

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ALAIN GUICHARDET

## Représentations des groupes de Lie nilpotents

*Séminaire N. Bourbaki*, 1964, exp. n° 249, p. 119-127

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1962-1964\\_\\_8\\_\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__119_0)>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

par Alain GUICHARDET

[d'après KIRILLOV (\*)]

Il s'agit des représentations unitaires continues des groupes de Lie nilpotents réels simplement connexes (on verra plus loin ce qu'on peut dire des groupes non simplement connexes). Soit donc  $G$  un tel groupe ; on va donner

- une description de l'ensemble  $\hat{G}$  des classes d'équivalence de représentations irréductibles de  $G$  ;
- une description des opérations de restriction, induction et multiplication tensorielle des représentations irréductibles (plus précisément des décompositions des résultats de ces opérations) ;
- les caractères infinitésimaux des représentations irréductibles ;
- les caractères globaux des représentations irréductibles ;
- la formule de Plancherel pour  $G$  ;
- une description partielle de la topologie de  $\hat{G}$  (dite "topologie de Jacobsen").

1. Description de  $\hat{G}$ .

Soient  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{g}'$  l'espace vectoriel dual,  $\omega'$  la représentation coadjointe de  $G$  dans  $\mathfrak{g}'$  ; on aura à considérer les orbites de  $\omega'$  dans  $\mathfrak{g}'$  et on les appellera simplement orbites. Soient  $f$  une forme linéaire sur  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Lie telle que  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \text{Ker } f$  (une telle sous-algèbre de Lie sera dite subordonnée à  $f$ ),  $H = \exp \mathfrak{h}$ ,  $V$  la représentation unidimensionnelle de  $H$  définie par

$$V(\exp x) = e^{i f(x)} \quad ;$$

notons  $U_{f, \mathfrak{h}}$  la représentation de  $G$  induite par  $V$  ; cette représentation agit dans l'espace hilbertien  $\mathcal{H}$  des fonctions  $\varphi$  sur  $G$  vérifiant

- $\varphi(st) = V(s) \varphi(t)$  pour  $s \in H$  et  $t \in G$  ;
- $\int |\varphi(s)|^2 d\mu < +\infty$ ,  $\mu$  désignant une mesure invariante sur l'espace homogène  $G/H$  ;

---

(\*) KIRILLOV (A. A.). - Unitarnye predstavlenij nil' potentnykh grupp Li, Uspekhi mat. Nauk, t. 17, 1962, n° 4, p. 57-110.

elle est donnée par la formule

$$(U_{f,h}(s) \varphi)(t) = \varphi(ts) \quad ;$$

remarquons que  $\mathcal{K}$  peut être considéré comme l'espace des fonctions de carré sommable sur  $G/H$ , lequel est homéomorphe à un espace  $\mathbb{R}^m$ .

THÉORÈME 1.

(i) Toute classe de représentations irréductibles de  $G$  s'obtient de cette façon ;

(ii)  $U_{f,h}$  est irréductible si et seulement si  $h$  est une sous-algèbre subordonnée à  $f$  de dimension maximum ;

(iii)  $U_{f,h}$  et  $U_{f_1,h_1}$ , supposées irréductibles, sont équivalentes si et seulement si  $f$  et  $f_1$  sont sur une même orbite.

La méthode générale est la récurrence sur la dimension  $n$  de  $G$  ; le théorème est vrai pour  $n = 1, 2, 3$  (pour le groupe  $\Gamma_3$  de dimension 3, voir § 7).

