JEAN GIRAUD

Groupe de Picard, anneaux factoriels

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 248, p. 105-117
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__105_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 248 Février 1963

GROUPE DE PICARD, ANNEAUX FACTORIELS

par Jean GIRAUD

(d'après A. GROTHENDIECK)

Introduction. - En traduisant certains énoncés de géométrie projective : théorème de finitude et de dualité de Serre, théorème de Lefschetz sur le groupe fondamental, en termes de l'anneau local du sommet du cône projetant, on est conduit à des énoncés qui, d'une part sont valables en inégale caractéristique et, d'autre part, permettent à leur tour, en géométrie projective, de remplacer des hypothèses de non singularité par l'hypothèse que certains anneaux locaux sont des intersections complètes. Nous nous proposons le problème suivant :

"Etant donnés un préschéma X et un sous-préschéma fermé Y de X, comparer les groupes de Picard de X et Y".

Pour cela, on passe par l'intermédiaire du complété formel $\hat{X}$ de X le long de Y. Nous nous limitons au cas local : les deux résultats dans cette voie sont 2.1 et 3.7, qui permettent de prouver un résultat nouveau 3.6, et la "conjecture de Samuel" 3.8 (cf. [4]). Pour des indications sur le cas projectif et le groupe fondamental (qui peut s'étudier par les mêmes méthodes) voir les remarques 2.2 et 3.9, ainsi que l'appendice, (et aussi [SGA] d'où tout ceci est extrait).

1. Cohomologie locale (voir [SGA], exposés I à VIII et [2]).

Son étude est à la base des résultats exposés ici : il faut en dire quelques mots.

Soient X un espace topologique et Z une partie fermée de X (on peut se contenter de supposer Z localement fermée, mais nous n'en n'aurons pas besoin). Soit F un faisceau de groupes abéliens sur X. On définit un préfaisceau $\underline{\Gamma}_Z(F)$ en imposant que, pour tout ouvert V de X, $\underline{\Gamma}_Z(F)(V)$ soit le groupe des sections de F sur V dont le support est contenu dans Z ; en fait c'est un faisceau. On note $\Gamma_Z(X, F)$ le groupe de ses sections globales. On obtient ainsi deux foncteurs exacts à gauche, définis sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X et à valeurs respectivement dans elle-même et dans la catégorie des groupes abéliens. Leurs dérivés sont notés $\mathcal{H}_Z^*(F)$ et $H_Z^*(X, F)$.

Posons $U = X - Z$, on a une suite exacte de groupes abéliens :

(1.1) $$0 \to H^0_Z(X , F) \to H^0(X , F) \to H^0(U , F) \xrightarrow{\partial} H^1_Z(X , F) \to H^1(X , F) \ldots$$

et, pour les faisceaux, une suite exacte :

(1.2) $$0 \to \mathcal{H}^0_Z(F) \to F \xrightarrow{u'} u_*(F|U) \to \mathcal{H}^1_Z(F) \to 0 \quad ,$$

et des isomorphismes :

(1.3) $$R^p u_*(F|U) \xrightarrow{\approx \partial} \mathcal{H}^{p+1}_Z(F) , \qquad p > 0 \quad ,$$

où u désigne l'immersion de U dans X , u_* l'image directe par u , et u' le morphisme canonique (trivial : prendre une résolution injective de F). La suite exacte (1.2) fait apparaître $\mathcal{H}^0(F)$ et $\mathcal{H}^1(F)$ comme le noyau et le conoyau de u' .

Si X est un préschéma localement noethérien (resp. noethérien), si Z est défini par l'Idéal quasi-cohérent $\mathfrak{I}$ et si F est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, on a un isomorphisme de ∂-foncteurs :

(1.4) $$\varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{I}^{k+1} , F) \to \mathcal{H}^*_Z(F)$$

(resp. et un isomorphisme de ∂-foncteurs :

(1.5) $$\varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{I}^{k+1} , F) \to H^*_Z(X , F)) \quad .$$

De ceci on déduit en particulier que, si A est un anneau local noethérien, si $X = \mathrm{Spec}(A)$, $k = A/m$, où m est l'idéal maximal de A et si $F = M^\sim$ est le Module associé au module de type fini M , la profondeur de M , notée prof M et définie comme le sup des longueurs des suites M-régulières, est également la borne inférieure des i tels que $H^i_{\{m\}}(X , F) \neq 0$ (resp. $\mathrm{Ext}^i_A(k , M) \neq 0$).

On introduit aussi des Ext avec support : $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^*_Z(F , G)$ (resp. $\mathrm{Ext}^*_Z(X ; F, G)$) qui sont les dérivés par rapport à G de $\underset{\sim}{\Gamma}_Z(\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(F , G))$ (resp. $\Gamma_Z(X , \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(F,G))$.
Si X est localement noethérien (resp. noethérien), si F est cohérent et si G est quasi-cohérent, on a un isomorphisme de ∂-foncteurs :

(1.6) $$\varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{O}_Z}(F/\mathfrak{I}^{k+1} F , G) \xrightarrow{\approx} \underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^*_Z(F , G)$$

(resp. et un isomorphisme de ∂-foncteurs :

(1.7) $$\varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}_X}(X ; F/\mathfrak{I}^{k+1} F , G) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ext}^*_Z(X ; F , G)) \quad ;$$

où $\mathfrak{I}$ est un Idéal de définition de Z .

