

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN GIRAUD

Groupe de Picard, anneaux factoriels

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 248, p. 105-117

http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__105_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GRUPE DE PICARD, ANNEAUX FACTORIELS

par Jean GIRAUD

(d'après A. GROTHENDIECK)

Introduction. - En traduisant certains énoncés de géométrie projective : théorème de finitude et de dualité de Serre, théorème de Lefschetz sur le groupe fondamental, en termes de l'anneau local du sommet du cône projetant, on est conduit à des énoncés qui, d'une part sont valables en inégale caractéristique et, d'autre part, permettent à leur tour, en géométrie projective, de remplacer des hypothèses de non singularité par l'hypothèse que certains anneaux locaux sont des intersections complètes. Nous nous proposons le problème suivant :

"Etant donné un préschéma X et un sous-préschéma fermé Y de X , comparer les groupes de Picard de X et Y ".

Pour cela, on passe par l'intermédiaire du complété formel \hat{X} de X le long de Y . Nous nous limitons au cas local : les deux résultats dans cette voie sont 2.1 et 3.7, qui permettent de prouver un résultat nouveau 3.6, et la "conjecture de Samuel" 3.8 (cf. [4]). Pour des indications sur le cas projectif et le groupe fondamental (qui peut s'étudier par les mêmes méthodes) voir les remarques 2.2 et 3.9, ainsi que l'appendice, (et aussi [SGA] d'où tout ceci est extrait).

1. Cohomologie locale (voir [SGA], exposés I à VIII et [2]).

Son étude est à la base des résultats exposés ici : il faut en dire quelques mots.

Soient X un espace topologique et Z une partie fermée de X (on peut se contenter de supposer Z localement fermée, mais nous n'en n'aurons pas besoin). Soit F un faisceau de groupes abéliens sur X . On définit un préfaisceau $\Gamma_Z(F)$ en imposant que, pour tout ouvert V de X , $\Gamma_Z(F)(V)$ soit le groupe des sections de F sur V dont le support est contenu dans Z ; en fait c'est un faisceau. On note $\Gamma_Z(X, F)$ le groupe de ses sections globales. On obtient ainsi deux foncteurs exacts à gauche, définis sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X et à valeurs respectivement dans elle-même et dans la catégorie des groupes abéliens. Leurs dérivés sont notés $\mathcal{H}_Z^*(F)$ et $H_Z^*(X, F)$.

Posons $U = X - Z$, on a une suite exacte de groupes abéliens :

$$(1.1) \quad 0 \rightarrow H_Z^0(X, F) \rightarrow H^0(X, F) \rightarrow H^0(U, F) \xrightarrow{\partial} H_Z^1(X, F) \rightarrow H^1(X, F) \dots$$

et, pour les faisceaux, une suite exacte :

$$(1.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(F) \rightarrow F \xrightarrow{u^!} u_*(F|U) \rightarrow \mathcal{H}_Z^1(F) \rightarrow 0 \quad ,$$

et des isomorphismes :

$$(1.3) \quad R^p u_*(F|U) \xrightarrow{\approx \partial} \mathcal{H}_Z^{p+1}(F) \quad , \quad p > 0 \quad ,$$

où u désigne l'immersion de U dans X , u_* l'image directe par u , et $u^!$ le morphisme canonique (trivial : prendre une résolution injective de F). La suite exacte (1.2) fait apparaître $\mathcal{H}^0(F)$ et $\mathcal{H}^1(F)$ comme le noyau et le conoyau de $u^!$.

Si X est un préschéma localement noethérien (resp. noethérien), si Z est défini par l'Idéal quasi-cohérent \mathfrak{J} et si F est un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent, on a un isomorphisme de ∂ -foncteurs :

$$(1.4) \quad \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^* (\mathcal{O}_X / \mathfrak{J}^{k+1}, F) \rightarrow \mathcal{H}_Z^*(F)$$

(resp. et un isomorphisme de ∂ -foncteurs :

$$(1.5) \quad \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^* (\mathcal{O}_X / \mathfrak{J}^{k+1}, F) \rightarrow H_Z^*(X, F) \quad .$$

De ceci on déduit en particulier que, si A est un anneau local noethérien, si $X = \text{Spec}(A)$, $k = A/\mathfrak{m}$, où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de A et si $F = \tilde{M}$ est le Module associé au module de type fini M , la profondeur de M , notée $\text{prof } M$ et définie comme le sup des longueurs des suites M -régulières, est également la borne inférieure des i tels que $H_{\{\mathfrak{m}\}}^i(X, F) \neq 0$ (resp. $\text{Ext}_A^i(k, M) \neq 0$).

On introduit aussi des Ext avec support : $\text{Ext}_Z^*(F, G)$ (resp. $\text{Ext}_Z^*(X; F, G)$) qui sont les dérivés par rapport à G de $\Gamma_Z(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, G))$ (resp. $\Gamma_Z(X, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, G))$).

