FRANÇOIS BRUHAT

Intégration p-adique

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 229, p. 97-112
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__97_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 229

Février 1962

INTÉGRATION p-ADIQUE

par François BRUHAT

(d'après un article de F. TOMAS,
à paraître au Boletin de la Sociedad matematica mexicana)

Soit P un corps valué complet non archimédien (donc totalement discontinu) pour une valuation réelle v , et soit G un groupe topologique localement compact. Il est naturel de chercher s'il existe sur G une "mesure de Haar à valeurs dans P ", c'est-à-dire une fonction additive d'ensembles μ définie sur une famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles de G telles que $A \in \mathfrak{F}$ et $x \in G$ entraînent $xA \in \mathfrak{F}$ et $\mu(xA) = \mu(A)$. Il faut évidemment supposer de plus que $\mathfrak{F}$ est assez grande, par exemple stable par intersections finies et contenant un système fondamental de voisinages de e . D'autre part, on voudrait aussi (la positivité faisant défaut) des propriétés de continuité, par exemple que $\mu(xA \cap A)$ dépende continûment de x : cela nécessite de supposer G <u>totalement discontinu</u>, ce que nous faisons désormais.

Le groupe G possède alors beaucoup de sous-groupes <u>ouverts et compacts</u>. Soit $\mathfrak{F}$ la famille de ces sous-groupes : deux éléments K_1 et K_2 de $\mathfrak{F}$ sont commensurables (i. e. $K_1 \cap K_2$ est d'indice fini dans K_1 et dans K_2). Par suite si m est une mesure de Haar à gauche sur G , normalisée par la condition $m(K_0) = 1$ pour un certain $K_0 \in \mathfrak{F}$, les mesures $m(K)$ sont des nombres rationnels pour tout $K \in \mathfrak{F}$. Ceci permet de considérer que $m(K)$ est un élément de P , à condition que le corps P soit de <u>caractérisque zéro</u>, ce que nous supposons désormais. Soit alors $\overline{\mathbb{Q}}$ l'adhérence de $\mathbb{Q}$ dans P (ou bien $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ avec la topologie discrète ou bien $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p$, corps des nombres p-adiques). On traitera dans la suite le cas plus général où P est un <u>espace de Banach</u> sur $\overline{\mathbb{Q}}$: rappelons qu'un tel objet est un espace vectoriel sur $\overline{\mathbb{Q}}$ muni d'une application v de P dans les réels finis ou $+\infty$ satisfaisant aux axiomes :

$$v(\lambda x) = v(\lambda) + v(x) \qquad \text{pour } \lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \text{et} \quad x \in P$$

$$v(x + y) \geq \inf(v(x) , v(y)) \qquad \text{pour } x , y \in P$$

et tel que P soit séparé (ce qui équivaut à dire que $v(x) = +\infty \iff x = 0$)

et complet pour la topologie d'E. V. T. sur $\overline{\mathbb{Q}}$ pour laquelle les ensembles $v(x) \geq r$ $(r \in \mathbb{R})$ forment un système fondamental de voisinages de 0.

Si f est une fonction sur G, et $x \in G$, on pose $(\sigma_x f)(y) = f(xy)$ et $(\tau_x f)(y) = f(yx)$. On note $f|A$ la restriction de f à A.

I. L'intégrale de Riemann.

1. Le cas compact.

Supposons G compact. Une fonction f sur G à valeurs dans P sera dite intégrable au sens de Riemann si ses "sommes de Riemann" convergent. Il faut évidemment préciser ... Une somme de Riemann est associée à une partition et à un choix d'un point dans chaque ensemble de la partition. Le type le plus naturel de partition s'obtient en considérant la décomposition de G en classes à gauche xK modulo K, $K \in \mathfrak{F}$: si $\underline{x} = (x_i)$ est un système (fini) de représentants de ces classes, on appellera somme de Riemann de f associée à K et $\underline{x}$ l'élément

$$S(f , K , \underline{x}) = \sum_i m(K)\, f(x_i) \tag{1}$$

et on dira que f est intégrable si ses sommes de Riemann convergent vers une limite $\int f$ suivant le filtre des sections de la famille $\mathfrak{F}$. Mais cette définition est d'un côté trop stricte : dans certains cas on n'obtient que les fonctions localement constantes. On est amené à être moins exigeant et à choisir une sous-famille $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{F}$, stable par intersections finies et contenant un système fondamental de voisinages de e. D'où :

DÉFINITION 1. - On dit que f est $\mathcal{C}$-R-intégrable d'intégrale I si les sommes de Riemann $S(f , K , \underline{x})$ pour $K \in \mathcal{C}$ convergent vers I suivant le filtre des sections de $\mathcal{C}$.

