JEAN-LOUIS KOSZUL

Théorèmes de points fixes pour les groupes élémentaires

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 251, p. 139-144

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__139_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 251

Février 1963

THÉORÈMES DE POINTS FIXES POUR LES GROUPES ÉLÉMENTAIRES

par Jean-Louis KOSZUL

(d'après A. BOREL [1], [2])

1.

Soit G un groupe compact opérant continûment dans un espace localement compact X et soit F le sous-espace des points de X invariants par G. Si p est premier, si $G = \mathbf{Z}_p$ et si X est une sphère S^n de dimension n, alors l'anneau de cohomologie mod p de F est isomorphe à l'anneau de cohomologie mod p d'une sphère S^r, avec $-1 \leq r \leq n$, S^{-1} désignant l'espace vide. De plus, si p est impair, $n - r$ est pair. Pour p et n impairs, on a donc $F \neq \emptyset$ et lorsque $F \neq \emptyset$, $\dim H^*(X, Z_p) = 2 = \dim H^*(F, Z_p)$. C'est là un théorème bien connu de P. SMITH. Les résultats dont il sera question consistent avant tout à établir, qu'avec des hypothèses sensiblement moins restrictives, il y a encore égalité entre la dimension de la cohomologie de X et la dimension de la cohomologie de F. Le groupe G ne sera pas nécessairement cyclique ; ce sera un "groupe élémentaire", c'est-à-dire un groupe $(Z_p)^r$ (p premier) ou un tore T^r de dimension r. Du côté de l'espace X, les hypothèses portent essentiellement sur la position cohomologique de X dans l'espace fibré universel de fibre X de groupe G.

2. Inégalité $\dim H^*(X) \geq \dim H^*(F)$.

On notera E_G un espace fibré principal universel de groupe G, B_G la base de E_G, et X_G le fibré universel $(E_G \times X)/G$ de fibre X associé à E_G. L'espace F_G s'identifie à un sous-espace fermé de X_G dont le complémentaire s'identifie à $(X - F)_G$. La suite exacte de cohomologie, à supports compacts et à coefficients dans un corps K, peut donc s'écrire :

$$(*) \qquad \ldots H^i((X-F)_G) \to H^i(X_G) \to H^i(F_G) \to H^{i+1}((X-F)_G) \ldots$$

Par bienséance et pour éviter des complications techniques, on traite directement la cohomologie des fibrés universels comme si E_G était compact, ce qui peut se justifier en passant par les fibrés N-universels.

Supposons que $G = Z_p$ et que K soit de caractéristique p. Comme G opère librement dans $X - F$, $X - F$ a une structure de fibré principal de groupe G

et $(X - F)_G$ peut être considéré comme fibré associé de base $(X - F)/G$ et de fibre E_G. Puisque $H^i(E_G) = 0$ pour $i \geqslant 1$, on a donc

$$\dim H^i((X - F)_G) = \dim H^i((X - F)/G)$$

pour tout i. Supposons désormais que $\dim_K X$ soit finie (on rappelle que $\dim_K X \leqslant n$ signifie que $H^{n+1}(U, K) = 0$ pour tout ouvert $U \subset X$). Si Y est un sous-espace fermé de X,

$$\dim_K X = \sup(\dim_K Y , \dim_K(X - Y)) \quad .$$

On démontre d'autre part que $\dim_K X/G = \dim_K X$. Par conséquent $\dim_K((X - F)/G) \leqslant \dim_K X$ et si $i > \dim_K X$, la suite exacte (*) montre qu'il existe un homomorphisme surjectif $H^i(X_G) \to H^i(F_G)$. Or F_G est homéomorphe à $F \times B_G$ et $\dim H^i(B_G) = 1$ pour tout $i \geqslant 0$, car $H^*(B_G)$ s'identifie à la cohomologie du groupe $G = Z_p$ opérant trivialement dans K. Compte tenu de la relation de Künneth, on a donc

$$\dim H^i(X_G) = \dim H^*(F)$$

pour tout $i > \dim_K X$. On sait d'autre part que le terme de rang deux de la suite spectrale du fibré X_G de base B_G est isomorphe à $H^*(G , H^*(X))$, ce qui donne l'inégalité

$$\dim H^i(X_G) \leqslant \sum_s \dim H^{i-s}(G , H^s(X))$$

pour tout i. Puisque $\dim H^j(G , L) \leqslant \dim L$ pour tout K-espace L où opère G et tout entier j, on obtient finalement

