Pierre Samuel

Invariants arithmétiques des courbes de genre 2

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 228, p. 81-93
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__81_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 228

Décembre 1961

INVARIANTS ARITHMÉTIQUES DES COURBES DE GENRE 2

par Pierre SAMUEL

[d'après Jun Ichi IGUSA (*)]

I - Introduction.

Signalons aussitôt que le travail d'IGUSA ne résoud pas, pour les courbes de genre 2, le "problème des modules" tel qu'il a été posé par GROTHENDIECK à diverses reprises dans ce Séminaire.

Définissons d'abord la notion d'invariant arithmétique. Pour chaque caractéristique p (nulle ou non), soit U_p un "domaine universel" de caractéristique p, et soit U la réunion des U_p. Soit $\mathfrak{C}$ un ensemble de variétés algébriques (ici l'ensemble de toutes les courbes de genre 2), chacune définie sur l'un des U_p. Un invariant arithmétique de $\mathfrak{C}$ est une application f de $\mathfrak{C}$ dans U qui satisfait aux conditions suivantes :

1° Si $C \in \mathfrak{C}$ est définie sur U_p, alors $f(C) \in U_p$ ("préservation de la caractéristique") ;

2° Si A, $A' \in \mathfrak{C}$, et si A' est une spécialisation de A, $f(A')$ est l'unique spécialisation de $f(A)$ prolongeant $A \to A'$ ("continuité") ;

3° Si A et $A' \in \mathfrak{C}$ sont birationnellement équivalentes, alors $f(A) = f(A')$.

Ces conditions appellent les précisions suivantes :

a. Deux éléments A, A' de $\mathfrak{C}$ sont dits birationnellement équivalents s'ils ont même caractéristique p, et s'ils sont birationnellement équivalents sur U_p ; l'équivalence birationnelle sur un corps donné est une notion trop fine.

b. Pour la notion de spécialisation, on peut, dans le cas des courbes et en vertu de 3°, se contenter de modèles plans ; alors "spécialiser" A revient à appliquer un homomorphisme aux coéfficients de son équation. Ces homomorphismes peuvent être d'égales ou d'inégales caractéristiques. Dans le cas général on applique l'homomorphisme aux "coordonnées de Chow" de A (ceux qui, bien à tort, n'aiment pas lesdites coordonnées, n'auront aucun mal à traduire ça en termes de "schémas de Hilbert"!).

(*) IGUSA (Jun Ichi). - Arithmetic variety of moduli for genus 2, Annals of Math., Series 2, t. 72, 1960, p. 612-649.

Il résulte de 2° que, si A est définie sur un corps k, $f(A)$ est p-radiciel sur k, et même (en utilisant le fait qu'une variété de caractéristique p est spécialisation d'une variété de caractéristique 0) que $f(A) \in k$.

Il est clair que les invariants arithmétiques de $\mathfrak{C}$ forment un anneau R. Dans le cas des courbes de genre 2, IGUSA démontre les résultats suivants :

THÉORÈME 1. - L'anneau R est un anneau noethérien intégralement clos, engendré sur Z par 10 générateurs, dont 3 seulement sont algébriquement indépendants sur Q.

Toute classe Γ d'équivalence birationnelle de courbes de caractéristique donnée p définit (par 1°) un homomorphisme $h(\Gamma)$ de R dans U_p. Alors :

THÉORÈME 2. - L'application $\Gamma \rightsquigarrow h(\Gamma)$ est une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence birationnelle des courbes de genre 2 et de caractéristique p, sur l'ensemble des homomorphismes de R dans U_p.

Le théorème 2 montre que lesdites classes d'équivalence birationnelle correspondent aux points de la variété affine dont l'anneau est $R \otimes_Z U_p$. Notant f_i ($i = 1, \ldots, 10$) les 10 générateurs de R, deux courbes A, A' de genre 2 sont birationnellement équivalentes si et seulement si $f_i(A) = f_i(A')$ pour tout i.

Les résultats intermédiaires ou additionnels (certains fort intéressants) seront signalés ci-dessous. La méthode d'Igusa est très "calculatoire", et utilise à fond les propriétés spéciales (et mirificques) des courbes de genre 2.