Il est immédiat que l'on obtient ainsi un espace vectoriel $\mathcal{R}^{\mathcal{C}}$, contenant les fonctions localement constantes, et sur lequel I est une forme linéaire, notée $\int^{\mathcal{R},\mathcal{C}}$. De plus, si on augmente la famille $\mathcal{C}$, l'espace $\mathcal{R}^{\mathcal{C}}$ diminue :

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}' \implies \mathcal{R}^{\mathcal{C}} \supset \mathcal{R}^{\mathcal{C}'} \quad \text{et} \quad \int^{\mathcal{R},\mathcal{C}} = \int^{\mathcal{R},\mathcal{C}'} \quad \text{sur } \mathcal{R}^{\mathcal{C}'}$$

Exemple. - Prenons $P = \mathbb{Q}_p$ et $G = \mathbb{Z}_p^2$: si l'on prend pour $\mathcal{C}$ la famille $\mathfrak{F}$ toute entière (ou seulement la famille des sous-groupes $K_{r,s} = p^r \mathbb{Z}_p \times p^s \mathbb{Z}_p$), on montre aisément que $\mathcal{R}$ se compose uniquement des fonctions localement constantes. Par contre, si l'on se restreint à la famille $\mathcal{C}$ des groupes $K_{r,r}$, alors la fonction $f = \sum p^{3r} \varphi_r$ (où φ_r est la fonction caractéristique de $K_{r,r}$) est $\mathcal{C}$-R-intégrable, d'intégrale $\sum p^r$.

D'un autre côté, la définition 1 est trop large : elle ne permet pas de démontrer que si $f \in \mathcal{R}^{\mathcal{C}}$ et $K \in \mathcal{C}$, alors $f|K$ est R-intégrable sur K (relativement à la famille $\mathcal{C}_K$ des $H \cap K$ pour $H \in \mathcal{C}$). On est amené à augmenter le nombre des partitions licites : on considèrera les partitions Δ de G en ouverts U_i qui sont des translatés à gauche $x_i K_i$ de sous-groupes $K_i \in \mathcal{C}$. Il existe alors un plus petit $K \in \mathcal{C}$ tel que $K \supset K_i$ pour tout i (on suppose que $G \in \mathcal{C}$; comme K_i est d'indice fini dans G, il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes K entre K_i et G) : ce sous-groupe K sera appelé grandeur de Δ, et noté $\Gamma(\Delta)$. On posera aussi $\gamma(\Delta) = \bigcap K_i$. A un système de représentants $\underset{\sim}{x} = (x_i)$ des U_i, on associe la somme de Riemann :

$$S(f, \Delta, \underset{\sim}{x}) = \sum_i m(K_i)\, f(x_i) \qquad . \tag{2}$$

DÉFINITION 2. - On dit que f est strictement $\mathcal{C}$-R-intégrable si ses sommes de Riemann $S(f, \Delta, x)$ convergent quand la grandeur $\Gamma(\Delta)$ converge vers $\{e\}$ suivant le filtre des sections de $\mathcal{C}$.

On obtient ainsi un espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}}$, contenu dans $\mathcal{R}^{\mathcal{C}}$, et contenant les fonctions localement constantes, et l'intégrale est évidemment la restriction de $\int^{\mathcal{R},\mathcal{C}}$. On a facilement la :

PROPOSITION 1. - Soit $K \in \mathcal{C}$, et soit (x_i) un système de représentants des classes à gauche modulo K. Pour que $f \in \widetilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}}$, il faut et il suffit que chacune des fonctions $\sigma_{x_i} f|K$ soit strictement R-intégrable sur K (relativement à la famille $\mathcal{C}_K$), et on a :

$$\int_G f = \sum_i \int_K \sigma_{x_i} f \qquad . \tag{3}$$

Enfin, il est clair que l'intégrale de Riemann (au sens 1 ou 2) est invariante par translations à gauche, et que, si f est intégrable relativement à $\mathcal{C}$, la fonction $\tau_y f$ est intégrable relativement à la famille des $y^{-1} K y$ pour $K \in \mathcal{C}$. Par suite, l'intégrable de Riemann est invariante par translations à droite toutes les fois que la famille $\mathcal{C}$ est invariante par automorphismes intérieurs. Il est facile de donner des exemples où cette condition n'est pas satisfaite et où il existe une $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ avec $\tau_y f \notin \mathcal{R}$.

2. Intégrale et dérivation.

Posons pour $x \in G$ (toujours supposé compact) :

$$w(x) = \sup_{x \in K \in \mathcal{C}} - v(m(K)) \quad . \tag{4}$$

Cette fonction va jouer le rôle d'une "distance" à l'élément neutre : si G est le groupe additif de l'anneau de valuation $\mathcal{O}$ d'une extension L de degré n de $\overline{\mathbb{Q}}$ si $\mathcal{C}$ est la famille des idéaux de $\mathcal{O}$ et si $m(\mathcal{O}) = 1$, on trouve

$$w(x) = nv(x) \quad . \tag{4 bis}$$

Remarquons que dans le cas général, on peut avoir $w(x) = +\infty$ sans que x soit l'élément neutre e et aussi $w(e) \neq +\infty$!