Si X est localement noethérien (resp. noethérien), si F est cohérent et si G est quasi-cohérent, on a un isomorphisme de ∂ -foncteurs :

$$(1.6) \quad \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{O}_Z}^* (F/\mathfrak{J}^{k+1}, G) \xrightarrow{\approx} \text{Ext}_Z^*(F, G)$$

(resp. et un isomorphisme de ∂ -foncteurs :

$$(1.7) \quad \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^* (X; F/\mathfrak{J}^{k+1}, G) \xrightarrow{\approx} \text{Ext}_Z^*(X; F, G) \quad ;$$

où \mathfrak{J} est un Idéal de définition de Z .

Proposition 1.1. - Soient A un anneau noethérien, X son spectre, Z une partie fermée de X . Posons $U = X - Z$ et $Y = Z \cap \bar{U}$. Soient F et G deux \mathcal{O}_X -Modules cohérents. Supposons que, pour tout $y \in Y$, on ait $\text{prof } G_y \geq n$, alors les Modules $\underline{\text{Ext}}_Z^p(F, G)$ sont cohérents pour $p < n$.

Preuve. - Si $\text{Supp } F \subset Z$, on a $\underline{\text{Ext}}_Z^*(F, G) = \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^*(F, G)$, la conclusion est connue. Sinon, remplaçant F par $F/\Gamma_Z(F)$, il suffit de prouver que $\underline{\text{Ext}}_Z^p(F, G) = 0$, pour $p < n$ et $\text{Supp } F \subset \bar{U}$. Grâce aux isomorphismes (1.6), on est ramené à prouver que $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^p(F, G) = 0$, $p < n$, lorsque $\text{Supp } F \subset Y = Z \cap \bar{U}$. Raisonnons par récurrence sur p . Le résultat est vrai pour $p < 0$, supposons-le démontré pour $p' < p$. Alors $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^p(F, G)$ est un foncteur exact à gauche, défini sur la catégorie des Modules cohérents de support contenu dans Y . Il est donc représentable par $H = \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{O}_X/\mathfrak{J}^{k+1}, G)$:

$$\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^p(F, G) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(F, H) \quad ,$$

où \mathfrak{J} est un Idéal de définition de Y . D'après (1.4), on a un isomorphisme : $H \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_Y^p(G)$ et, par hypothèse, $H = 0$ si $p < n$, d'où la conclusion.

Remarque. - Le "lemme d'excision" dit que $\underline{\text{Ext}}_Z^*(F, G) = \underline{\text{Ext}}_{Z \cap \text{Supp } F}^*(F, G)$. On en déduit immédiatement que la conclusion de (1.1) subsiste si l'on suppose seulement $\text{prof } G_y \geq n$ pour $y \in Y \cap \text{Supp } F = (Z \cap \text{Supp } F) \cap \bar{U}$.

On peut maintenant énoncer le théorème que nous utiliserons plusieurs fois :

THÉOREME 1.2. - Soit X un préschéma localement noethérien, localement immergeable dans un préschéma régulier. Soit Z une partie fermée de X et soit $u:U \rightarrow X$, $U = X - Z$, l'injection canonique. Soit F un \mathcal{O}_U -Module cohérent. Soit n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $R^p u_*(F)$ est cohérent pour $p < n$,
 - (ii) pour tout $x \in U$, on a $\text{prof } F_x + c(x) > n$,
 - (iii) pour tout $x \in U$ tel que $c(x) = 1$, on a $\text{prof } F_x \geq n$,
 - (iv) pour tout \mathcal{O}_X -Module cohérent F' prolongeant F (il en existe) $\mathcal{K}_Z^p(F')$ est cohérent pour $p \leq n$,
- où, pour tout $x \in U$, on a posé :

$$c(x) = \text{codim}(\{\bar{x}\} \cap Y, \{\bar{x}\}) \quad .$$

La dimension d'un anneau local noethérien est prise au sens de Krull, celle d'un préschéma est le sup de celles de ses anneaux locaux et la codimension d'une partie P d'un préschéma S est, par définition :

$$\text{codim}(P, S) = \inf_{p \in P} \dim \mathcal{O}_{S,p} \quad .$$

Pour situer le théorème, énonçons deux corollaires. Le premier dit "qu'il faut que le support de F n'empiète pas trop sur Y ".

COROLLAIRE 1.3. - Supposons de plus que F soit un \mathcal{O}_Y -Module de Cohen-Macaulay, et désignons par S l'adhérence (dans X) du support de F . Les conditions de 1.2 équivalent à :

(v) pour toute composante irréductible S' de S , on a :

$$\text{codim}(S' \cap Y, S') > n \quad .$$

Preuve. - Trivial sur la définition de Cohen-Macaulay (profondeur = dimension).