L'assertion (i) est la plus facile à démontrer : on montre que toute représentation irréductible de  $G$  est monomiale, i. e. induite par une représentation unidimensionnelle d'un certain sous-groupe, et ceci entraîne l'assertion, puisque toute représentation unidimensionnelle est évidemment de la forme  $V$  précédente ; la récurrence se fait de la façon suivante : soient  $\mathfrak{z}$  et  $Z$  les centres de  $\mathfrak{g}$  et  $G$ , et soit  $U$  une représentation irréductible de  $G$  ;  $U|Z$  est scalaire et correspond à une forme linéaire sur  $\mathfrak{z}$  ; soit  $\mathfrak{z}_0$  le noyau de cette forme ; deux cas sont possibles :

a.  $\mathfrak{z}_0 \neq \{0\}$  ; alors  $U$  est triviale sur  $\exp \mathfrak{z}_0$  et peut être considérée comme une représentation de  $G/\exp \mathfrak{z}_0$ , de dimension  $< \dim G$  ;

b.  $\mathfrak{z}_0 = \{0\}$  ; alors  $\dim \mathfrak{z} = 1$  et on doit faire une étude spéciale des algèbres de Lie nilpotentes de dimension  $\geq 4$  ayant un centre de dimension 1.

Soient donc  $\mathfrak{g}$  une telle algèbre,  $\alpha$  un idéal de dimension 2 tel que  $[\alpha, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{z}$ ,  $\mathfrak{g}_1$  le centralisateur de  $\alpha$  ; soient  $z$  un élément non nul de  $\mathfrak{z}$ ,  $y$  un élément de  $\alpha - \mathfrak{z}$  ; pour tout  $u \in \mathfrak{g}$ , on a

$$[u, y] = \lambda(u) z$$

où  $\lambda$  est une forme linéaire sur  $\mathfrak{g}$ , non nulle puisque  $\alpha$  n'est pas central ;  $\mathfrak{g}_1$  est le noyau de  $\lambda$  et est un idéal de codimension 1.

Soient  $A = \exp \alpha$ ,  $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$  ; on identifie  $A$  à  $\mathbb{R}^2$  par l'application  $\exp(\alpha y + \beta z) \rightarrow (\alpha, \beta) \quad ;$

alors  $\hat{A}$  s'identifie naturellement à  $\mathbb{R}^2$  dont nous noterons  $(\mu, \nu)$  un point quelconque ; par ailleurs on calcule aisément l'action de  $G$  dans  $\hat{A}$  : l'automorphisme défini par  $\exp u$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda(u) & 1 \end{pmatrix}$$

et on voit que les orbites sont

- les points de la droite  $\nu = 0$
- les droites  $\nu = \text{Cte} \neq 0$ , ayant pour stabilisateur  $G_1$ .

La théorie des représentations induites de Mackey donne le lemme suivant.

**LEMME 1.** - Soit  $(\mu, \nu)$ , où  $\nu \neq 0$ , un élément de  $\hat{A}$  ; l'application  $W \rightarrow$  représentation induite par  $W$

établit une correspondance bijective entre classes de représentations irréductibles  $W$  de  $G_1$  dont la restriction à  $A$  est un multiple du caractère  $(\mu, \nu)$  et classes de représentations irréductibles de  $G$  dont la restriction à  $A$  est "concentrée" sur l'orbite de  $(\mu, \nu)$ .

Revenons à la démonstration de l'assertion (i) dans le cas (b) ;  $U$  étant non triviale sur  $Z$ ,  $U|_A$  est "concentrée" sur une orbite  $\nu = \text{Cte} \neq 0$  ; par suite  $U$  est induite par une représentation irréductible de  $G_1$  et on est ramené à un groupe de dimension  $< \dim G$ .