$$\dim H^i(X_G) \leqslant \dim H^*(X)$$

pour tout $i > \dim_K X$. On a donc au total :

$$\dim H^*(F) = \dim H^i(X_G) \leqslant \dim H^*(X)$$

pour tout $i > \dim_K X$. Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que dans la suite spectrale du fibré X_G, le terme de rang 2 coïncide avec le terme de rang infini et soit isomorphe à $H^*(B_G) \otimes H^*(X)$, c'est-à-dire que. G opère trivialement dans $H^*(X)$. C'est aussi la condition pour que, à l'injection $X \to X_G$, définie par un point de E_G, corresponde un homomorphisme surjectif de $H^*(X_G)$ dans $H^*(X)$. D'une manière générale, on dira qu'un espace X, où opère continûment un groupe compact G, est totalement non homologue à 0 pour le corps de coefficients K s'il vérifie la condition :

(Tot , K) <u>L'homomorphisme</u> $H^*(X_G , K) \to H^*(X , K)$ <u>est surjectif</u>.

Un raisonnement analogue permet d'aboutir à des conclusions semblables dans le cas où G est un tore T de dimension 1, K étant dans ce cas un corps de caractéristique 0. Une simple récurrence conduit alors au théorème suivant.

THÉORÈME 1. – Soient K un corps de caractéristique 0 (resp. p premier), X un espace localement compact de K-dimension finie dans lequel opère continûment le groupe T^r (resp. Z_p^r). Si F est le sous-espace des points fixes, on a

$$\dim H^*(X, K) \geq \dim H^*(F, K) \quad .$$

Si $r = 1$, pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que X vérifie (Tot, K).

On remarquera qu'une partie du théorème de Smith cité plus haut est conséquence directe de ce théorème 1. En effet, si $G = Z_p$ et si $H^*(X, Z_p) \cong H^*(S^n, Z_p)$, on constate que, ou bien $F = \emptyset$, ou bien X vérifie (Tot, Z_p) auquel cas,

$$\dim H^*(F, Z_p) = \dim H^*(S^n, Z_p) = 2 \quad .$$

3. Inégalité $\dim H^*(F) \geq \dim H^*(X)$.

On supposera d'abord que $G = Z_p^r$. On numérotera les sous-groupes de G qui sont sous-groupe de stabilité d'un point de X de telle sorte que $G_\bullet = (e)$ (on suppose G effectif) et $\mathrm{rang}(G_i) \leq \mathrm{rang}(G_{i+1})$. Si G_m est le dernier terme de la suite (G_i), pour que $F \neq \emptyset$, il faut et il suffit que $G_m = G$. Pour tout i $(0 \leq i \leq m)$, X_i désignera le sous-espace fermé de X constitué par les points dont le sous-groupe de stabilité est d'indice $j \geq i$. Alors $X_i - X_{i+1}$ est le sous-espace des points de X ayant G_i pour groupe de stabilité.

Le corps K étant supposé de caractéristique p, supposons que X est compact et que $\dim_K X$ et $\dim H^*(X)$ soient finies. Il en est alors de même, quel que soit i, de X_i, $X_i - X_{i+1}$ et de $(X_i - X_{i+1})/G$. De plus, pour tout j, $H^j((X_i)_G)$ et $H^j((X_i - X_{i+1})_G)$ sont de dimension finie. Puisque $(X_{i+1})_G$ s'identifie à un sous-espace fermé de $(X_i)_G$ ayant pour complémentaire $(X_i - X_{i+1})_G$, en désignant par $P(Y)$ le polynôme ou série formelle de Poincaré d'un espace Y, on a

$$P((X_i)_G) \leq P((X_{i+1})_G) + P((X_i - X_{i+1})_G) \quad ,$$

l'inégalité portant sur les coefficients. Le sous-groupe de stabilité de tout point de $Y_i = X_i - X_{i+1}$ étant G_i, l'espace

$$(Y_i)_G = (E_G \times Y_i)/G = ((E_G/G_i) \times Y_i)/(G/G_i)$$

peut être considéré comme un fibré de base Y_i/G, de fibre E_G/G_i et de groupe structural G/G_i. En profitant de ce que G_i est facteur direct de G, on démontre que G/G_i opère trivialement dans $H^*(E_G/G_i)$. Le terme de rang 2 de la suite spectrale de ce fibré a donc pour "polynôme" de Poincaré : $P(Y_i/G)\ P(E_G/G_i)$. Comme E_G est un fibré principal universel pour G_i ,