PROPOSITION 2. – Si $f \in \mathcal{R}^{\mathcal{C}}$, on a uniformément sur G :

$$\lim_{x \to y} [v(f(x) - f(y)) - w(x^{-1} y)] = +\infty \quad . \tag{D}$$

En effet, pour tout N, il existe $K \in \mathcal{C}$ avec, pour $K' \subset K$:

$$v(S(f, K', \underset{\sim}{u}) - S(f, K', \underset{\sim}{v})) \geq N \quad .$$

Si $x^{-1} y \in K'$, on en déduit, en considérant des systèmes de représentants $\underset{\sim}{u}$ et $\underset{\sim}{v}$ contenant l'un x, l'autre y, et à part cela identiques :

$$v(m(K') (f(x) - f(y))) \geq N$$

d'où $v(f(x) - f(y)) \geq N + w(x^{-1} y)$ dès que $x^{-1} y \in K$.

COROLLAIRE 1. – Toute fonction $f \in \mathcal{R}^{\mathcal{C}}$ est continue.

On a en effet $w(x^{-1} y) \geq - v(G)$.

COROLLAIRE 2. – Si G est le groupe additif de l'anneau de valuation d'une extension L de degré n de $\mathbb{Q}_p$, et si P est un espace vectoriel sur L, toute fonction R-intégrable sur G est de dérivée nulle.

On a en effet, d'après (4 bis) et (D)

$$\lim_{x \to y} (f(x) - f(y)/(x - y)^n = 0 \quad .$$

La récirpoque du corollaire 2 est inexacte même si $n = 1$.

Prenons $P = \mathbb{Q}_p$ et $G = \mathbb{Z}_p$, et posons

$$f_i(x) = p^{2i} \quad \text{si} \quad x \in p^i + p^{3i} \mathbb{Z}_p$$

et

$$f_i(x) = 0 \text{ sinon} \quad .$$

Alors la fonction $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ est de dérivée nulle, mais n'est pas intégrable (pour la famille des idéaux).

3. Familles amples.

DÉFINITION 3. - La famille $\mathcal{C}$ est dite ample s'il existe une constante α possédant la propriété suivante : pour tout couple K , $K' \in \mathcal{C}$ avec $K \subset K'$, il existe une suite finie d'éléments K_i de $\mathcal{C}$ avec

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = K' \quad \text{et} \quad v(m(K_{i+1})) - v(m(K_i)) \leqslant \alpha \quad .$$

Si v est triviale sur $\mathbb{Q}$, n'importe quelle famille est ample ; si $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p$, la condition ci-dessus signifie que l'indice de K_i dans K_{i+1} n'est pas divisible par une puissance de p supérieure à un nombre fixe. Par exemple, la famille des idéaux est ample dans le groupe additif de l'anneau de valuation d'une extension localement compacte de $\mathbb{Q}_p$, ou d'un corps de séries formelles sur un corps fini.

PROPOSITION 3. - Si la famille $\mathcal{C}$ est ample, on a $\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}} = \mathcal{R}^{\mathcal{C}}$ et la condition (D) est nécessaire et suffisante pour que $f \in \mathcal{R}^{\mathcal{C}}$.

Il suffit (cf. prop. 2) de montrer que (D) $\Longrightarrow$ $f \in \tilde{\mathcal{R}}$. Pour tout N , il existe, d'après (D), un $K \in \mathcal{C}$ tel que

$$(5) \qquad v(f(x) - f(y)) > N + w(x^{-1} y) \qquad \text{pour } x^{-1} y \in K \quad .$$

Nous allons montrer que si Δ et Δ' sont deux partitions de grandeur $\subset K$, on a :

$$v(S(f, \Delta, \underset{\sim}{x}) - S(f, \Delta', \underset{\sim}{x}')) > N - \alpha$$

ce qui entraînera $f \in \tilde{\mathcal{R}}$ (critère de Cauchy!). Posons $H = \gamma(\Delta) \cap \gamma(\Delta')$.

Il suffit de montrer que

$$v(S(f, \Delta, \underset{\sim}{x}) - S(f, H, \underset{\sim}{y}) > N - \alpha \quad .$$

Soit $x_i K_i$ l'un des ouverts de la partition Δ, et soit (y_{ij}) les représentants du système $\underset{\sim}{y}$ contenus dans $x_i K_i$: il suffit de montrer que

$$v(m(K_i) f(x_i) - m(H) \sum_j f(y_{ij})) > N - \alpha \quad .$$

Soit alors H_s des éléments de $\mathcal{C}$ avec

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = K_i \quad \text{et} \quad v(m(H_{s+1})) - v(m(H_s)) \leqslant \alpha$$

et soit (y_k^s) un système de représentants des classes modulo H_s contenues dans $x_i K_i$, avec $y^n = x_i$ et $y_k^o = y_{ik}$. Il suffit de montrer que

$$v(\sum_j m(H_s) f(y_j^s) - \sum_j m(H_{s+1}) f(y_j^{s+1})) > N - \alpha$$

ou encore que si (z_k) est un système de représentants des classes modulo H_s contenues dans une classe yH_{s+1}, on a

$$v(\sum_k m(H_s) f(z_k) - m(H_{s+1}) f(y)) > N - \alpha \quad . \tag{6}$$

Or le premier membre de (6) est aussi égal à

$$v(m(H_s) \sum (f(z_k) - f(y))) \geqslant v(m(H_s)) + \inf_k v(f(z_k) - f(y)) \quad .$$