Pour démontrer les autres assertions du théorème 1, la récurrence est plus complexe car elle doit aussi se faire sur  $g, f, h$  ; prouvons par exemple que si  $h$  est de dimension maximum,  $U_{f,h}$  est irréductible ; on a facilement  $h \supset \mathfrak{z}$  ainsi que

$$\exp(\mathfrak{z} \cap \text{Ker } f) = Z \cap \text{Ker } U_{f,h} \quad ;$$

posons  $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z} \cap \text{Ker } f$  et  $Z_0 = \exp \mathfrak{z}_0$  ; deux cas sont possibles :

a.  $\mathfrak{z}_0 \neq \{0\}$  ; alors  $f, h, U_{f,h}$  donnent par passage aux quotients des objets  $\tilde{f}, \tilde{h}, \tilde{U}_{f,h}$  et on voit facilement que  $\tilde{U}_{f,h}$  est associée à  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$  comme  $U_{f,h}$  à  $f$  et  $h$ .

b.  $\mathfrak{z}_0 = \{0\}$  ; alors  $\dim \mathfrak{z} = 1$  et on a à nouveau à distinguer deux cas :

b<sub>1</sub>.  $h \subset g_1$  ; désignons par  $\tilde{U}_{f,h}$  la représentation de  $G_1$  induite par  $V$  ;  $U_{f,h}$  est la représentation de  $G$  induite par  $\tilde{U}_{f,h}$  et l'irréductibilité de  $\tilde{U}_{f,h}$  résulte de l'hypothèse de récurrence et celle de  $U_{f,h}$  - du lemme 1.

b<sub>2</sub>.  $h \not\subset g_1$  ; on fait rentrer  $h$  dans  $g_1$  au moyen du lemme suivant.

LEMME 2. - Il existe une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h}'$  subordonnée à  $f$ , de même dimension que  $\mathfrak{h}$ , telle que  $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}_1$  et  $U_{f, \mathfrak{h}'} \sim U_{f, \mathfrak{h}}$ .

Soit  $x \in \mathfrak{h}$ ,  $x \notin \mathfrak{g}_1$  tel que  $[x, y] = z$ ; posons

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 + \underline{R}y \quad ;$$

on a  $y \notin \mathfrak{h}$  car dans le cas contraire  $0 = f([x, y]) = f(z)$ ; donc  $\dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{h}$ . Puis  $\mathfrak{h}'$  est subordonnée à  $f$  (vérification immédiate). Reste l'équivalence des représentations.

Posons  $\mathfrak{m} = \text{Ker } f \cap \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ ; on vérifie sans peine que  $\mathfrak{m}$  est un idéal dans  $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \underline{R}y$  et que  $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$  est somme directe de  $\mathfrak{m}$  et de la sous-algèbre de Lie  $\underline{R}x + \underline{R}y + \underline{R}z$ ; donc  $(\mathfrak{h} + \mathfrak{h}')/\mathfrak{m}$  est isomorphe à l'algèbre de Lie de  $\Gamma_3$ , i. e. à l'algèbre de Lie ayant une base  $e_1, e_2, e_3$  et une table de multiplication dont le seul crochet non nul est  $[e_1, e_2] = e_3$ . Appelons  $V$  et  $V'$  les représentations unidimensionnelles de  $H$  et  $H' = \exp \mathfrak{h}'$  associées à  $f$  et  $T$  et  $T'$  les représentations de  $\exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{h}')$  induites par  $V$  et  $V'$ ; il suffit de montrer que  $T$  et  $T'$  sont équivalentes; or elles sont triviales sur  $\exp \mathfrak{m}$  (vérification triviale); il suffit donc de montrer que les représentations correspondantes de  $\exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{h}')/\exp \mathfrak{m}$  (isomorphe à  $\Gamma_3$ ) sont équivalentes et elles le sont parce que le lemme est vrai pour  $\Gamma_3$ .

Conclusion. - Nous avons ainsi établi une correspondance bijective entre orbites de  $G$  dans  $\mathfrak{g}'$  et classes de représentations irréductibles de  $G$ , correspondance que nous noterons  $\Omega \rightarrow U_\Omega$ ; on démontre par ailleurs la relation

$$\text{codim } \mathfrak{h} = \frac{1}{2} \dim \Omega$$

d'où l'on déduit que toute orbite est de dimension paire et aussi que  $U_\Omega$  peut être réalisée dans l'espace  $L^2(\underline{R}^m)$  où  $m = \frac{1}{2} \dim \Omega$ .