II - Formes normales des courbes de genre 2.

Le genre g d'une telle courbe A satisfait à $g = 2g - 2$, ce qui a des conséquences tout à fait remarquables. Les diviseurs canoniques positifs de A forment une série linéaire de degré 2 et de dimension (projective) 1. Ainsi le corps K des fonctions rationnelles sur A (définies sur un corps algébriquement clos k) est extension quadratique $k(x, y)$ d'une extension pure $k(x)$, d'ailleurs déterminée de façon "canonique" (la courbe A est donc hyperelliptique). Soient c' un diviseur canonique de $k(x)$, $\mathrm{Con}(c')$ son 'image réciproque" (ou "conorme") dans $K = k(x, y)$, et $\mathfrak{d}$ la différente de $K/k(x)$; la formule de Riemann-Hurwitz dit que

$$\text{" } \mathrm{Con}(c') + \mathfrak{d} \text{ est un diviseur canonique de } K \text{ "} ,$$

ce qui montre que $\mathfrak{d}$ est de degré 6, et fait partie du système tricanonique de K. Les composantes de $\mathfrak{d}$ sont les points p tels que 2p soit un diviseur canonique ; ce sont donc les points de Weierstrass de K puisque, en général, un tel point q est un point tel que g.q soit contenu dans un diviseur canonique. En caractéristique $\neq 2$, il y a donc 6 points de Weierstrass distincts.

a. Forme normale en caractéristique $\neq 2$.

Il est classique qu'on peut écrire $y^2 = P(x)$, où $P(x)$ est un polynôme de degré 6 dont les racines correspondent aux 6 points de Weierstrass. En en envoyant 3 en 0, 1, ∞ on est réduit à la "forme de Rosenhain"

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) \qquad (1)$$

Comme il y a 120 $(= 6 \times 5 \times 4)$ choix possibles pour les 3 points de Weierstrass envoyés en 0, 1, ∞, une même classe d'équivalence birationnelle est représentée par 120 formes normales de Rosenhain.

b. Formes normales en caractéristique 2.

Ici l'extension $k(x,y)/k(x)$ est séparable (sinon $k(x,y)$ serait de genre 0), et on peut donc écrire $y^2 - y = R(x)$ d'après ARTIN-SCHREIER. Remplaçant y par $y + B(x)$, on peut s'arranger pour que tous les poles a de $R(x)$ soient d'ordres impairs $n(a)$. L'extension n'est alors ramifiée qu'au-dessus des pôles a ; notant p_a l'unique point de notre courbe de genre 2 au-dessus de a, la différente est $\mathfrak{d} = \sum_a (1 + n(a))\, p_a$, d'où $\sum_a (1 + n(a)) = 6$. Il y a 3 répartitions possibles des entiers impairs $n(a)$, soient $(1,1,1)$, $(3,1)$ et (5), qui donnent les courbes

$$(2) \qquad y^2 - y = \begin{cases} \alpha x + \beta x^{-1} + \gamma (x-1)^{-1} & \text{Type } (1,1,1) \\ x^3 + \alpha x + \beta x^{-1} & \text{Type } (3,1) \\ x^5 + \alpha x^3 & \text{Type } (5) \end{cases}$$

(mettre les pôles a en ∞, 0 ou 1).

Les types sont des invariants birationnels. Un calcul montre que la classe d'équivalence birationnelle de la courbe (C) est caractérisée par :

- les fonctions symétriques élémentaires de α , β , γ , en type $(1 , 1 , 1)$;
- α^3 , β^3 et $\alpha\beta$ en type $(3 , 1)$;
- α^5 en type (5) .

c. Forme normale universelle.

La forme normale universelle est valable en toutes caractéristiques, mais fait intervenir 4 paramètres arbitraires au lieu de 3. Elle dépend du choix (fini) d'un point de Weierstrasss, et du choix (∞') d'un autre point de notre courbe A . C'est :

$$xy^2 + (1 + ax + bx^2)\, y + x^2(c + dx + x^2) = 0 \qquad (3)$$

En caractéristique $\neq 2$, on forme son discriminant

$$(1 + ax + bx^2)^2 - 4x^3(c + dx + x^2)$$

(de degré 5) ; une transformation linéaire sur x envoie deux de ses racines en 0 et 1 , d'ou un polynôme transformé qui sera le second membre de la forme de Rosenhain correspondante.