Mais comme $z^{-1} y \in H_{s+1} \subset K$, on a $w(z^{-1} y) \geqslant - v(m(H_{s+1}))$ et il suffit d'appliquer (5) pour trouver (6).

COROLLAIRE. — <u>S'il existe une constante</u> α <u>telle que</u> $v(m(K)) \geqslant \alpha$ <u>pour tout</u> $K \in \mathcal{C}$, <u>l'espace</u> $\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}}$ <u>est l'espace de toutes les fonctions continues, et on a</u>

$$v(\int f) \geqslant \alpha + \inf_{x \in G} v(f(x)) \quad .$$

Il est en effet clair que $\mathcal{C}$ est ample et que (D) équivaut à la continuité puisque $w(x)$ est borné supérieurement sur G. L'inégalité est triviale.

Ce corollaire s'applique si v est triviale sur $\mathbb{Q}$, ou si $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p$ et si G est l'anneau de valuation d'un corps valué localement compact dont le corps des restes est de caractéristique $q \neq p$.

4. Le cas non compact.

Si G n'est pas compact, on peut donner plusieurs définitions de l'intégrabilité au sens de Riemann, dont aucune n'est très satisfaisante comme on peut s'en douter du fait qu'elles ressemblent automatiquement à une définition d'intégrales "semi-convergentes" dans l'espace euclidien à plusieurs dimensions.

DÉFINITION 4. – On dira que f est strictement $\mathcal{C}$-R-intégrable si pour tout $x \in G$ et tout $K \in \mathcal{C}$ la fonction $\sigma_x f|K$ est strictement R-intégrable sur K (relativement à la famille $\mathcal{C}_K$) et si la famille des intégrales $\int_K \sigma_{x_i} f$ est sommable (quand x_i décrit un système de représentants des classes modulo K).

On posera évidemment

$$\int f = \sum_i \int_K \sigma_{x_i} f$$

et on vérifie que cela ne dépend ni de K ni des x_i. Si $v(m(K)) \geqslant \alpha$ pour tout K, toute fonction continue nulle à l'infini est strictement intégrable.

La définition 4 ne fait en réalité intervenir que les K "assez petits". On peut aussi faire intervenir les K "grands" en supposant la famille $\mathcal{C}$ filtrante croissante : la réunion G^o des sous-groupes K est alors un sous-groupe ouvert de G.

DÉFINITION 5. – Si $G = G^o$, on dira que f est strictement $\mathcal{C}$-R-intégrable au sens large (!!) si $f|K$ est strictement intégrable sur K pour tout $K \in \mathcal{C}$ et si les intégrales $\int_K f$ convergent suivant le filtre des sections croissantes de $\mathcal{C}$.

Si $G \neq G^o$, on combinera les procédés des définitions 4 et 5. On obtient ainsi un espace $\approx{\mathcal{R}}$ contenant l'espace $\tilde{\mathcal{R}}$ de la définition 4.

Exemple. – La fonction caractéristique φ de G est strictement intégrable si et seulement si G est compact. Par contre, si G n'est pas compact et si $v(m(K))$

tend vers $+\infty$ quand K augmente, alors φ est intégrable au sens large, d'intégrale nulle. C'est le cas si $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p$ et si G est le groupe additif d'un corps localement compact L de corps des restes de caractéristique p (en prenant pour $\mathcal{C}$ la famille des idéaux fractionnaires de L).

Il est immédiat que l'intégrale (au sens 4 ou 5) est invariante par translations à gauche. Si d'autre part δ est le module de G (au sens de la théorie de la mesure de Haar), on a $\delta(y) = m(yKy^{-1})/m(K)$ pour tout $K \in \mathcal{C}$ et $\delta(y)$ est donc rationnel. Si la famille $\mathcal{C}$ est invariante par automorphismes intérieurs, alors l'espace des fonctions intégrables (au sens 4 ou 5) est invariante par translations à droite et on a

$$\int \tau_y f = \delta(y)^{-1} \int f \qquad .$$

II. L'intégrale de Lebesgue.

Nous supposerons dans ce paragraphe que la famille $\mathcal{C}$ est totalement ordonnée, ce qui entraîne qu'elle forme une suite (K_i) strictement décroissante avec $a < i < b$, a et b pouvant être finis ou infinis. De plus, nous supposerons que

$$\inf_i v(m(K_i)) = \lim_{i \to +\infty} v(m(K_i)) = -\infty$$

(le cas contraire étant déjà bien connu, puisque toute fonction continue nulle à l'infini est alors R-intégrable). Il en résulte que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe un plus petit sous-groupe $K^r \in \mathcal{C}$ tel que $v(m(K^r)) \geq r$, du moins si $r \leq \sup v(m(K))$.