## 2. Opérations sur les représentations irréductibles.

THÉOREME 2. - Soit  $G_0$  un sous-groupe fermé connexe de  $G$ ,  $\mathfrak{g}_0$  son algèbre de Lie,  $p$  la projection canonique de  $\mathfrak{g}'$  sur  $\mathfrak{g}'_0$ .

(i) Pour toute orbite  $\Omega$  de  $G$  dans  $\mathfrak{g}'$ ,  $U_\Omega|_{G_0}$  se décompose suivant les représentations de  $G_0$  correspondant aux orbites de  $G_0$  dans  $\mathfrak{g}'_0$  qui sont contenues dans  $p(\Omega)$ ;

(ii) pour toute orbite  $\Omega$  de  $G_0$  dans  $\mathfrak{g}'_0$ , la représentation de  $G$  induite par  $U_\Omega$  se décompose suivant les représentations de  $G$  correspondant aux orbites de  $G$  dans  $\mathfrak{g}'$  qui rencontrent  $p^{-1}(\Omega)$ ;

(iii) si  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont deux orbites de  $G$  dans  $\mathfrak{g}'$ ,  $U_{\Omega_1} \otimes U_{\Omega_2}$  se décompose suivant les représentations correspondant aux orbites de  $G$  dans  $\mathfrak{g}'$  contenues dans  $\Omega_1 + \Omega_2$ .

Pour démontrer les deux premières assertions on commence par prendre  $G_0$  de codimension 1 (après quoi on itérera le procédé) ; on constate alors que, relativement à la projection  $p$  les orbites de  $G$  dans  $\mathfrak{g}'$  sont de deux sortes :

- orbites saturées
- orbites non saturées : elles rencontrent chaque ensemble  $p^{-1}(\{g\})$  en un point au plus.

Si  $\Omega$  est non saturée,  $p(\Omega)$  est une orbite  $\Omega_0$  de  $G_0$  dans  $\mathfrak{g}'_0$  (on le voit en utilisant la parité de la dimension des orbites),  $U_{\Omega}|_{G_0}$  est équivalente à  $U_{\Omega_0}$ ,  $p^{-1}(\Omega_0)$  est réunion d'une famille à un paramètre d'orbites non saturées  $\Omega_t$  ; la représentation de  $G$  induite par  $U_{\Omega_0}$  se décompose suivant les représentations  $U_{\Omega_t}$ .

Si  $\Omega$  est saturée,  $U_{\Omega}|_{G_0}$  est intégrale d'une famille à un paramètre de représentations irréductibles deux à deux transformées par  $G$  ; elles correspondent aux orbites de  $G_0$  dans  $\mathfrak{g}'_0$  qui sont contenues dans  $p(\Omega)$  et chacune induit à  $G$  la représentation  $U_{\Omega}$ .

Pour démontrer la troisième assertion on considère  $U_{\Omega_1} \otimes U_{\Omega_2}$  comme la restriction à la diagonale de la représentation produit  $U_{\Omega_1} \otimes U_{\Omega_2}$  de  $G \times G$ , laquelle représentation correspond à l'orbite  $\Omega_1 \times \Omega_2$ .

### 3. Caractère infinitésimaux des représentations irréductibles.

On donne, en outre du caractère infinitésimal d'une représentation irréductible  $U$ , des précisions sur l'image  $U(\mathfrak{u}(\mathfrak{g}))$ .

**THÉOREME 3.** - Toute représentation irréductible  $U$  peut être réalisée dans un espace  $L^2(\mathbb{R}^m)$  de façon que  $U(\mathfrak{u}(\mathfrak{g}))$  soit l'algèbre de tous les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux.