Proposition 1.1. - Soient A un anneau noethérien, X son spectre, Z une partie fermée de X. Posons $U = X - Z$ et $Y = Z \cap \overline{U}$. Soient F et G deux $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents. Supposons que, pour tout $y \in Y$, on ait $\operatorname{prof} G_y \geq n$, alors les Modules $\underline{\mathrm{Ext}}^p_Z(F, G)$ sont cohérents pour $p < n$.

Preuve. - Si $\operatorname{Supp} F \subset Z$, on a $\underline{\mathrm{Ext}}^*_Z(F, G) = \underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{O}_X}(F, G)$, la conclusion est connue. Sinon, remplaçant F par $F/\underline{\Gamma}_Z(F)$, il suffit de prouver que $\underline{\mathrm{Ext}}^p_Z(F, G) = 0$, pour $p < n$ et $\operatorname{Supp} F \subset \overline{U}$. Grâce aux isomorphismes (1.6), on est ramené à prouver que $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{O}_X}(F, G) = 0$, $p < n$, lorsque $\operatorname{Supp} F \subset Y = Z \cap \overline{U}$. Raisonnons par récurrence sur p. Le résultat est vrai pour $p < 0$, supposons-le démontré pour $p' < p$. Alors $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ est un foncteur exact à gauche, défini sur la catégorie des Modules cohérents de support contenu dans Y. Il est donc représentable par $H = \varinjlim_{k \in \underline{N}} \underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{J}^{k+1}, G)$:

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{O}_X}(F, G) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(F, H) \qquad ,$$

où $\mathfrak{J}$ est un Idéal de définition de Y. D'après (1.4), on a un isomorphisme : $H \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^p_Y(G)$ et, par hypothèse, $H = 0$ si $p < n$, d'où la conclusion.

Remarque. - Le "lemme d'excision" dit que $\underline{\mathrm{Ext}}^*_Z(F, G) = \underline{\mathrm{Ext}}^*_{Z \cap \operatorname{Supp} F}(F, G)$. On en déduit immédiatement que la conclusion de (1.1) subsiste si l'on suppose seulement $\operatorname{prof} G_y \geq n$ pour $y \in Y \cap \operatorname{Supp} F = (Z \cap \operatorname{Supp} F) \cap \overline{U}$.

On peut maintenant énoncer le théorème que nous utiliserons plusieurs fois :

THÉORÈME 1.2. - Soit X un préschéma localement noethérien, localement immergeable dans un préschéma régulier. Soit Z une partie fermée de X et soit $u : U \to X$, $U = X - Z$, l'injection canonique. Soit F un $\mathcal{O}_U$-Module cohérent. Soit n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $R^p u_*(F)$ est cohérent pour $p < n$,

(ii) pour tout $x \in U$, on a $\operatorname{prof} F_x + c(x) > n$,

(iii) pour tout $x \in U$ tel que $c(x) = 1$, on a $\operatorname{prof} F_x \geq n$,

(iv) pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent F' prolongeant F (il en existe) $\mathcal{H}^p_Z(F')$ est cohérent pour $p \leq n$,

où, pour tout $x \in U$, on a posé :

$$c(x) = \operatorname{codim}(\overline{\{x\}} \cap Y, \overline{\{x\}}) \qquad .$$

La dimension d'un anneau local noethérien est prise au sens de Krull, celle d'un préschéma est le sup de celles de ses anneaux locaux et la codimension d'une partie P d'un préschéma S est, par définition :

$$\operatorname{codim}(P , S) = \inf_{p\in P} \dim \mathcal{O}_{S,p} \quad .$$

Pour situer le théorème, énonçons deux corollaires. Le premier dit "qu'il faut que le support de F n'empiète pas trop sur Y ".

COROLLAIRE 1.3. - Supposons de plus que F soit un $\mathcal{O}_U$-Module de Cohen-Macaulay, et désignons par S l'adhérence (dans X) du support de F . Les conditions de 1.2 équivalent à :

(v) pour toute composante irréductible S' de S , on a :

$$\operatorname{codim}(S' \cap Y , S') > n \quad .$$

Preuve. - Trivial sur la définition de Cohen-Macaulay (profondeur = dimension).

Le deuxième est un raffinement d'un résultat bien connu :

COROLLAIRE 1.4. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de préschémas localement noethériens. Supposons que X soit localement immergeable dans un préschéma régulier. Soient U un ouvert de X et F un $\mathcal{O}_U$-Module cohérent. Supposons que, pour tout $x \in U$ tel que $\operatorname{codim}(\{\overline{x}\} \cap (X - U) , \{\overline{x}\}) = 1$, on ait $\operatorname{prof} F_x \geq n$. Alors les $\mathcal{O}_Y$-Modules $R^p(f|U)_*(F)$ sont cohérents pour $p < n$.