On pose $G^o = \bigcup K_i$; si G est compact, on supposera que $K_o = G$.

1. Valuation d'un ensemble et d'une fonction.

Soit A un sous-ensemble de G. On posera :

$$(7) \qquad v(A) = \sup v(m(K)) \qquad \text{pour } K \in \mathcal{C} \text{ et } AK = K \qquad .$$

Il est clair que $v(A) > -\infty$ entraîne que A est ouvert. Plus précisément, $v(A) \geq r$ équivaut à $AK^r = A$. Si de plus A est relativement compact, alors A est compact, sa mesure est rationnelle, et on a

(8) $$v(m(A)) \geq v(A) \quad .$$

La fonction v possède les propriétés suivantes :

(9) $$v(A \cup B) \geq \inf(v(A)\ ,\ v(B))\ , \qquad v(A \cap B) \geq \inf(v(A)\ ,\ v(B))$$

(10) $$v(G - A) = v(A)\ , \qquad v(G) = v(G^o) = \sup v(m(K))$$

$$v(K) = v(m(K)) \quad \text{pour} \quad K \in \mathcal{C} \quad .$$

Soit f une fonction sur G à valeurs dans P. Soit $a \in P$ et soit $r \in \underset{\sim}{R}$. On pose :

(11) $$E(f\ ,\ a\ ,\ r) = \{x | x \in G\ ,\ v(f(x) - a) > r\}$$

(12) $$V(f\ ,\ a\ ,\ r) = r + v(E(f\ ,\ a\ ,\ r))$$

(13) $$V(f\ ,\ r) = \inf V(f\ ,\ a\ ,\ r)$$

la borne inférieure de (13) étant prise sur <u>tous les</u> $a \in P$ avec $v(a) \leq r$ <u>et</u> $E(f\ ,\ a\ ,\ r)$ <u>non vide</u> : on voit d'ailleurs aisément que ou bien

$$V(f\ ,\ r) = \inf V(f\ ,\ a\ ,\ r)$$

pour tous les $a \in P$, ou bien on a $v(f(x)) > r$ pour tout $x \in G$ et $V(f\ ,\ r) = +\infty,\ \inf V(f\ ,\ a\ ,\ r) = v(G)$.

On a $V(\lambda f\ ,\ r + v(\lambda)) = v(\lambda) + V(f\ ,\ r)$ pour $\lambda \in \underset{\sim}{Q}$, et on montre en utilisant (9) que $V(f + g\ ,\ r) \geq \inf(V(f\ ,\ r)\ ,\ V(g\ ,\ r))$. Posons alors :

(14) $$V(f) = \inf_r V(f\ ,\ r) \quad .$$

On obtient ainsi une <u>valuation</u> sur l'espace vectoriel de toutes les fonctions, mais pouvant prendre la valeur $-\infty$. Si $V(f) > -\infty$, alors f est <u>uniformément continue</u> (pour la structure uniforme gauche). De plus, on a :

(15) $$\inf v(f(x)) \geq V(f) - v(G) \quad .$$

Enfin, il est immédiat que V est invariante par translations à gauche et que $V(\varphi_A) = v(A)$, si A n'est pas vide.

2. L'espace L .

DÉFINITION 6.

a. Si G est compact, on désigne par $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}(G)$ l'espace vectoriel des fonctions f telles que $V(f) > -\infty$ et que $V(f, r)$ tende vers $+\infty$ quand r tend vers $+\infty$;

b. Si $G = G^o$, on désigne par $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}(G)$ l'espace vectoriel des fonctions f telles que $f|K \in \mathcal{L}^{\mathcal{C}_K}(K)$ pour tout $K \in \mathcal{C}$ et que $V(f|K_i - K_{i+1})$ tende vers $+\infty$ quand i tend vers $-\infty$;

c. Dans le cas général, on désigne par $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}(G)$ l'espace des fonctions f telles que $\sigma_x f|G^o \in \mathcal{L}^{\mathcal{C}}(G^o)$ pour tout $x \in G$ et que $V(\sigma_x f|G^o)$ tende vers $+\infty$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de l'espace homogène G/G^o .

Il faut évidemment montrer que ces définitions sont compatibles. Or les formules (9) entraînent

$$V(f|K, r) \geqslant \inf(r + v(K), V(f, r)) \quad . \tag{16}$$

Si G est compact et $f \in \mathcal{L}(G)$, alors $V(f|K, r) = +\infty$ pour r petit (puisque f est bornée) et (16) montre que $f|K \in \mathcal{L}(K)$. On en déduit que, pour G compact, $f \in L$ équivaut à $\sigma_x f|K \in \mathcal{L}(K)$ pour tout $x \in G$.