Le deuxième est un raffinement d'un résultat bien connu :

COROLLAIRE 1.4. - Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre de préschémas localement noethériens. Supposons que X soit localement immergeable dans un préschéma régulier. Soient U un ouvert de X et F un \mathcal{O}_U -Module cohérent. Supposons que, pour tout $x \in U$ tel que $\text{codim}(\{\bar{x}\} \cap (X - U), \{\bar{x}\}) = 1$, on ait $\text{prof } F_x \geq n$. Alors les \mathcal{O}_Y -Modules $R^p(f|U)_*(F)$ sont cohérents pour $p < n$.

En effet, si u désigne l'immersion de U dans X , on a une suite spectrale de Leray :

$$E_2^{p,q} = R^p f_* (R^q u_*(F)) \implies R^*(f|U)_*(F) \quad .$$

D'après 1.2, les $R^q u_*(F)$ sont cohérents pour $q < n$, donc aussi les $E_2^{p,q}$ pour $q < n$, car f est propre.

Preuve de 1.2. - (i) \iff (iv), par (1.2) et (1.3). Montrons que (iii) \implies (iv).

On se ramène facilement au cas où $X = \text{Spec}(A)$, A noethérien régulier (et même local si on y tient), et $F' = \tilde{M}$, où M est un A -module de type fini et de dimension projective finie ; car la dimension projective des fibres est semi-continue supérieurement et finie en tout point (X noethérien régulier). Par un raisonnement facile d'hyperhomologie à la Cartier, on trouve une suite spectrale :

$$(1.8) \quad \mathcal{K}_Z^*(F') \longleftarrow \underline{\text{Ext}}_Z^p(\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^{-q}(F', \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) = E_2^{p,q} \quad .$$

(Cf. [SGA], exposé VIII.) Remarquons que, dans les $\underline{\text{Ext}}$, F' a changé de côté par rapport aux formules (1.4) et (1.5).

D'après la remarque qui suit 1.1, pour prouver que $E_2^{p,q}$ est cohérent pour $p + q \leq n$, il suffit de voir que, pour tout $y \in Y_q$, on a $\text{prof } \mathcal{O}_{X,y} > p$, où l'on a posé :

$$S_q = \text{Supp Ext}_{\mathcal{O}_X}^{-q}(F', \mathcal{O}_X) \quad Y_q = S_q \cap Z \cap U = Z \cap \overline{S_q \cap U} \quad .$$

Or, pour un tel y , il existe un $x \in S_q \cap U$ qui le suit, i. e. tel que $y \in \overline{\{x\}}$ et tel que $\dim \mathcal{O}_{X,y} = \dim \mathcal{O}_{X,x} + 1$. D'après (iii), $\text{prof } F'_x \geq n$, et, puisque les Ext commutent aux fibres (localement noethérien) et que $x \in S_q$ on a $\text{dp } F'_x \geq -q$, où dp désigne la dimension projective (de la fibre sur l'anneau local de x). Or $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, on a donc :

$$\text{prof } F'_x + \text{dp } F'_x = \dim \mathcal{O}_{X,x} \geq n - q \geq p \quad (\text{cf [3]}) \quad .$$

D'où la conclusion, car $\text{prof } \mathcal{O}_{X,y} = \dim \mathcal{O}_{X,y} = \dim \mathcal{O}_{X,x} + 1$.

Il resterait à prouver que (i) \Rightarrow (ii). C'est facile. Voici le noeud de la question : on suppose que X est le spectre d'un anneau de valuation discrète A , que $U = \{x\}$, où x est le point générique de X , que $n = 1$, et on raisonne par l'absurde. Donc $\text{prof } F'_x = 0$, donc $u_*(F)(X) = F(U) = F_x$ admet zéro comme idéal associé, donc contient un sous-module isomorphe au corps des fractions de A , donc n n'est pas de type fini sur A .

C. Q. F. D.

Le corollaire (1.4) nous invite à plagier [EGA], chapitre III.

On peut démontrer le "théorème de comparaison" ([EGA], III, 4.2.2) sans utiliser le fait que le morphisme que l'on étudie est propre, mais seulement la finitude des Modules \mathcal{K}^D ci-dessous, qui, dans le cas que nous étudierons, résultera du théorème 1.2 ci-dessus. Extrayons un corollaire (pour un énoncé complet et un plan de démonstration, voir [SGA] 1962, exposé IX).