En effet, si u désigne l'immersion de U dans X , on a une suite spectrale de Leray :

$$E_2^{p,q} = R^p f_*(R^q u_*(F)) \implies R^*(f|U)_* (F) \quad .$$

D'après 1.2 , les $R^q u_*(F)$ sont cohérents pour $q < n$, donc aussi les $E_2^{p,q}$ pour $q < n$, car f est propre.

Preuve de 1.2. - (i) $\iff$ (iv), par (1.2) et (1.3). Montrons que (iii) $\implies$ (iv). On se ramène facilement au cas où $X = \operatorname{Spec}(A)$, A noethérien régulier (et même local si on y tient), et $F' = M^{\sim}$, où M est un A-module de type fini et de dimension projective finie ; car la dimension projective des fibres est semi-continue supérieurement et finie en tout point (X noethérien régulier). Par un raisonnement facile d'hyperhomologie à la Cartier, on trouve une suite spectrale :

$$(1.8) \qquad \mathcal{H}_Z^*(F') \Longleftarrow \underset{\sim}{\operatorname{Ext}}_Z^p(\underset{\sim}{\operatorname{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^{-q}(F' , \mathcal{O}_X) , \mathcal{O}_X) = E_2^{p,q} \quad .$$

(Cf. [SGA], exposé VIII.) Remarquons que, dans les $\underset{\sim}{\operatorname{Ext}}$, F' a changé de côté par rapport aux formules (1.4) et (1.5).

D'après la remarque qui suit 1.1, pour prouver que $E_2^{p,q}$ est cohérent pour $p + q \leq n$, il suffit de voir que, pour tout $y \in Y_q$, on a prof $\mathcal{O}_{X,y} > p$, où l'on a posé :

$$S_q = \operatorname{Supp} \mathcal{E}xt^{-q}_{\mathcal{O}_X}(F', \mathcal{O}_X) \qquad Y_q = S_q \cap Z \cap \overline{U} = Z \cap \overline{S_q \cap U} \quad .$$

Or, pour un tel y, il existe un $x \in S_q \cap U$ qui le suit, i. e. tel que $y \in \overline{\{x\}}$ et tel que $\dim \mathcal{O}_{X,y} = \dim \mathcal{O}_{X,x} + 1$. D'après (iii), prof $F'_x \geq n$, et, puisque les $\mathcal{E}xt$ commutent aux fibres (localement noethérien) et que $x \in S_q$ on a $\mathrm{dp}\, F'_x \geq -q$, où dp désigne la dimension projective (de la fibre sur l'anneau local de x). Or $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, on a donc :

$$\operatorname{prof} F'_x + \mathrm{dp}\, F'_x = \dim \mathcal{O}_{X,x} \geq n - q \geq p \qquad \text{(cf [3])} \quad .$$

D'où la conclusion, car prof $\mathcal{O}_{X,y} = \dim \mathcal{O}_{X,y} = \dim \mathcal{O}_{X,x} + 1$.

Il resterait à prouver que (i) $\Longrightarrow$ (ii). C'est facile. Voici le noeud de la question : on suppose que X est le spectre d'un anneau de valuation discrète A, que $U = \{x\}$, où x est le point générique de X, que $n = 1$, et on raisonne par l'absurde. Donc prof $F_x = 0$, donc $u_*(F)(X) = F(U) = F_x$ admet zéro comme idéal associé, donc contient un sous-module isomorphe au corps des fractions de A, donc n'est pas de type fini sur A.

C. Q. F. D.

Le corollaire (1.4) nous invite à plagier [EGA], chapitre III.

On peut démontrer le "théorème de comparaison" ([EGA], III, 4.2.2) sans utiliser le fait que le morphisme que l'on étudie est propre, mais seulement la finitude des Modules $\mathcal{H}^p$ ci-dessous, qui, dans le cas que nous étudierons, résultera du théorème 1.2 ci-dessus. Extrayons un corollaire (pour un énoncé complet et un plan de démonstration, voir [SGA] 1962, exposé IX).

Soit $f : X \to X'$ un morphisme de préschéma, séparé et de type fini, tel que X' soit localement noethérien. Soit Y' une partie fermée de X', et posons $Y = f^{-1}(Y')$. Soient $\hat{X}$ et $\hat{X}'$ les complétés formels de X et de X' le long de Y et de Y'. Désignons par i et j les morphismes canoniques de $\hat{X}'$ et de $\hat{X}$ dans X' et X et par $\hat{f}$ le morphisme déduit de f par passage aux complétés

(1.9)
$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\ j\ } & X \\ {\scriptstyle \hat{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \hat{X}' & \xrightarrow{\ i\ } & X' \end{array} \quad .$$

Soit F un $\mathcal{O}_X$-Module, on a un morphisme canonique ([EGA], III, 4.15.4) :

$$(1.10) \qquad u_p : i^* R^p f_*(F) \to R^p \hat{f}_*(j^*(F)) , \qquad p \in \underset{\sim}{Z} .$$

Soit $\mathfrak{I}$ un Idéal de définition de Y' et soit $\mathcal{J} = f(\mathfrak{I})$. Posons :

$$(1.11) \qquad \mathcal{S} = \coprod_{k \in \underset{\sim}{N}} \mathfrak{I}^k , \quad \mathcal{H}^p = \coprod_{k \in \underset{\sim}{N}} R^p f_*(\mathcal{J}^k F) , \qquad p \in \underset{\sim}{Z} .$$

Il est clair que $\mathcal{H}^p$ est un Module gradué sur l'Anneau gradué $\mathcal{S}$.