De plus, on a , pour $f \in \mathcal{L}$, dans le cas (b)

$$V(f) = \lim_{i \to -\infty} V(f|K_i)$$

(et même $V(f) = V(f|K_i)$ pour i assez petit, sauf peut-être si $V(f) = +\infty$) et, dans le cas (c), $V(f) = \inf_x V(\sigma_x f|G^o)$. Par suite, V est dans tous les cas une vraie valuation $> -\infty$ sur L .

PROPOSITION 4. - L'espace $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}(G)$ est un espace vectoriel valué complet pour la valuation V , composé de fonctions continues. Les translations à gauche définissent une représentation continue isométrique de G dans $\mathcal{L}$. Si $v(G) < +\infty$, l'espace $\mathcal{L}$ est séparé et son injection dans l'espace des fonctions continues bornées est continue. Si $v(G) = +\infty$, les éléments de $\mathfrak{L}$ adhérents à zéro sont les fonctions constantes sur chaque classe à gauche modulo G^0 ; si une suite d'éléments $f_n \in \mathfrak{L}$ converge vers un $f \in \mathfrak{L}$, et si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, alors f_n converge vers f uniformément sur tout compact de la classe $x\mathfrak{D}^0$.

La démonstration est trop technique pour être donnée. Remarquons que si $v(G) = +\infty$, et si $f_n \to f$ dans $\mathfrak{L}$, on peut retrancher de f une fonction g_n adhérente à 0 de manière à ce que $f_n - g_n$ converge uniformément sur tout compact vers f.

PROPOSITION 5. – Pour toute $f \in \mathfrak{L}$, il existe une suite $a_i \in P$, une suite $K_i \in \mathfrak{C}$ et une suite $x_i \in G$ telles que :

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{x_i K_i} a_i \qquad \text{(au sens de } \mathfrak{L}) \tag{17}$$

avec

$$v(a_i) + v(K_i) \to +\infty \tag{18}$$

De plus, on a :

$$V(f) = \sup(\inf_i (v(a_i) + v(K_i))) \tag{19}$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les expressions (17) satisfaisant à (18) de f.

On déduit évidemment de (17) $V(f) \geq \inf_i(v(a_i) + v(K_i))$. On démontre alors (19) pour les fonctions f qui sont sommes finies de fonctions $\varphi_{xK}\, a$. Puis, on passe au cas général en approchant f dans $\mathfrak{L}$ par de telles fonctions.

3. L'intégrale de Lebesgue.

Supposons tout d'abord G compact et soit f avec $V(f) > -\infty$, donc continue. Soit $r \in \underline{R}$ et soit $\underline{a} = (a_i)$ un système de représentants des classes de P modulo le sous-groupe $P_r = \{b \mid b \in P, \ v(b) > r\}$. Comme f est continue et P/P_r discret, il n'y a qu'un nombre fini de a_i tels que $E(f, a_i, r) \neq \emptyset$. D'autre part, on a vu que les mesures $m(E(f, a_i, r))$ sont rationnelles. On peut donc poser :

$$L(f, r, \underline{a}) = \sum_i m(E(f, a_i, r))\, a_i \tag{20}$$

élément de P que nous appellerons "somme de Lebesgue" d'ordre r de f.

PROPOSITION 6. – Soit $f \in \mathcal{L}^{\mathcal{C}}(G)$.

a. Si G est compact, les sommes de Lebesgue de f convergent quand r tend vers $+\infty$, vers une limite notée $\int_G^{L,\mathcal{C}} f$.

b. Si $G = G^o$; les intégrales $\int_{K_i}^{L} f|K_i$ convergent quand i tend vers $-\infty$ vers une limite notée comme plus haut.

c. Dans le cas général, la famille des intégrales $\int_{G^o}^{L} \sigma_x f|G^o$ (pour x décrivant un système de représentants des classes modulo G^o) est sommable et on désigne par $\int_G^{L,\mathcal{C}}$ la somme de cette famille.

d. Dans tous les cas, l'intégrale est une forme linéaire continue sur L. On a $v(\int f) \geq V(f)$ et $\int \varphi_K a = m(K)\, a$ pour tout $a \in P$ et $K \in \mathcal{C}$.