Soit $f : X \rightarrow X'$ un morphisme de préschéma, séparé et de type fini, tel que X' soit localement noethérien. Soit Y' une partie fermée de X' , et posons $Y = f^{-1}(Y')$. Soient \hat{X} et \hat{X}' les complétés formels de X et de X' le long de Y et de Y' . Désignons par i et j les morphismes canoniques de \hat{X}' et de \hat{X} dans X' et X et par \hat{f} le morphisme déduit de f par passage aux complétés

$$(1.9) \quad \begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{j} & X \\ \hat{f} \downarrow & & \downarrow f \\ \hat{X}' & \xrightarrow{i} & X' \end{array} \quad .$$

Soit F un \mathcal{O}_X -Module, on a un morphisme canonique ([EGA], III, 4.15.4) :

$$(1.10) \quad u_p : i^* R^p f_*(F) \rightarrow R^p \hat{f}_*(j^*(F)), \quad p \in \mathbb{Z} \quad .$$

Soit \mathfrak{J} un Idéal de définition de Y' et soit $\mathfrak{J} = f(\mathfrak{J})$. Posons :

$$(1.11) \quad \mathfrak{S} = \coprod_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{J}^k, \quad \mathcal{K}^p = \coprod_{k \in \mathbb{N}} R^p f_*(\mathfrak{J}^k F), \quad p \in \mathbb{Z} \quad .$$

Il est clair que \mathcal{K}^p est un Module gradué sur l'anneau gradué \mathfrak{S} .

PROPOSITION 1.5. - Avec les notations introduites jusqu'ici, supposons que F soit cohérent et que le \mathfrak{S} -Module gradué \mathcal{K}^p soit de type fini pour $p = n$ et $p = n + 1$, alors $R^n \hat{f}_*(\hat{F})$ est cohérent et u_n est un isomorphisme.

Nous appliquerons ce résultat lorsque X' est le spectre d'un anneau noethérien, auquel cas l'Idéal \mathfrak{J} correspond à un idéal I . Désignons par \hat{A} le complété de A pour la topologie I -adique. Puisque F est cohérent, le morphisme naturel $j^*(F) \rightarrow \hat{F}$ est un isomorphisme et le morphisme (1.10) se traduit par :

$$(1.12) \quad v_p : H^p(X, F) \otimes_A \hat{A} \rightarrow H^p(\hat{X}, \hat{F}) \quad .$$

Si l'on suppose que A est complet pour la topologie I -adique, (et que les hypothèses du théorème sont vérifiées), en composant v_n avec l'isomorphisme naturel : $H^n(X, F) \rightarrow H^n(X, F) \otimes_A \hat{A}$, on trouve que le morphisme naturel :

$$(1.13) \quad H^n(X, F) \rightarrow H^n(\hat{X}, \hat{F})$$

est un isomorphisme.

On "généralise" de même le théorème de finitude des images directes d'un Module cohérent par un morphisme propre de préschémas formels ([EGA], III, 3.4.2 et [SGA] 1962, exposé IX) :

PROPOSITION 1.6. - Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ un morphisme de préschémas formels. Soit \mathfrak{J} un Idéal de définition de \mathfrak{X}' . Supposons que $\mathfrak{J} = f^*(\mathfrak{J})$ soit un Idéal de définition de \mathfrak{X} et que \mathfrak{X}' soit localement noethérien.

Soit \mathfrak{F} un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Module cohérent et soit n un entier. Soient enfin \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' les gradués associés à $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, et à \mathfrak{F} :

$$(1.14) \quad \mathfrak{S} = \coprod_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{J}^k / \mathfrak{J}^{k+1} \quad \mathfrak{S}' = \coprod_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{J}^k \mathfrak{F} / \mathfrak{J}^{k+1} \mathfrak{F} \quad .$$

Si le \mathfrak{S} -Module gradué $\mathcal{K}^p = R^p f_*(\mathfrak{F}) \approx \coprod_{k \in \mathbb{N}} R^p f_*(\mathfrak{J}^k \mathfrak{F} / \mathfrak{J}^{k+1} \mathfrak{F})$ est de type fini pour

$p = n - 1$, n et $n + 1$, alors $R^n f_*(\mathfrak{F})$ est cohérent.

2. Conditions de Lefschetz (passage de \hat{X} à un voisinage ouvert de Y). -

Pour tout espace annelé Z , on désigne par $\mathcal{L}(Z)$ la catégorie des \mathcal{O}_Z -Modules inversibles (localement libres de rang 1). Soient X un préschéma localement noethérien, Y une partie fermée de X et \mathcal{U} le filtre des voisinages ouverts de Y dans X . On dit que la condition de Lefschetz est vérifiée, et on écrit $\text{Lef}(X, Y)$, si pour tout $U \in \mathcal{U}$, le morphisme naturel :