PROPOSITION 1.5. - Avec les notations introduites jusqu'ici, supposons que F soit <u>cohérent</u> et que le $\mathcal{S}$-Module gradué $\mathcal{H}^p$ <u>soit de type fini</u> pour $p = n$ et $p = n + 1$, alors $R^n \hat{f}_*(\hat{F})$ est <u>cohérent</u> et u_n est un <u>isomorphisme</u>.

Nous appliquerons ce résultat lorsque X' est le spectre d'un anneau noethérien, auquel cas l'Idéal $\mathfrak{I}$ correspond à un idéal I . Désignons par $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie I-adique. Puisque F est cohérent, le morphisme naturel $j^*(F) \to \hat{F}$ est un isomorphisme et le morphisme (1.10) se traduit par :

$$(1.12) \qquad v_p : H^p(X , F) \otimes_A \hat{A} \to H^p(\hat{X} , \hat{F}) .$$

Si l'on suppose que A est <u>complet</u> pour la topologie I-adique, (et que les hypothèses du théorème sont vérifiées), en composant v_n avec l'isomorphisme naturel : $H^n(X , F) \to H^n(X , F) \otimes_A \hat{A}$, on trouve que <u>le morphisme naturel</u> :

$$(1.13) \qquad H^n(X , F) \to H^n(\hat{X} , \hat{F})$$

<u>est un isomorphisme</u>.

On "généralise" de même le théorème de finitude des images directes d'un Module cohérent par un morphisme propre de préschémas <u>formels</u> ([EGA], III, 3.4.2 et [SGA] 1962, exposé IX) :

PROPOSITION 1.6. - Soit $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ un morphisme de préschémas formels. Soit $\mathfrak{I}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{X}'$. Supposons que $\mathcal{J} = f^*(\mathfrak{I})$ soit un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et que $\mathfrak{X}'$ soit localement noethérien.

Soit $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module <u>cohérent</u> et soit n un entier. Soient enfin $\mathcal{S}$ et $\mathcal{G}$ les gradués associés à $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ et à $\mathfrak{F}$:

$$(1.14) \qquad \mathcal{S} = \coprod_{k \in \underset{\sim}{N}} \mathfrak{I}^k / \mathfrak{I}^{k+1} \qquad \mathcal{G} = \coprod_{k \in \underset{\sim}{N}} \mathcal{J}^k \mathfrak{F} / \mathcal{J}^{k+1} \mathfrak{F} .$$

<u>Si le</u> $\mathcal{S}$-<u>Module gradué</u> $\mathcal{H}^p = R^p f_*(\mathcal{G}) \approx \coprod_{k \in \underset{\sim}{N}} R^p f_*(\mathcal{J}^k \mathfrak{F} / \mathcal{J}^{k+1} \mathfrak{F})$ <u>est de type fini pour</u> $p = n - 1$, n <u>et</u> $n + 1$, <u>alors</u> $R^n f_*(\mathfrak{F})$ <u>est cohérent</u>.

2. Conditions de Lefschetz (passage de $\hat{X}$ à un voisinage ouvert de Y). –

Pour tout espace annelé Z, on désigne par $\mathcal{L}(Z)$ la catégorie des $\mathcal{O}_Z$-Modules inversibles (localement libres de rang 1). Soient X un préschéma localement noethérien, Y une partie fermée de X et $\mathcal{U}$ le filtre des voisinages ouverts de Y dans X. On dit que la condition de Lefschetz est vérifiée, et on écrit $\mathrm{Lef}(X, Y)$, si pour tout $U \in \mathcal{U}$, le morphisme naturel :

$$\Gamma(U, F) \to \Gamma(\hat{X}, \hat{F}) \tag{2.1}$$

est un isomorphisme, où $\hat{X}$ (resp. $\hat{F}$) désigne le complété formel de X (resp. F) le long de Y. Si F et G sont deux objets de $\mathcal{L}(U)$, $U \in \mathcal{U}$, le faisceau des homomorphismes $\underline{\mathrm{Hom}}(F, G)$ est inversible, ce qui montre que l'on a un isomorphisme $\underline{\mathrm{Hom}}(\hat{F}, \hat{G}) \xleftarrow{\approx} \underline{\mathrm{Hom}}(F, G)^{\wedge}$, ce qui montre que, si l'on a $\mathrm{Lef}(X, Y)$, le foncteur $\mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}(\hat{X})$ est pleinement fidèle. La réciproque est d'ailleurs vraie : prendre $F = \mathcal{O}_X$. On dit que la condition de Lefschetz effective est vérifiée, et l'on écrit $\mathrm{Leff}(X, Y)$ si on a $\mathrm{Lef}(X, Y)$ et si, pour tout objet $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}(\hat{X})$, il existe $U \in \mathcal{U}$ et un $\mathcal{O}_U$-Module inversible F tel que $\hat{F} \simeq \mathcal{F}$. Si on a $\mathrm{Leff}(X, Y)$, le morphisme $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(\hat{X})$ est un isomorphisme.