Pour la réalisation dans un espace  $L^2(\mathbb{R}^m)$  voir conclusion du § 1 ; le reste se démontre par récurrence ; ici encore deux cas sont à distinguer :

- $\mathfrak{z}_0 \neq \{0\}$  : cas trivial ;
- $\mathfrak{z}_0 = \{0\}$ ,  $\dim \mathfrak{z} = 1$  ; alors  $U$  est induite par une représentation irréductible  $V$  de  $G_1$  qu'on peut réaliser dans un espace  $\mathfrak{K} = L^2(\mathbb{R}^r)$  et dont la

restriction à  $A$  est un multiple d'un caractère  $(0, \nu)$  où  $\nu \neq 0$ ; on peut réaliser  $U$  dans  $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^{r+1})$  par la formule

$$(U(s_1 \exp \alpha x) \varphi)(\gamma) = V(\exp \gamma x \cdot s_1 \cdot \exp(-\gamma x)) \varphi(\gamma + \alpha)$$

(on note  $x$  un élément fixé de  $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}_1$ ; alors tout élément  $s$  de  $G$  s'écrit d'une manière unique  $s = s_1 \exp \alpha x$  où  $s_1 \in G_1$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

On voit alors que

- $U(x)$  est l'opérateur de dérivation par rapport à  $\gamma$  considéré comme la  $r + 1$ -ième variable ;
- $U(y)$  est l'opérateur de multiplication par  $iy$  ;
- $U(z)$  est l'opérateur scalaire  $iy$  ;
- $(U(w) \varphi)(\gamma) = V(w(\exp \gamma x) w) \varphi(\gamma)$  pour tout élément  $w$  d'un certain sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}_1$  complémentaire de  $\mathbb{R}y + \mathbb{R}z$  ( $w$  désigne la représentation adjointe de  $G$  dans  $\mathfrak{g}$ ).

Reste à voir que les  $V(w(\exp \gamma x) w)$  engendrent l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux relatifs aux  $r$  premières variables - ce qui résulte sans grande difficulté de l'hypothèse de récurrence.

Caractère infinitésimal de  $U_\Omega$ . - Si  $U$  est une représentation irréductible de  $G$ , les éléments du centre  $Z(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$  ont pour images des opérateurs scalaires; la fonction ainsi définie sur  $Z(\mathfrak{g})$  est dite caractère infinitésimal de  $U$ . Les éléments de  $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$  peuvent être considérés d'une façon naturelle comme des polynômes sur  $\mathfrak{g}'$ ; GEL'FAND a montré que, pour les éléments de  $Z(\mathfrak{g})$ , ces polynômes sont invariants par  $\omega'(G)$  et inversement; ceci permet d'énoncer le

THEOREME 4. - La valeur en  $p \in Z(\mathfrak{g})$  du caractère infinitésimal de la représentation  $U_\Omega$  est égal à la valeur sur  $i\Omega$  du polynôme représentatif de  $p$  qui se démontre par la méthode habituelle de récurrence.

On déduit de là une description intéressante, sinon de  $\hat{G}$  tout entier, du moins d'une partie de  $\hat{G}$  ouverte et partout dense; il résulte en effet d'un théorème de CHEVALLEY qu'on peut trouver des éléments  $p_0, p_1, \dots, p_k$  de  $Z(\mathfrak{g})$  (identifiés à des polynômes sur  $\mathfrak{g}'$ ) tels que dans le sous-ensemble de  $\mathfrak{g}'$  défini par  $p_0(f) \neq 0$  les orbites soient caractérisées par des conditions  $p_i(f) = Cte$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Les orbites en question seront appelées orbites en position générale; les éléments de  $\hat{G}$  qui leur correspondent sont caractérisés par leurs caractères infinitésimaux.

4. Caractères globaux des représentations irréductibles.

On notera  $\mathcal{S}$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur  $G$  (cette phrase a un sens puisque  $G$  et  $\mathfrak{g}$  sont isomorphes en tant que variétés).