Démontrons (a) : soit $s > r$; chaque ensemble $E(f, a, r)$ est une réunion d'ensembles $E(f, b, s)$ avec $v(b - a) > r$. On en déduit que :

$$(21) \qquad v(L(f, r, \underset{\sim}{a}) - L(f, s, \underset{\sim}{b})) \geq V(f, s) + r - s \quad .$$

Soit k un entier positif, et posons $u = (s - r)/k$. En appliquant (21) à des sommes de Lebesgue d'ordre $r + ju$ et $r + (j + 1)u$, et en "additionnant" les inégalités obtenues, on trouve :

$$(22) \qquad \begin{aligned} v(L(f, r, \underset{\sim}{a}) - L(f, s, \underset{\sim}{b})) &\geq \inf_{0 \leq j \leq k} V(f, r + ju) - (s - r)/k \\ &\geq \inf_{t \geq r} V(f, t) - (s - r)/k \quad . \end{aligned}$$

Faisant tendre k vers l'infini, on obtient :

$$(23) \qquad v(L(f, r, \underset{\sim}{a}) - L(f, s, \underset{\sim}{b})) \geq \inf_{t \geq r} V(f, t)$$

d'où la convergence des sommes de Lebesgue puisque $V(f, t) \to +\infty$, et aussi l'inégalité $v(\int f) \geq V(f)$, car on a $L(f, r, \underset{\sim}{a}) = 0$ si r est très petit (à condition de prendre 0 parmi le système $\underset{\sim}{a}$). Les assertions (b), (c) et (d) sont alors immédiates, sauf l'additivité de l'intégrale, qu'il suffit d'ailleurs de démontrer dans le cas où G est compact.

Or, on a

$$E(f+g\,,\,a\,,\,r) = \bigcup_{v(b+c-a)>r} E(f\,,\,b\,,\,r) \cap E(g\,,\,c\,,\,r) \quad ,$$

d'où l'on tire que la différence $L(f+g\,,\,r\,,\,\underset{\sim}{a}) - (L(f\,,\,r\,;\,\underset{\sim}{a}) + L(g\,,\,r\,,\,\underset{\sim}{a}))$

est somme de termes du type $(b+c-a)\,m(E(f\,,\,b\,,\,r) \cap E(g\,,\,c\,,\,r))$ avec $v(b+c-a) > r$, termes qui sont de valuation

$$> r + \inf(v(E(f\,,\,b\,,\,r)\,,\,v(E(g\,,\,c\,,\,r))) > \inf(V(f\,,\,r)\,,\,V(g\,,\,r)) \quad ,$$

d'où le résultat voulu.

4. Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann.

Il est évident que l'espace $\mathcal{L}$ est une "fonction croissante" de $\mathcal{C}$ (à l'opposé de l'espace $\mathcal{R}$) : il faut donc supposer $\mathcal{C}$ "assez grande" si l'on veut beaucoup de fonctions intégrables. Plus précisément :

PROPOSITION 7. - Si G est compact, on a $\mathcal{L}^{\mathcal{C}} \subset \mathcal{R}^{\mathcal{C}}$ et l'intégrale $\int^{L}$ est la restriction de $\int^{R}$.

Ecrivons f sous la forme (17) satisfaisant à (18), donc à $v(a_i) \to +\infty$ puisque $v(K_i) \leqslant v(G)$. Soit $K \in \mathcal{C}$; on a :

$$S(f\,,\,K\,,\,x) = \sum_k m(K)\, f(x_k) = \sum_i S(\varphi_{x_i K_i}\,,\,K\,,\,x)\, a_i \quad .$$

Si $K \subset K_i$, on a $S(\varphi_{xK}\,,\,K\,,\,x) = m(K_i)$, et si $K \supset K_i$, la même somme est égale soit à 0 , soit à $m(K)$, mais elle est de toute façon de valuation $\geqslant v(K_i)$. On en déduit aussitôt que

$$v(S(f\,,\,K\,,\,x) - \sum_{0}^{\infty} m(K_i)\, a_i) \geqslant \inf_{K \not\subset K_i} (v(a_i) + v(K_i))$$

d'où la proposition.

PROPOSITION 8. - Si G est compact et si $\mathcal{C}$ est ample, on a

$$\mathcal{L}^{\mathcal{C}} = \mathcal{R}^{\mathcal{C}} = \widetilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}} \quad .$$

Soit $f \in \mathcal{R}$ et $N \geqslant 0$. D'après la proposition 2, il existe un $K \in \mathcal{C}$ tel que $x^{-1} y \in K$ entraîne $v(f(x) - f(y)) - w(x^{-1} y) \geqslant N$.

Soit $s \geqslant N - v(K)$: il existe K' et $K'' \subset \mathcal{C}$ avec $K'' \subset K' \subset K$,

$$N - v(K') \leqslant s < N - v(K'')$$

et $v(K') - v(K'') \leqslant \alpha$ (constante "d'amplitude" de C). On a alors

$$v(f(x) - f(y)) \geqslant N - v(K'') > s$$

pour $x^{-1} y \in K''$ et par suite $E(f , s , a) K'' = E(f , s , a)$ pour tout $a \in P$, d'où :

$$V(f , s) \geqslant s + v(K'') \geqslant N - v(K') + v(K'') \geqslant N - \alpha \quad .$$

Par suite $V(f , r) \to + \infty$ pour $r \to + \infty$ et, comme f est continue, cela entraîne $f \in \mathcal{L}^{\mathcal{C}}$.