THÉORÈME 2.1. – Soit A un anneau local noethérien, soit X' son spectre et soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Soit $t \in \mathfrak{m}$ un élément A-régulier, posons $Y' = V(t)$. Posons $X = X' - \{\mathfrak{m}\}$, $Y = Y' - \{\mathfrak{m}\}$. Supposons que A soit quotient d'un régulier et soit complet pour la topologie t-adique (par exemple A complet). Soit $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Y. Alors :

(i) si, pour tout $p \in X$, fermé dans X, on a $\mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{X,p} \geq 2$, on a $\mathrm{Lef}(X, Y)$, (donc $\mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(\hat{X})$ est injectif, $U \in \mathcal{U}$),

(ii) si, de plus, pour tout $p \in Y$, fermé dans X, on a $\mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{X,p} \geq 3$, on a $\mathrm{Leff}(X, Y)$, (donc $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(\hat{X})$ est un isomorphisme).

Prouvons (i). On remarque (Hauptidealsatz) que, pour tout voisinage ouvert U de Y dans X, le complémentaire $X - U$ est réunion d'un nombre fini de points fermés de X. En appliquant 1.2, on se ramène au cas où $U = X$. Soit F un objet de $\mathcal{L}(X)$, prouvons que $H^0(X, F) \to H^0(\hat{X}, \hat{F})$ est un isomorphisme. Cela résultera du théorème de comparaison 1.5, (cf. (1.13)), appliqué à l'immersion $f : X \to X'$, aux parties fermées Y et Y', à F et pour $n = 0$. Posons $\mathfrak{I} = (tA)^{\sim}$ et $\mathcal{J} = \mathfrak{I}|X$. L'homothétie de rapport t, étant injective, induit des isomorphismes $\mathfrak{I}^k \to \mathfrak{I}^{k+1}$ et $\mathcal{J}^k F \to \mathcal{J}^{k+1} F$. Avec les notations de 1.5, on a donc des isomorphismes : $\mathcal{S} \approx \mathcal{O}_{X'}[T]$ et $\mathcal{H}^p \approx R^p f_*(F) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'}[T]$, où T est une indéterminée.

Pour vérifier l'hypothèse de 1.5, il suffit donc de montrer que $R^p f_*(F)$ est cohérent pour $p = 0$ et 1, ce qui résulte de 1.2 et de l'hypothèse.

Prouvons (ii). Soit $\mathfrak{F}$ un objet de $\mathcal{L}(\hat{X})$. Si l'on prouve que $\hat{f}_*(\mathfrak{F})$ est cohérent, on saura, puisque A est complet pour la topologie (tA)-adique, que $\hat{f}_*(\mathfrak{F})$ est isomorphe au complété d'un $\mathcal{O}_{X'}$-Module cohérent F'. Puisque X est ouvert dans X', on en déduira que $\mathfrak{F} \approx (F'|X)^\wedge$, d'où la conclusion, car F' est libre aux points de Y, donc au voisinage. On va donc appliquer 1.6 à $\hat{f}$, $\mathfrak{F}$ et pour $n = 0$. On fait la même remarque avec les notations de (1.14), on a

$$\mathcal{S} \approx \mathcal{O}_{Y'}[T] \quad \text{et} \quad \mathcal{K}^p \approx R^p f'_*(\mathfrak{F}/\mathfrak{J}\mathfrak{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'}[T] \quad ,$$

où f' est l'immersion de Y dans Y'. D'où l'hypothèse de 1.6, en appliquant 1.2 à f', $\mathfrak{F}/\mathfrak{J}\mathfrak{F}$ et $n = 2$; ce qui est licite car t est régulier, donc

$$\mathrm{prof}(\mathfrak{F}/\mathfrak{J}\mathfrak{F})_x = \mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{Y,x} = \mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X,x} - 1 \geqslant 2 \quad ,$$

pour $x \in Y$, fermé dans Y.