$$P(E_G/G_i) = P(B_{G_i}) = (1 - t)^{-r_i}$$

où $r_i = \mathrm{rang}(G_i)$. En écrivant que le "polynôme" de Poincaré de $(Y_i)_G$ est majoré par celui du terme de rang 2 de la suite spectrale, on obtient :

$$P((X_i - X_{i+1})_G) \leq P((X_i - X_{i+1})/G)(1 - t)^{-r_i} \quad .$$

On a donc finalement, pour tout $i \leq m$:

$$P((X_i)_G) \leq P((X_{i+1})_G) + P((X_i - X_{i+1})/G)(1 - t)^{-r_i} \quad .$$

On en déduit que

$$P(X_G) \leq P(X_m/G)(1 - t)^{-r_m} + Q(t)(1 - t)^{-r_{m-1}}$$

où $Q(t)$ est un polynôme et où $Q(t)(1 - t)^{-r_m+1}$ a tous ses coefficients ≥ 0 . D'autre part, <u>si</u> X <u>vérifie la condition</u> (Tot , K) ,

$$P(X_G) = P(X)\ P(B_G) = P(X)(1 - t)^{-r} \quad .$$

On en déduit que, pour $0 \leq t < 1$, la valeur de $P(X)$ est au plus égale à la valeur de $P(X_m/G)(1 - t)^{r-r_m} + Q(t)(1 - t)^{r-r_{m-1}}$. Lorsque $t \to 1$, la valeur de $P(X)$ tend vers $\dim H^*(X) > 0$. Donc $r = r_m$, $G = G_m$ et

$$\dim H^*(X) \leq \dim H^*(X_m/G) = \dim H^*(F)$$

Pour pouvoir raisonner de la même manière dans le cas d'un groupe $G = T^r$, il est nécessaire de supposer que l'on ne trouve comme sous-groupe de stabilité de points de X qu'un nombre fini de sous-groupes de G . D'après un résultat de MOSTOW [4], ce sera toujours le cas si X est une variété compacte. En prenant la cohomologie à coefficients dans un corps de caractéristique 0 , on obtient alors comme majoration de $P((X_i - X_{i+1})_G)$ la série $P((X_i - X_{i+1})/G)(1 - t^2)^{-r_i}$. Finalement, compte tenu du théorème 1, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> K <u>un corps de caractéristique</u> 0 (<u>resp.</u> p <u>premier</u>), X <u>un espace compact tel que</u> $\dim_K X$ <u>et</u> $\dim H^*(X , K)$ <u>soient finies dans lequel opère continûment un groupe</u> T^r (<u>resp.</u> Z_p^r). <u>Si</u> X <u>vérifie la condition</u> (Tot, K) <u>et s'il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes de stabilité distincts, alors</u>

$$\dim H^*(X , K) = \dim H^*(F , K)$$

<u>où</u> F <u>désigne le sous-espace des points fixes</u>.

4. Applications.

Espaces projectifs. – Il est parfois possible d'établir (Tot , K) , et par conséquent de démontrer l'existence de points fixes en utilisant seulement la structure de l'anneau de cohomologie de l'espace. En voici un exemple. Supposons que X soit un espace compact de Z_p-dimension finie et que $H^*(X , Z_p)$ soit isomorphe à $Z_p[x]/(x^{s+1})$ avec degré de $x = k$ et kp pair (exemples : espace projectif réel $(k = 1 , p = 2)$, complexe $(k = 2)$, quaternionien $(k = 4)$, octonionien $(k = 8 , s = 2)$. Si $G = Z_p^r$ opère continûment dans X et si $(p , s + 1) = (1)$, alors X vérifie la condition (Tot , Z_p) . En effet, G opère trivialement dans $H^*(X , Z_p)$; le terme de rang 2 de la suite spectrale du fibré X_G est donc isomorphe à $H^*(X , Z_p) \otimes H^*(B_G , Z_p)$, et il coïncide avec le terme de rang $k + 1$. On a

$$0 = d_{k+1}(x \otimes 1)^{s+1} = (s + 1)(x^s \otimes 1)(d_{k+1} x) \quad ,$$

donc

$$(s + 1)\, d_{k+1}\, x = 0 \quad .$$

Si $(p , s + 1) = 1$, on a donc $d_{k+1}\, x = 0$ et il en résulte que x appartient à l'image de l'homomorphisme $H^*(X_G , Z_p) \to H^*(X , Z_p)$.