Remarque. - Dans le cas non compact, on a trivialement $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{R}}$. Mais $\mathcal{L} \not\subset \tilde{\mathcal{R}}$ et $\tilde{\mathcal{R}} \not\subset \mathcal{L}$. On ne sait pas si $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{L}$ dans le cas ample.

III. Divers.

1. Les fonctions réglées.

Si la famille $\mathcal{C}$ n'est pas une suite, on peut néanmoins considérer l'espace $\mathcal{L}'$ des "fonctions réglées", c'est-à-dire des fonctions qui sont somme (en tout point) d'une série de la forme (17) satisfaisant à (18) et mettre sur cet espace la valuation (19). On n'obtient de résultats qu'en supposant que $\mathcal{C}$ satisfait à la condition :

(A) Pour tout $K \in \mathcal{C}$, il existe une constante $\lambda(K)$ telle que $K' \supset K$ et $v(K' \cap K'') < v(K'') - \lambda(K)$ entraînent $K'' \supset K'$.

Cette condition (A) est satisfaite si $\mathcal{C}$ est une suite, ou si les $v(K)$ sont bornés (en prenant $\lambda(K) = 2 \sup |v(H)|$) ou encore si G est compact, car l'indice $[K'' : K' \cap K'']$ est alors un diviseur de $[G : K']$, qui est lui-même un diviseur de $[G : K]$: il suffit donc de prendre $\lambda(K) = - v([G : K])$.

On démontre alors moyennant (A) que $\mathcal{L}'$ est un espace vectoriel valué complet, séparé si $v(G) < + \infty$; si $v(G) = + \infty$, l'adhérence de zéro se compose des fonctions constantes sur chaque classe modulo G° et nulle en dehors d'une infinité dénombrable de telles classes. Enfin, si G est compact et $\mathcal{C}$ ample, on a $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}'$.

Malheureusement, on ne sait pas définir l'intégrale sur $\mathcal{L}'$: cette intégrale ne peut être donnée que par

$$\int \sum \varphi_{x_i K_i} a_i = \sum m(K_i) a_i$$

le second membre étant bien convergent. Mais il faut montrer que ce second membre ne dépend pas de l'écriture (17) choisie ... On peut montrer qu'il suffit de le démontrer en supposant tous les $x_i K_i$ contenus dans un même $K \in \mathcal{C}$. Une condition suffisante est que, pour tout $K \in \mathcal{C}$, il existe une constante $\mu(K)$ avec :

$$v(\bigcap_{i=1}^{n} K_i) \geqslant \inf v(K_i) - \mu(K) \qquad \text{pour } K_i \subset K \quad .$$

2. Intégration des produits.

On démontre que si f et $g \in \mathcal{L}$ et sont bornées (ce qui est automatique si G est compact), alors $fg \in \mathcal{L}$ et

$$V(fg) \geqslant \inf(V(f) + W(f) , V(g) + W(g))$$

avec par exemple $W(f) = \inf v(f(x))$. Par contre, on peut donner des exemples de $f \in \mathcal{L}$ et de sous-ensembles A avec $\varphi_A \in \mathcal{L}$ et tels que $f|A = f\varphi_A$ ne soit pas dans $\mathcal{L}$. On peut aussi avoir f^2 et $g^2 \in \mathcal{L}$ sans que fg le soit.

3. Retour sur les familles amples.

On a vu que la théorie marche particulièrement bien quand $\mathcal{C}$ est ample. Si G est métrisable, on peut toujours trouver une telle famille ; il suffit de choisir une suite décroissante de sous-groupes ouverts et compacts $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ tels que K_i soit distingué dans K_{i-1} ; puis on considère un sous-groupe de Sylow S_i de K_i/K_{i+1} (relatif au nombre premier p tel que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p$, le cas discret étant trivial) et on remonte une suite de Jordan-Hölder de S_i . On obtient ainsi une suite ample de constante $\alpha = 1$.

Cependant, il existe même dans le cas compact métrisable des suites $\mathcal{C}$ qui ne peuvent pas être agrandies en une famille ample. Soit A_q le groupe unimodulaire à 2 variables sur le corps fini à q éléments, et soit T_q le sous-groupe triangulaire. On montre que T_q est un sous-groupe maximal de A , d'indice $q + 1$.

D'après le théorème de Dirichlet, il existe pour tout entier $r > 0$ un nombre premier q_r avec $q_r + 1 \equiv 0$ modulo p^r. Il suffit alors de prendre pour G le produit des A_{q_r} et pour suite $\mathcal{C}$ la suite

$$K_{2i-1} = \prod_{r>i} A_{q_r} \qquad K_{2i} = T_{q_i} \times K_{2i+1} \quad .$$

Si G n'est pas métrisable, j'ignore s'il existe toujours des familles $\mathcal{C}$ amples.