REMARQUE 2.2. Sous les hypothèses de profondeur de 2.1, les conditions de Lefschetz sont vérifiées si X est un sous-préschéma fermé d'un espace projectif sur un corps et si Y est une section hyperplane régulière. D'où les mêmes conclusions pour le groupe de Picard. Par ailleurs, remplaçant un revêtement étale $r : R \to X$ par l'Algèbre étale $r_*(\mathcal{O}_R)$, (équivalence de catégories), on voit que $\mathrm{Leff}(X , Y)$ entraîne que $\pi_0(\hat{X}) = \pi_0(Y) \to \pi_0(U)$ est une bijection $(U \in \mathfrak{U})$ et que

$$\pi_1(\hat{X}) \to \varprojlim_{U \in \mathfrak{U}} \pi_1(U)$$

est un isomorphisme. Comme les éléments nilpotents ne comptent pas pour les revêtements étales, on trouve un isomorphisme

$$\pi_1(Y) \xrightarrow{\approx} \varprojlim_{U \in \mathfrak{U}} \pi_1(U) \quad ,$$

du moins si Y est connexe et si on a choisi un point base dans Y qui sert également dans les U. C'est un premier pas dans la direction du théorème de Lefschetz sur le groupe fondamental, d'où la terminologie (cf. appendice).

3. Parafactorialité (passage de X à un voisinage ouvert de Y).

DÉFINITION 3.1. - Soit X un préschéma localement noethérien et soit U une partie ouverte de X. Posons $Z = X - U$. On dit que le couple (X , Z) est parafactoriel si, pour tout ouvert V de X, le foncteur restriction :

$$p(V) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V \cap U)$$

est une <u>équivalence de catégories</u>, où $\mathcal{P}(\star)$ désigne la catégorie des Modules inversibles sur l'espace annelé $\star$. (Donc $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(U)$ est un <u>isomorphisme</u>.)

DÉFINITION 3.2. – Un anneau local noethérien est dit <u>parafactoriel</u> si le couple $(\mathrm{Spec}(A), \{m\})$ l'est, où m est le radical de A.

Ceci signifie que $\mathrm{prof}\, A \geqslant 2$ et que $\mathrm{Pic}(X) = 0$, où X désigne le complémentaire du point fermé du spectre de A. En effet :

LEMME 3.3. – Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout ouvert V de X, $p(V)$ est <u>pleinement fidèle</u>,

(ii) le morphisme naturel $\mathcal{O}_X \to u_*(\mathcal{O}_U)$ est un isomorphisme,

(iii) pour tout $z \in Z$, on a $\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X,z} \geqslant 2$.

<u>Preuve</u>. – Faisceau des homomorphismes et suite exacte (1.2).

Soit F un $\mathcal{O}_U$-Module inversible ; sous les conditions de 3.3, si F provient d'un $\mathcal{O}_X$-Module inversible, ce dernier ne peut être que $u_*(F)$. Remarquons que $u_*(F)$ est cohérent, car $u_*(\mathcal{O}_U)$ l'est. Soit W l'ouvert de X où $F' = u_*(F)$ est inversible $(W \supset U)$. <u>Supposons</u> $W \neq X$ et soit t un point générique de $T = X - W$. Le changement de base $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,t}) \to X$ commute à l'image directe par u, ce qui prouve, que $\mathcal{O}_{X,t}$ <u>n'est pas</u> parafactoriel. On en déduit :

PROPOSITION 3.4. – Pour que (X, Z) soit parafactoriel, il suffit que, pour tout $z \in Z$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,z}$ le soit.

La réciproque est vraie, triviale, et laissée au lecteur.

Par descente fidèlement plate, on voit qu'un <u>anneau local noethérien, dont le complété est parafactoriel, l'est aussi</u>. La réciproque est inexacte.

Puisque $\mathrm{prof}\, A \leqslant \dim A$, un anneau factoriel n'est pas nécessairement parafactoriel. Cependant :

PROPOSITION 3.5. – Soit A un anneau local noethérien de dimension $\geqslant 2$. <u>Pour que</u> A <u>soit factoriel, il faut et il suffit que</u> :

(i) pour tout idéal premier p de A, différent de l'idéal maximal m, le localisé A_p soit factoriel

(ii) $\mathrm{prof}\, A \geqslant 2$

(iii) $\mathrm{Pic}(X) = 0$, où $X = \mathrm{Spec}(A) - \{m\}$. $(X' = \mathrm{Spec}(A))$.

Les deux dernières conditions signifient que A est parafactoriel. Preuve de 3.5 : appliquer le critère de normalité de SERRE ([3]), et remarquer que, si l'on a (i) et (ii), alors $\mathrm{Cl}(A) \approx \mathrm{Cl}(X) \approx \mathrm{Pic}(X)$.

Voici le théorème nouveau :

THÉORÈME 3.6. - Un anneau local noethérien A , de dimension ≥ 4 , qui est une intersection complète, est parafactoriel.

Rappelons que la seconde condition signifie qu'il existe un anneau local noethérien régulier R et une suite R-régulière $t_1 , \dots , t_k$ d'éléments du radical de R telle que $A \approx R/(t_1 , \dots , t_k)$.