$$(2.1) \quad \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}})$$

est un isomorphisme, où \hat{X} (resp. $\hat{\mathcal{F}}$) désigne le complété formel de X (resp. \mathcal{F}) le long de Y . Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux objets de $\mathcal{L}(U)$, $U \in \mathcal{U}$, le faisceau des homomorphismes $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est inversible, ce qui montre que l'on a un isomorphisme $\underline{\text{Hom}}(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^\wedge$, ce qui montre que, si l'on a $\text{Lef}(X, Y)$, le foncteur $\mathcal{L}(U) \rightarrow \mathcal{L}(\hat{X})$ est pleinement fidèle. La réciproque est d'ailleurs vraie : prendre $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. On dit que la condition de Lefschetz effective est vérifiée, et l'on écrit $\text{Leff}(X, Y)$ si on a $\text{Lef}(X, Y)$ et si, pour tout objet \mathcal{F} de $\mathcal{L}(\hat{X})$, il existe $U \in \mathcal{U}$ et un \mathcal{O}_U -Module inversible \mathcal{F} tel que $\hat{\mathcal{F}} \simeq \mathcal{F}$. Si on a $\text{Leff}(X, Y)$, le morphisme $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \text{Pic}(U) \rightarrow \text{Pic}(\hat{X})$ est un isomorphisme.

THÉORÈME 2.1. - Soit A un anneau local noethérien, soit X' son spectre et soit \mathfrak{m} son idéal maximal. Soit $t \in \mathfrak{m}$ un élément A -régulier, posons $Y' = V(t)$. Posons $X = X' - \{\mathfrak{m}\}$, $Y = Y' - \{\mathfrak{m}\}$. Supposons que A soit quotient d'un régulier et soit complet pour la topologie t -adique (par exemple A complet). Soit \hat{X} le complété formel de X le long de Y . Alors :

(i) si, pour tout $p \in X$, fermé dans X , on a $\text{prof } \mathcal{O}_{X,p} \geq 2$, on a $\text{Lef}(X, Y)$, (donc $\text{Pic}(U) \rightarrow \text{Pic}(\hat{X})$ est injectif, $U \in \mathcal{U}$),

(ii) si, de plus, pour tout $p \in Y$, fermé dans X , on a $\text{prof } \mathcal{O}_{X,p} \geq 3$, on a $\text{Leff}(X, Y)$, (donc $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \text{Pic}(U) \rightarrow \text{Pic}(\hat{X})$ est un isomorphisme).

Prouvons (i). On remarque (Hauptidealsatz) que, pour tout voisinage ouvert U de Y dans X , le complémentaire $X - U$ est réunion d'un nombre fini de points fermés de X . En appliquant 1.2, on se ramène au cas où $U = X$. Soit \mathcal{F} un objet de $\mathcal{L}(\hat{X})$, prouvons que $H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}})$ est un isomorphisme. Cela résultera du théorème de comparaison 1.5, (cf. (1.13)), appliqué à l'immersion $f : X \rightarrow X'$, aux parties fermées Y et Y' , à \mathcal{F} et pour $n = 0$. Posons $\mathfrak{J} = (tA)^\sim$ et $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}|_X$. L'homothétie de rapport t , étant injective, induit des isomorphismes $\mathfrak{J}^k \rightarrow \mathfrak{J}^{k+1}$ et $\mathfrak{J}^k \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{J}^{k+1} \mathcal{F}$. Avec les notations de 1.5, on a donc des isomorphismes : $\mathfrak{S} \approx \mathcal{O}_{X'}[T]$ et $\mathfrak{K}^p \approx R^p f_* (\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'}[T]$, où T est une indéterminée.

Pour vérifier l'hypothèse de 1.5, il suffit donc de montrer que $R^p f_*(F)$ est cohérent pour $p = 0$ et 1 , ce qui résulte de 1.2 et de l'hypothèse.

Prouvons (ii). Soit \mathfrak{F} un objet de $\mathcal{L}(\hat{X})$. Si l'on prouve que $\hat{f}_*(\mathfrak{F})$ est cohérent, on saura, puisque A est complet pour la topologie (tA) -adique, que $\hat{f}_*(\mathfrak{F})$ est isomorphe au complété d'un \mathcal{O}_X -Module cohérent F' . Puisque X est ouvert dans X' , on en déduira que $\mathfrak{F} \approx (F' | X)^\wedge$, d'où la conclusion, car F' est libre aux points de Y , donc au voisinage. On va donc appliquer 1.6 à \hat{f} , \mathfrak{F} et pour $n = 0$. On fait la même remarque avec les notations de (1.14), on a

$$s \approx \mathcal{O}_Y[t] \text{ et } \mathfrak{K}^p \approx R^p f'_*(\mathfrak{F}/\mathfrak{J}\mathfrak{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[t],$$

où f' est l'immersion de Y dans Y' . D'où l'hypothèse de 1.6, en appliquant 1.2 à f' , $\mathfrak{F}/\mathfrak{J}\mathfrak{F}$ et $n = 2$; ce qui est licite car t est régulier, donc

$$\text{prof}(\mathfrak{F}/\mathfrak{J}\mathfrak{F})_x = \text{prof } \mathcal{O}_{Y,x} = \text{prof } \mathcal{O}_{X,x} - 1 \geq 2,$$

pour $x \in Y$, fermé dans Y .