THÉOREME 5. - Soit  $\Omega$  une orbite de  $G$  dans  $\mathfrak{g}'$  ; pour toute  $\varphi \in \mathcal{S}$ , l'opérateur  $U_{\Omega}(\varphi)$  est à trace et la fonction  $\varphi \rightarrow \text{tr } U_{\Omega}(\varphi)$  est une distribution tempérée ; la transformée de Fourier de la distribution qui lui correspond sur  $\mathfrak{g}$  est une mesure positive, invariante par  $G$  et portée par  $\Omega$ .

Première assertion : réalisons  $U_{\Omega}$  comme il a été dit au théorème 3 ; soit  $p \in U(\mathfrak{g})$  tel que  $(U_{\Omega}(p))^{-1}$  existe et soit un opérateur à trace, et soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  ; on a

$$\begin{aligned} U_{\Omega}(\varphi) &= (U_{\Omega}(p))^{-1} U_{\Omega}(p) U_{\Omega}(\varphi) \\ &= (U_{\Omega}(p))^{-1} U_{\Omega}(p\varphi) \end{aligned}$$

où  $p\varphi$  a un sens, pourvu qu'on considère  $p$  comme un opérateur différentiel sur  $G$  ; alors  $U_{\Omega}(p\varphi)$  est un opérateur continu, ce qui démontre l'assertion.

La seconde assertion se démontre par récurrence ; deux cas possibles :

a.  $z_0 \neq \{0\}$  : quand  $f$  parcourt  $\Omega$  la forme quotient  $\tilde{f}$  sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$  parcourt une orbite  $\tilde{\Omega}$  de  $G/\mathfrak{Z}_0$  dans  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0)'$  à cause de la relation

$$(w'(s) f)^{\sim} = \tilde{w}'(\tilde{s}) \tilde{f}$$

et  $f \rightarrow \tilde{f}$  est un homéomorphisme de  $\Omega$  sur  $\tilde{\Omega}$  ; la mesure cherchée sur  $\Omega$  est transportée de celle qui existe sur  $\tilde{\Omega}$  d'après l'hypothèse de récurrence.

b.  $z_0 = \{0\}$  ;  $\dim z = 1$  :  $U_{\Omega}$  est induite par une représentation irréductible de  $G_1$  et  $\Omega$  est saturée ; sa projection sur  $\mathfrak{g}'_1$  est réunion d'une famille à un paramètre d'orbites  $\Omega_t$ , chaque  $\Omega_t$  portant une mesure  $\mu_t$  d'après l'hypothèse de récurrence ; la mesure cherchée sur  $\Omega$  est produit de l'intégrale des  $\mu_t$  par la mesure de Lebesgue.

COROLLAIRE. -  $G$  est CCR (donc de type I).

5. Formule de Flancherel.

Identifions l'ensemble  $\Lambda$  des orbites en position générale à une partie de  $\mathbb{R}^k$  ; on montre alors que la mesure de Flancherel (ou mesure intervenant dans la décomposition de la représentation régulière en représentations irréductibles) est portée par  $\Lambda$  et définie par une densité rationnelle ; plus précisément :



THÉOREME 6. - Il existe une fonction rationnelle  $R(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  telle que, pour  $\varphi \in S$ , on ait

$$\int |\varphi(s)|^2 ds = \int_{\Lambda} \text{tr}(U_{\lambda}(\varphi)^* U_{\lambda}(\varphi)) |R(\lambda)| d\lambda .$$

On remplace le premier membre par  $\int |\widehat{\varphi \circ \exp(f)}|^2 df$  ; la mesure cherchée est alors celle qu'on obtient en désintégrant la mesure  $df$  suivant les mesures portées par les diverses orbites en vertu du théorème 5 ; la démonstration du fait que la mesure cherchée est définie par une densité rationnelle se fait par une récurrence un peu différente de la récurrence habituelle ; on prend un sous-groupe  $G_0$  de codimension 1 et on distingue deux cas :

a. les dimensions des orbites de position générale dans  $g'$  et  $g'_0$  sont égales ; alors presque toutes les orbites dans  $g'$  sont non saturées ;

b. ces dimensions sont différentes ; alors presque toutes les orbites dans  $g'$  sont saturées.