On démontre ce théorème par récurrence sur la longueur de la suite : k . Si $k = 0$, A est régulier, donc factoriel (AUSLANDER-BUCHSBAUM [1], voir une jolie démonstration, due à KAPLANSKY, dans [SGA], exposé XI), donc parafactoriel, car $\dim A \geq 2$. Supposons $k > 1$ et le théorème démontré pour $k' < k$. Il suffit de démontrer que le complété de A est parafactoriel. Le résultat suivant est fait pour cela (A y devient B).

PROPOSITION 3.7. - Soit A un anneau local noethérien, complet. Soit m son idéal maximal, soit $t \in m$ un élément A-régulier. Posons

$$B = A/tA \ , \quad X' = \mathrm{Spec}(A) \ , \quad X = X' - \{m\} \ , \quad Y' = V(t) \approx \mathrm{Spec}(B) \ , \quad Y = Y' - \{m\} \ .$$

Supposons que :

(i) pour tout $x \in X$, fermé dans X , on ait $\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X,x} \geq 2$,

(ii) pour tout $x \in Y$, fermé dans Y , on ait $\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X,x} \geq 3$,

(iii) pour tout $x \in X$, $x \notin Y$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ soit parafactoriel (remarquons que (ii) et (iii) entraînent (i)!)

(iv) $\mathrm{prof}\ B \geq 4$,

alors $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y)$ est un isomorphisme, (en particulier, pour que B soit parafactoriel il faut et il suffit que A le soit).

D'après 2.1 , (i) et (ii) entraînent $\mathrm{Leff}(X , Y)$, donc $\varinjlim_{U \in \mathfrak{U}} \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(\hat{X})$ est un isomorphisme. D'après la démonstration de 2.1 , pour tout $U \in \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}$ est le filtre des voisinages ouverts de Y dans X), le complémentaire de U dans X est formé d'un nombre fini de points fermés de X . Donc le couple $(X , X - U)$ est parafactoriel d'après (iii), donc $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\hat{X})$ est un isomorphisme.

Il reste à comparer $\mathrm{Pic}(\hat{X})$ et $\mathrm{Pic}(Y)$. Posons $\mathfrak{J} = (tA)^{\sim}|X$, c'est un idéal de définition de Y . Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, posons $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_X/\mathfrak{J}^{n+1}$, $Y_n = (Y , \mathcal{O}_n)$. Un module inversible sur $\hat{X}$ est essentiellement une suite de modules inversibles sur les Y_n , se déduisant les uns des autres par réduction modulo $\mathfrak{J}$. Il suffit de montrer que, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $r_n : \mathrm{Pic}(Y_{n+1}) \to \mathrm{Pic}(Y_n)$ est un isomorphisme. On considère la suite exacte :

(3.1) $$0 \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{a} \mathcal{O}_{n+1}^{*} \xrightarrow{b} \mathcal{O}_n^{*} \to 0 \qquad ,$$

où $a(x) = 1 + t^{n+1}x$ et où b est déduit de l'injection $\mathfrak{J}^{n+1} \subset \mathfrak{J}^n$. Comme chacun sait, le morphisme $H^1(b) : H^1(Y , \mathcal{O}_{n+1}^{*}) \to H^1(Y , \mathcal{O}_n^{*})$ s'interprète comme r_n . Par la suite exacte de cohomologie attachée à (3.1), il reste à prouver que $H^i(Y , \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $i = 1$ et 2 . On applique la suite exacte (1.1) à Y' , à la partie fermée $\{m\}$ et à $\mathcal{O}_{Y'}$, ce qui donne la suite exacte :

$$H^i(Y' , \mathcal{O}_{Y'}) \to H^i(Y , \mathcal{O}_Y) \to H^{i+1}_{\{m\}}(Y' , \mathcal{O}_{Y'}) \qquad .$$

Le terme de gauche est nul pour $i > 0$, car Y' est affine ; celui de droite l'est pour $i + 1 < 4$ d'après (iv), d'où la conclusion. On en déduit une conjecture de SAMUEL ([4], n° 6) :

THÉORÈME 3.8. - Soit A un anneau local noethérien qui est une intersection complète. Supposons que, pour tout idéal premier p de A , le localisé A_p soit factoriel si $\dim A_p \leq 3$. Alors A est factoriel.

On raisonne par récurrence sur $n = \dim A$. Si $n \leq 3$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $n \geq 4$ et le théorème démontré en dimension $< n$. Les conditions (ii) et (iii) de 3.5 sont vérifiées, puisque A est parafactoriel. La condition (i) résulte de l'hypothèse de récurrence.

Remarque 3.9. - Comme il est dit dans [4], le théorème 3.8 a une interprétation géométrique simple. Soit V une intersection complète de dimension ≥ 3 dans un espace projectif sur un corps. (Ceci signifie que l'anneau de coordonnées homogènes de V est quotient de celui d'un espace projectif par une suite régulière formée d'éléments homogènes.) Supposons que V soit non singulière en codimension ≤ 3 (ce qui entraîne que son anneau de coordonnées homogènes l'est). Alors tout diviseur de V est une intersection complète (peut être décrit par une équation de plus que V). En effet, le groupe des classes de diviseurs de V s'identifie au groupe des classes de diviseurs homogènes de A . D'après [4], proposition 4, ce dernier s'identifie à $\mathrm{Cl}(A)$ et, d'après [4], proposition 5, à $\mathrm{Cl}(A_m)$, où A_m est l'anneau local du sommet du cône projetant de V , i. e. le localisé de A par rapport à l'idéal maximal m engendré par les éléments homogènes de degré > 0 de A . Or $\mathrm{Cl}(A_m) = 0$, par 3.8 .