REMARQUE 2.2. Sous les hypothèses de profondeur de 2.1, les conditions de Lefschetz sont vérifiées si X est un sous-préschéma fermé d'un espace projectif sur un corps et si Y est une section hyperplane régulière. D'où les mêmes conclusions pour le groupe de Picard. Par ailleurs, remplaçant un revêtement étale $r : R \rightarrow X$ par l'Algèbre étale $r_*(\mathcal{O}_R)$, (équivalence de catégories), on voit que $\text{Lef}(X, Y)$ entraîne que $\pi_0(\hat{X}) = \pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(U)$ est une bijection ($U \in \mathcal{U}$) et que

$$\pi_1(\hat{X}) \rightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U)$$

est un isomorphisme. Comme les éléments nilpotents ne comptent pas pour les revêtements étales, on trouve un isomorphisme

$$\pi_1(Y) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U),$$

du moins si Y est connexe et si on a choisi un point base dans Y qui sert également dans les U . C'est un premier pas dans la direction du théorème de Lefschetz sur le groupe fondamental, d'où la terminologie (cf. appendice).

3. Parafactorialité (passage de X à un voisinage ouvert de Y).

DÉFINITION 3.1. - Soit X un préschéma localement noethérien et soit U une partie ouverte de X . Posons $Z = X - U$. On dit que le couple (X, Z) est parafactoriel si, pour tout ouvert V de X , le foncteur restriction :

$$p(V) : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V \cap U)$$

est une équivalence de catégories, où $\mathcal{P}(\star)$ désigne la catégorie des Modules inversibles sur l'espace annelé \star . (Donc $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(U)$ est un isomorphisme.)

DEFINITION 3.2. - Un anneau local noethérien est dit parafactoriel si le couple $(\text{Spec}(A), \{m\})$ l'est, où m est le radical de A .

Ceci signifie que $\text{prof } A \geq 2$ et que $\text{Pic}(X) = 0$, où X désigne le complémentaire du point fermé du spectre de A . En effet :

LEMME 3.3. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout ouvert V de X , $p(V)$ est pleinement fidèle,
- (ii) le morphisme naturel $\mathcal{O}_X \rightarrow u_*(\mathcal{O}_U)$ est un isomorphisme,
- (iii) pour tout $z \in Z$, on a $\text{prof } \mathcal{O}_{X,z} \geq 2$.

Preuve. - Faisceau des homomorphismes et suite exacte (1.2).

Soit F un \mathcal{O}_U -Module inversible ; sous les conditions de 3.3, si F provient d'un \mathcal{O}_X -Module inversible, ce dernier ne peut être que $u_*(F)$. Remarquons que $u_*(F)$ est cohérent, car $u_*(\mathcal{O}_U)$ l'est. Soit W l'ouvert de X où $F' = u_*(F)$ est inversible ($W \supset U$). Supposons $W \neq X$ et soit t un point générique de $T = X - W$. Le changement de base $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,t}) \rightarrow X$ commute à l'image directe par u , ce qui prouve, que $\mathcal{O}_{X,t}$ n'est pas parafactoriel. On en déduit :

PROPOSITION 3.4. - Pour que (X, Z) soit parafactoriel, il suffit que, pour tout $z \in Z$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,z}$ le soit.

La réciproque est vraie, triviale, et laissée au lecteur.

Par descente fidèlement plate, on voit qu'un anneau local noethérien, dont le complété est parafactoriel, l'est aussi. La réciproque est inexacte.

Puisque $\text{prof } A \leq \dim A$, un anneau factoriel n'est pas nécessairement parafactoriel. Cependant :

PROPOSITION 3.5. - Soit A un anneau local noethérien de dimension ≥ 2 . Pour que A soit factoriel, il faut et il suffit que :

- (i) pour tout idéal premier p de A , différent de l'idéal maximal m , le localisé A_p soit factoriel
- (ii) $\text{prof } A \geq 2$

(iii) $\text{Pic}(X) = 0$, où $X = \text{Spec}(A) - \{m\}$. ($X' = \text{Spec}(A)$).

Les deux dernières conditions signifient que A est parafactoriel. Preuve de 3.5 : appliquer le critère de normalité de SERRE ([3]), et remarquer que, si l'on a (i) et (ii), alors $\text{Cl}(A) \approx \text{Cl}(X) \approx \text{Pic}(X)$.

Voici le théorème nouveau :

THÉORÈME 3.6. - Un anneau local noethérien A , de dimension ≥ 4 , qui est une intersection complète, est parafactoriel.

Rappelons que la seconde condition signifie qu'il existe un anneau local noethérien régulier R et une suite R -régulière t_1, \dots, t_k d'éléments du radical de R telle que $A \approx R/(t_1, \dots, t_k)$.