#### 6. Topologie de $\hat{G}$ .

THÉOREME 7. - L'application  $\Omega \rightarrow U_{\Omega}$  est continue quand on munit l'ensemble des orbites de la topologie quotient de celle de  $g'$  et  $\hat{G}$  de la topologie de Jacobson.

On peut définir la topologie de Jacobson de la façon suivante : pour toute représentation  $U$  de  $G$  dans un espace  $\mathcal{K}$  appelons fonction continue de type positif associée à  $U$  toute fonction sur  $G$  de la forme  $s \rightarrow (U(s) \xi | \xi)$ , où  $\xi$  appartient à  $\mathcal{K}$  ; alors un élément  $U$  de  $\hat{G}$  est adhérent à une partie  $E$  de  $\hat{G}$  si et seulement si toute f. c. t. p. associée à  $U$  est limite uniforme sur tout compact de f. c. t. p. associée à des éléments de  $E$ . On démontre le théorème en considérant une suite convergente d'orbites  $\Omega_n \rightarrow \Omega$  et on s'arrange pour réaliser les représentations  $U_{\Omega_n}$  dans un même espace  $L^2(\mathbb{R}^m)$  .

On a par ailleurs de fortes raisons de penser que l'application  $\Omega \rightarrow U_{\Omega}$  est un homéomorphisme ; on sait en tous cas que sa restriction à  $\Lambda$  est un homéomorphisme.

#### 7. Étude d'un exemple.

Prenons pour  $G$  le groupe  $\Gamma_3$  des matrices triangulaires

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que nous noterons aussi  $(a, b, c)$  ; si on écrit  $(x, y, z)$  un élément quelconque de  $g'$ , la représentation coadjointe prend la forme

$$\omega'(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (x - bz, y + az, z)$$

d'où deux sortes d'orbites :

- les points du plan  $z = 0$ , donnant des représentations de dimension 1 ;
- les plans  $z = Cte \neq 0$ , donnant des représentations de dimension infinie.

$\hat{G}$  est donc réunion d'un plan et d'une droite privée d'un point ; la topologie de Jacobson est identique à la topologie quotient de celle de  $g'$  ; les orbites en position générale sont les plans  $z = Cte \neq 0$  ; la mesure de Flancherel est la mesure de Lebesgue  $dz$ .

### 8. Généralisations diverses.

a. Groupes de Lie nilpotents connexes non simplement connexes. - Soit  $G$  un tel groupe ; tous les résultats restent valables à condition d'appeler  $g'$  non pas l'espace vectoriel dual de  $g$ , mais son sous-groupe formé des formes linéaires sur  $g$  qui prennent des valeurs entières sur le noyau de l'application exponentielle ; en effet une telle forme linéaire donne une représentation du recouvrement universel de  $G$  triviale sur le sous-groupe discret central.

b. Groupes de Lie complètement résolubles. - Les théorèmes 1 et 2 restent vrais ; le rôle joué ici par le groupe  $\Gamma_3$  peut alors être joué, soit par  $\Gamma_3$ , soit par le groupe des matrices réelles  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

c. Analogie formelle avec la théorie des groupes semi-simples. - Soit  $G = \text{SI}(2, \mathbb{C})$  ; on identifie  $g$  à  $g'$  au moyen de la forme de Killing ; on a alors la représentation coadjointe

$$\omega'(s) \cdot x = sxs^{-1} \quad ;$$

si l'on fait les constructions du § 1 à partir des orbites des matrices diagonales à valeurs propres simples, on obtient la série principale de représentations irréductibles ; avec des valeurs propres multiples on obtiendrait probablement la série complémentaire.