A la vérité, il vaut mieux étudier le cas projectif directement. Le bon énoncé concerne d'ailleurs le groupe de Picard et non le groupe des classes de diviseurs:

PROPOSITION 3.10. - Soit X un sous-préschéma fermé d'un espace projectif sur un corps, de dimension $\geqslant 3$, qui est une intersection complète. Alors $\mathrm{Pic}(X)$ est le groupe libre engendré par la classe de $\mathcal{O}_X(1)$.

4. Appendice.

De même que celles de 2 (cf. 2.2) les considérations de 3 s'appliquent sans grand changement à l'étude du groupe fondamental, à condition de remplacer "parafactoriel" par "pur" et la catégorie des Modules inversibles par celle des revêtements étales. Dans le cas local, on est conduit au théorème de pureté de Zariski-Nagata (un anneau local noethérien régulier de dimension $\geqslant 2$ est pur), étendu par GROTHENDIECK au cas **d'une intersection complète de dimension $\geqslant 3$**. Dans le cas projectif, on trouve :

THÉORÈME 4.1. - Soit X un sous-préschéma fermé d'un espace projectif sur un corps, soit Y une section hyperplane régulière de X. Supposons que, pour tout $x \in X$, fermé dans X,

(i) on ait $\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X,x} \geqslant 2$

(ii) on ait $\mathrm{prof}\ \mathcal{O}_{X,x} \geqslant 3$, si, de plus, $x \in Y$,

(iii) $\mathcal{O}_{X,x}$ soit pur, si $x \notin Y$, (par exemple régulier de dimension $\geqslant 2$, ou une intersection complète de dimension $\geqslant 3$), alors $\pi_0(Y) \to \pi_0(X)$ est une bijection et, une fois choisi des points bases dans Y, $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ est un isomorphisme.

Comparant avec le théorème de Lefschetz dans le cas analytique complexe, on est conduit à supposer que celui-ci est peut-être valable sans hypothèse de non-singularité. Avant d'énoncer une conjecture précise qui devrait intéresser les topologues, définissons des groupes d'homotopie locaux qui devraient remplacer les H^1_x. Soit X un espace topologique localement connexe par arc, et soit $x \in X$. Pour tout voisinage U de x, choisissons un point-base dans $U - x$ de la manière suivante.

Soit $f : [0, 1] \to X$, une application continue telle que $f(0) = x$ et $f(t) \neq x$ pour $t \neq 0$ (il en existe si x n'est pas isolé). Pour tout voisinage U de x, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $0 \leqslant t < \varepsilon$ implique $f(t) \in U$. Les groupes d'homotopie $\pi_i(U - x, f(t))$, $0 < t < \varepsilon$, sont "essentiellement" indépendants de t. Choisissant pour chaque U un tel t, et passant à la limite projective sur les voisinages de U, on pose :

$$\pi_i^x(X) = \varprojlim_U \pi_i(U - x\,;\, f(t)) \quad ,$$

et on vérifie que la limite est indépendante de f, à un isomorphisme près.

CONJECTURE 4.2 (GROTHENDIECK). - Soit X un espace analytique projectif de dimension n, muni d'un Module inversible ample L, soit t une section de L, soit Y l'ensemble des zéros de t. Supposons que :

(i) t soit une section régulière (superflu ?),

(ii) pour tout $x \in X - Y$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est une intersection complète (devrait pouvoir se remplacer par $\pi_i^x(X) = 0$ pour $i \leqslant n - 1$),

(iii) pour tout $y \in Y$, prof $\mathcal{O}_{X,y} \geqslant n$.

Alors le morphisme

$$\pi_i(Y) \to \pi_i(X)$$

est une bijection pour $i < n - 1$, une surjection pour $i = n - 1$.

Pour plus de détails, voir [SGA], exposé XIII : "Problèmes et conjectures".

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (M.) and BUCHSBAUM (D. A.). - Unique factorization in regular local rings, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 45, 1959, p. 733-734.

[EGA] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNE (J.). - Eléments de géométrie algébrique. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1961 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 4, 8 et 11).

[SGA] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de Géométrie algébrique. Notes prises par un groupe d'auditeurs. Exposés I à XIII. - Paris, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1962 (multigraphié).

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Local cohomology. Notes by Robin Hartshone. - Cambridge, Harvard University, 1961 (multigraphié).

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale et multiplicités. Cours au Collège de France, rédigé par Pierre Gabriel. Paris, Collège de France, 1958 (multigraphié).

[4] SAMUEL (Pierre). - Sur les anneaux factoriels, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 156-173.