> J . Or soit X_o nilpotent principal ; les restrictions des f_i à l'orbite de X_o sont alors indépendantes sur C (autrement, il y aurait une combinaison des f_i qui serait nulle sur l'orbite de X_o , donc sur son adhérence $\mathcal{P}$, et qui par suite appartiendrait à l'idéal de $\mathcal{P}$, i. e. à $J_+ S$, contrairement à l'hypothèse) ; un argument évident de continuité (de Zariski bien entendu) montre alors que les restrictions des f_i à l'orbite de tout $X \in \mathfrak{g}$ suffisamment voisin de X_o sont encore linéairement indépendantes ; mais comme une relation $\sum q_i f_i = 0$ avec des $q_i \in J$ induit sur chaque orbite une relation à coefficients constants, l'indépendance des f_i sur J résulte aussitôt de là.

Le résultat précédent montre que, pour construire une base de S sur J , il suffit de construire un supplémentaire H de $J_+ S$ dans S ; on peut le faire <u>canoniquement</u> en prenant pour H l'ensemble des polynômes <u>harmoniques</u> sur $\mathfrak{g}$, i. e. annulés par tous les opérateurs différentiels sur $\mathfrak{g}$ qui sont invariants par G et par les translations et qui n'ont pas de terme constant (cette définition s'étend naturellement à n'importe quelle représentation de G , et en fait KOSTANT démontre un certain nombre de théorèmes dans ce cadre plus général). Le résultat précis est le suivant :

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> H <u>l'ensemble des polynômes harmoniques sur</u> $\mathfrak{g}$. <u>Alors on a</u>

$$S = H \oplus J_+ S ,$$

<u>et</u> H <u>est le sous-espace vectoriel de</u> S <u>engendré par les polynômes de la forme</u> $B(X , N)^m$ <u>avec</u> $N \in \mathcal{P}$, <u>où</u> B <u>est la forme de Killing de</u> $\mathfrak{g}$.

Pour établir le premier point, on introduit, <u>comble de l'horreur</u>, un sous-groupe compact maximal K de G et une forme hermitienne positive invariante par K sur $\mathfrak{g}$; celle-ci permet d'identifier $\mathfrak{g}$ et son dual $\mathfrak{g}^*$, donc les opérateurs différentiels (invariants) aux polynômes (invariants), et alors H apparaît simplement comme l'orthogonal de $J_+ S$ relativement au produit scalaire hermitien positif sur S obtenu par prolongement, d'où la relation $S = H \oplus J_+ S$ en raisonnant degré par degré.

Pour établir la seconde assertion, on écrit pour chaque $X \in \mathfrak{g}$ la formule de Taylor

$$f(X) = \sum \frac{1}{m!} \langle \partial_X^m , f \rangle$$

où ∂_X est la dérivation définie par X, et où l'on fait intervenir, au second membre la dualité entre les algèbres symétriques de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{g}^*$; elle montre que l'orthogonal dans l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}^*$ de l'idéal de $\mathcal{P}$, i. e. de $J_+ S$, est engendré par les opérateurs ∂_X^m avec $X \in \mathcal{P}$; on obtient alors le résultat cherché en identifiant $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ à l'aide de la forme de Killing.

Le théorème 6 montre que le J-module S est isomorphe à $H \otimes J$. Comme H est stable par G, qui opère trivialement sur J, ceci permet de ramener l'étude du G-module S à celle de H. On trouve dans le travail de KOSTANT des résultats à peu près complets à cet égard.

Notons d'abord le

THÉORÈME 7. - Soit X un élément régulier de $\mathfrak{g}$. Toute fonction rationnelle et régulière sur l'orbite de X par G peut se prolonger, d'une façon unique, en un polynôme harmonique sur $\mathfrak{g}$.

L'orbite de X est partout dense dans une certaine variété $\mathcal{P}(\xi)$, laquelle est normale, et réunion de l'orbite en question et d'une variété de codimension 2 au moins dans $\mathcal{P}(\xi)$; il s'ensuit que toute fonction régulière sur l'orbite de X se prolonge en un polynôme sur $\mathfrak{g}$; comme $S = H.J$ et comme J induit des constantes sur l'orbite de X, on obtient ainsi l'existence d'un prolongement harmonique.

Reste à montrer que si un $f \in H$ est nul sur l'orbite de X, alors $f = 0$. Soient f_i les composantes homogènes non nulles de f. Les f_i sont linéairement indépendantes modulo $J_+ S$, en sorte que les restrictions g_i des f_i à $\mathcal{P}$ sont linéairement indépendantes sur C. Les orbites sur lesquelles les restrictions des f_i sont linéairement indépendantes forment donc un ensemble contenant $\mathcal{P}$, ensemble qui est évidemment un cône ouvert invariant par G. Or, comme X est régulier, il est facile de voir que $\mathcal{P}$ est dans l'adhérence du cône engendré par l'orbite de X ; le premier cône rencontre donc le second, les restrictions des f_i à l'orbite de X sont linéairement indépendantes, et la démonstration est terminée.

Nous pouvons maintenant exhiber la structure de H (et donc de S) comme G-module.

THÉORÈME 8. - Soit ρ une représentation irréductible de G. Alors la multiplicité de ρ dans H est égale à la multiplicité dans ρ du poids 0.

Soit X un élément régulier de $\mathfrak{g}$; alors H est isomorphe comme G-module à l'ensemble des fonctions régulières sur l'orbite de X, i. e. sur l'espace homogène $G/G(X)$ où $G(X)$ est le centralisateur de X dans G. Un raisonnement trivial, qu'il serait injurieux d'attribuer à FROBENIUS, montre que la multiplicité de ρ est alors égale à la multiplicité dans ρ de la représentation unité de $G(X)$. Prenons alors pour X un élément régulier semi-simple ; alors $G(X)$ est engendré par une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et le théorème est démontré.

Le mémoire de KOSTANT contient encore pas mal de résultats, en particulier un calcul explicite des valeurs propres, dans toute représentation de $\mathfrak{g}$, d'une transformation de Coxeter opérant sur les vecteurs de poids 0 (résultat qui généralise le théorème de Coleman), et aussi, d'autre part, des applications des théorèmes précédents à l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$; on montre facilement que celle-ci est libre sur son centre, qu'elle est produit tensoriel de son centre et du sous-espace engendré par les puissances des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$, et qu'on a dans $U(\mathfrak{g})$ un résultat analogue au théorème 8. Tout cela peut donner une idée de la richesse du papier de KOSTANT.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOSTANT (Bertram). - Lie group representations on polynomial rings (à paraître).

[2] KOSTANT (Bertram). - The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 973-1032.

[3] KOSZUL (Jean-Louis). - Travaux de B. Kostant sur les groupes de Lie semi-simples, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, nº 191, 9 p.