Sous-groupes élémentaires des groupes de Lie compacts. – Soient L un groupe de Lie compact, U un sous-groupe fermé de L et G un sous-groupe élémentaire de L . On désignera par K un corps de caractéristique p si $G = Z_p^r$, et de caractéristique 0 si G est un tore. Dans l'espace L/U opère L et par restriction G . Si E_L est un espace fibré principal universel de groupe L , en choisissant $E_G = E_L$, tout point de E_L définit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L/U \arrow[r] \arrow[dr] & (L/U)_G \arrow[d] \\ & (L/U)_L \end{tikzcd} \quad .$$

Pour que L/U considéré comme espace où opère G vérifie la condition (Tot , K) il est donc suffisant qu'il vérifie (Tot , K) en tant qu'espace où opère L , ce qui équivaut à dire que l'homomorphisme caractéristique $H^*(B_U , K) \to H^*(L/U , K)$ est surjectif. Compte tenu du théorème 2, on voit donc que, si l'homomorphisme caractéristique $H^*(B_U , K) \to H^*(L/U , K)$ est surjectif, le sous-espace des points de L/U invariants par G n'est pas vide, ou encore, U *contient un sous-groupe conjugué de* G . Ceci montre par exemple que, si $H^*(B_U , \mathbb{R}) \to H^*(L/U , \mathbb{R})$ est surjectif, alors L et U ont même rang (prendre pour G un tore maximal de L). Si U est un tore maximal de L et si L n'a pas de p-torsion, on sait que $H^*(B_U, Z_p) \to H^*(L/U, Z_p)$ est surjectif. Tout sous-groupe de L isomorphe à Z_p^r est donc en pareil cas contenu dans un tore maximal de L.

Tores opérant dans des variétés kählériennes. - Soit X une variété kählérienne compacte connexe, ou plus généralement, une variété compacte prédentant en cohomologie réelle les caractères d'une variété kählérienne ($H^2(X, \underset{\sim}{R})$ contient une classe ω telle que le produit par ω^{n-p} applique bijectivement $H^p(X, \underset{\sim}{R})$ sur $H^{2n-p}(X, \underset{\sim}{R})$, avec $2n = \dim X$). Soit E un espace fibré compact de fibre X dont le groupe de structure est connexe. On sait, d'après un théorème de BLANCHARD, que pour que $H^*(E, \underset{\sim}{R}) \to H^*(X, \underset{\sim}{R})$ soit surjectif, il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1° $H^1(X, \underset{\sim}{R}) = 0$,

2° la projection de E sur sa base définit un homomorphisme injectif pour les anneaux de cohomologie à coefficients réels.

Soit G un tore opérant continûment dans X. La condition (Tot, $\underset{\sim}{R}$) est vérifiée dans les deux cas suivants :

1° $H^1(X, \underset{\sim}{R}) = 0$,

2° Il existe au moins un point de X invariant par G.

Dans ce dernier cas en effet, le fibré X_G a une section et $H^*(B_G, \underset{\sim}{R}) \to H^*(X_G, \underset{\sim}{R})$ est donc injectif. Comme on sait d'autre part que le nombre des sous-groupes de G qui sont sous-groupes de stabilité de points de X est fini (résultats de MOSTOW), on peut dans ces deux cas appliquer le théorème 2 :

$$\dim H^*(F, \underset{\sim}{R}) = \dim H^*(X, \underset{\sim}{R}) \quad .$$

Lorsque X est une vraie variété kählérienne compacte et que le tore G y opère isométriquement, FRANKEL a démontré [3] que $H^*(F, K) = \dim H^*(X, K)$ pour tout corps K.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand). - Seminar on transformation groups. - Princeton, Princeton University Press, 1960 (Annals of Mathematics Studies, 46).

[2] BOREL (Armand). - Fixed points of elementary commutative groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 65, 1959, p. 322-326.

[3] FRANKEL (T.). - Fixed points and torsion on Kähler manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 70, 1959, p. 1-8.

[4] MOSTOW (G.). - On a conjecture of Montgomery, Annals of Math., Series 2, t. 65 1957, p. 513-516.