On démontre ce théorème par récurrence sur la longueur de la suite : k . Si $k = 0$, A est régulier, donc factoriel (AUSLANDER-BUCHSBAUM [1], voir une jolie démonstration, due à KAPLANSKY, dans [SGA], exposé XI), donc parafactoriel, car $\dim A \geq 2$. Supposons $k > 1$ et le théorème démontré pour $k' < k$. Il suffit de démontrer que le complété de A est parafactoriel. Le résultat suivant est fait pour cela (A y devient B).

PROPOSITION 3.7. - Soit A un anneau local noethérien, complet. Soit m son idéal maximal, soit $t \in m$ un élément A -régulier. Posons

$B = A/tA$, $X' = \text{Spec}(A)$, $X = X' - \{m\}$, $Y' = V(t) \approx \text{Spec}(B)$, $Y = Y' - \{m\}$. Supposons que :

- (i) pour tout $x \in X$, fermé dans X , on ait $\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} \geq 2$,
- (ii) pour tout $x \in Y$, fermé dans Y , on ait $\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} \geq 3$,
- (iii) pour tout $x \in X$, $x \notin Y$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ soit parafactoriel (remarquons que (ii) et (iii) entraînent (i)!
- (iv) $\text{prof } B \geq 4$,

alors $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ est un isomorphisme, (en particulier, pour que B soit parafactoriel il faut et il suffit que A le soit).

D'après 2.1, (i) et (ii) entraînent $\text{Leff}(X, Y)$, donc $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathcal{U}}} \text{Pic}(U) \rightarrow \text{Pic}(\hat{X})$ est un isomorphisme. D'après la démonstration de 2.1, pour tout $U \in \mathcal{U}$ (\mathcal{U} est le filtre des voisinages ouverts de Y dans X), le complémentaire de U dans X est formé d'un nombre fini de points fermés de X . Donc le couple $(X, X - U)$ est parafactoriel d'après (iii), donc $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(\hat{X})$ est un isomorphisme.

Il reste à comparer $\text{Pic}(\hat{X})$ et $\text{Pic}(Y)$. Posons $\mathfrak{J} = (tA)^\sim|X$, c'est un idéal de définition de Y . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_X/\mathfrak{J}^{n+1}$, $Y_n = (Y, \mathcal{O}_n)$. Un module inversible sur \hat{X} est essentiellement une suite de modules inversibles sur les Y_n , se déduisant les uns des autres par réduction modulo \mathfrak{J} . Il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n : \text{Pic}(Y_{n+1}) \rightarrow \text{Pic}(Y_n)$ est un isomorphisme. On considère la suite exacte :

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{a} \mathcal{O}_{n+1}^* \xrightarrow{b} \mathcal{O}_n^* \rightarrow 0,$$

où $a(x) = 1 + t^{n+1}x$ et où b est déduit de l'injection $\mathfrak{J}^{n+1} \subset \mathfrak{J}^n$. Comme chacun sait, le morphisme $H^1(b) : H^1(Y, \mathcal{O}_{n+1}^*) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_n^*)$ s'interprète comme r_n . Par la suite exacte de cohomologie attachée à (3.1), il reste à prouver que $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $i = 1$ et 2 . On applique la suite exacte (1.1) à Y' , à la partie fermée $\{m\}$ et à $\mathcal{O}_{Y'}$, ce qui donne la suite exacte :

$$H^i(Y', \mathcal{O}_{Y'}) \rightarrow H^i(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow H_{\{m\}}^{i+1}(Y', \mathcal{O}_{Y'}) .$$

Le terme de gauche est nul pour $i > 0$, car Y' est affine ; celui de droite l'est pour $i + 1 < 4$ d'après (iv), d'où la conclusion. On en déduit une conjecture de SAMUEL ([4], n° 6) :

THÉORÈME 3.8. - Soit A un anneau local noethérien qui est une intersection complète. Supposons que, pour tout idéal premier p de A , le localisé A_p soit factoriel si $\dim A_p \leq 3$. Alors A est factoriel.

On raisonne par récurrence sur $n = \dim A$. Si $n \leq 3$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $n \geq 4$ et le théorème démontré en dimension $< n$. Les conditions (ii) et (iii) de 3.5 sont vérifiées, puisque A est parafactoriel. La condition (i) résulte de l'hypothèse de récurrence.

Remarque 3.9. - Comme il est dit dans [4], le théorème 3.8 a une interprétation géométrique simple. Soit V une intersection complète de dimension ≥ 3 dans un espace projectif sur un corps. (Ceci signifie que l'anneau de coordonnées homogènes de V est quotient de celui d'un espace projectif par une suite régulière formée d'éléments homogènes.) Supposons que V soit non singulière en codimension ≤ 3 (ce qui entraîne que son anneau de coordonnées homogènes l'est). Alors tout diviseur de V est une intersection complète (peut être décrit par une équation de plus que V). En effet, le groupe des classes de diviseurs de V s'identifie au groupe des classes de diviseurs homogènes de A . D'après [4], proposition 4, ce dernier s'identifie à $\text{Cl}(A)$ et, d'après [4], proposition 5, à $\text{Cl}(A_m)$, où A_m est l'anneau local du sommet du cône projetant de V , i. e. le localisé de A par rapport à l'idéal maximal m engendré par les éléments homogènes de degré > 0 de A . Or $\text{Cl}(A_m) = 0$, par 3.8.

A la vérité, il vaut mieux étudier le cas projectif directement. Le bon énoncé concerne d'ailleurs le groupe de Picard et non le groupe des classes de diviseurs :

PROPOSITION 3.10. - Soit X un sous-préschéma fermé d'un espace projectif sur un corps, de dimension ≥ 3 , qui est une intersection complète. Alors $\text{Pic}(X)$ est le groupe libre engendré par la classe de $\mathcal{O}_X(1)$.

4. Appendice.

De même que celles de 2 (cf. 2.2) les considérations de 3 s'appliquent sans grand changement à l'étude du groupe fondamental, à condition de remplacer "parafactoriel" par "pur" et la catégorie des Modules inversibles par celle des revêtements étales. Dans le cas local, on est conduit au théorème de pureté de Zariski-Nagata (un anneau local noethérien régulier de dimension ≥ 2 est pur), étendu par GROTHENDIECK au cas d'une intersection complète de dimension ≥ 3 . Dans le cas projectif, on trouve :

THÉORÈME 4.1. - Soit X un sous-préschéma fermé d'un espace projectif sur un corps, soit Y une section hyperplane régulière de X . Supposons que, pour tout $x \in X$, fermé dans X ,

(i) on ait $\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} \geq 2$

(ii) on ait $\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} \geq 3$, si, de plus, $x \in Y$,

(iii) $\mathcal{O}_{X,x}$ soit pur, si $x \notin Y$, (par exemple régulier de dimension ≥ 2 , ou une intersection complète de dimension ≥ 3), alors $\pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(X)$ est une bijection et, une fois choisi des points bases dans Y , $\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ est un isomorphisme.

Comparant avec le théorème de Lefschetz dans le cas analytique complexe, on est conduit à supposer que celui-ci est peut-être valable sans hypothèse de non-singularité. Avant d'énoncer une conjecture précise qui devrait intéresser les topologues, définissons des groupes d'homotopie locaux qui devraient remplacer les H_X^i . Soit X un espace topologique localement connexe par arc, et soit $x \in X$. Pour tout voisinage U de x , choisissons un point-base dans $U - x$ de la manière suivante.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow X$, une application continue telle que $f(0) = x$ et $f(t) \neq x$ pour $t \neq 0$ (il en existe si x n'est pas isolé). Pour tout voisinage U de x , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $0 \leq t < \varepsilon$ implique $f(t) \in U$. Les groupes d'homotopie $\pi_1(U - x, f(t))$, $0 < t < \varepsilon$, sont "essentiellement" indépendants de t . Choisissons pour chaque U un tel t , et passant à la limite projective sur les voisinages de U , on pose :

$$\pi_i^X(X) = \varinjlim_U \pi_i(U - x; f(t)) \quad ,$$

et on vérifie que la limite est indépendante de f , à un isomorphisme près.

CONJECTURE 4.2 (GROTHENDIECK). - Soit X un espace analytique projectif de dimension n , muni d'un Module inversible ample L , soit t une section de L , soit Y l'ensemble des zéros de t . Supposons que :

- (i) t soit une section régulière (superflu ?),
- (ii) pour tout $x \in X - Y$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est une intersection complète (devrait pouvoir se remplacer par $\pi_i^X(X) = 0$ pour $i \leq n - 1$),
- (iii) pour tout $y \in Y$, $\text{prof } \mathcal{O}_{X,y} \geq n$.

Alors le morphisme

$$\pi_i(Y) \rightarrow \pi_i(X)$$

est une bijection pour $i < n - 1$, une surjection pour $i = n - 1$.

Pour plus de détails, voir [SGA], exposé XIII : "Problèmes et conjectures".

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUSLANDER (M.) and BUCHSBAUM (D. A.). - Unique factorization in regular local rings, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 45, 1959, p. 733-734.
- [EGA] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNE (J.). - Eléments de géométrie algébrique. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1961 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 4, 8 et 11).
- [SGA] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de Géométrie algébrique. Notes prises par un groupe d'auditeurs. Exposés I à XIII. - Paris, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1962 (multigraphié).
- [2] GROTHENDIECK (Alexander). - Local cohomology. Notes by Robin Hartshorne. - Cambridge, Harvard University, 1961 (multigraphié).
- [3] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale et multiplicités. Cours au Collège de France, rédigé par Pierre Gabriel. Paris, Collège de France, 1958 (multigraphié).
- [4] SAMUEL (Pierre). - Sur les anneaux factoriels, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 156-173.