En caractéristique 2, le type $(1 , 1 , 1)$ est caractérisé par $ab \neq 0$, le type $(3 , 1)$ par " $ab = 0$ sans que $a = b = 0$ ", et le type (5) par " $a = b = 0$ ". Pour chacun des types, IGUSA a des formules explicites donnant α , β , γ (resp. α , β ; resp. α) en fonction de a , b , c , d .

III - Construction d'un anneau R .

En caractéristique $\neq 2$, une courbe A de genre 2 est, de façon unique, revêtement d'ordre 2 de la droite projective D , avec 6 points de ramification (Cf. II); soit $\mathfrak{d}(A)$ le diviseur de degré 6 (sur D) correspondant. L'équivalence birationnelle de A et A' se traduit par l'équivalence projective de $\mathfrak{d}(A)$ et $\mathfrak{d}(A')$. En d'autres termes, on est ramené à la bonne vieille classification des "sextiques binaires" (c'est-à-dire des polynômes homogènes de degré 6 à 2 variables), qu'on trouve dans un bouquin de CLEBSCH. Ces sextiques

$$u_0 X^6 + u_1 X^5 Y + \dots + u_6 Y^6 \tag{4}$$

forment un espace de dimension 7 ; les fonctions sur cet espace qui vérifient les conditions 1°, 2° de I sont les éléments de $Z[u]$. Par transformation linéaire de (X, Y), le groupe linéaire $Gl(2)$ opère sur cet espace, et sur l'anneau $Z[u]$ (la graduation usuelle étant conservée). On détermine d'abord les "<u>covariants</u>" de $Gl(2)$ dans $Z[u]$, c'est-à-dire les polynômes homogènes $P(u)$ que tout $g \in Gl(2)$ multiplie par $(\det g)^{\deg(P)}$. Notant $x_1, \dots, x_6$ les racines du polynôme $u_0 X^6 + u_1 X^5 + \dots + u_6$, et écrivant (ij) au lieu de $x_i - x_j$, on constate que les expressions suivantes sont des covariants :

(5)
$$\begin{aligned}
A(u) &= u_0^2 \sum (12)^2 (34)^2 (56)^2 \quad \text{(15 termes)}\\
B(u) &= u_0^4 \sum (12)^2 (23)^2 (31)^2 (45)^2 (56)^2 (64)^2 \quad \text{(10 termes)}\\
C(u) &= u_0^6 \sum (12)^2 (23)^2 (31)^2 (45)^2 (56)^2 (64)^2 (14)^2 (25)^2 (36)^2 \quad \text{(60 termes)}\\
D(u) &= u_0^{10} \prod (ij)^2 \quad \text{(discriminant).}
\end{aligned}$$

Appliquant ceci à la sextique déduite du polynôme

$$(1 + aX + bX^2)^2 - 4X^3(c + dX + X^2)$$

(lié à la forme normale universelle), on obtient quatre éléments A, B, C, D de $Z[a, b, c, d]$. On constate que les polynômes

(6) $J_2 = 2^{-3} A$, $J_{10} = 2^{-12} D$, $J_4 = 2^{-5}\, 3^{-1}(4J_2^2 - B)$,

$$J_6 = 2^{-6}\, 3^{-2}(8J_2^3 - 160\, J_2 J_4 - C) , \quad J_8 = 2^{-2}(J_2 J_6 - J_4^2)$$

ont leurs coefficients <u>dans</u> Z . Par rapport aux variables $u_0, \dots, u_6$, on voit que $J_{2i}(u)$ est covariant de degré $2i$.

On forme l'anneau gradué $Z[J] = Z[J_2, \dots, J_{10}]$, où J_{2i} est considéré comme homogène de degré $2i$. L'ensemble des fractions de la forme $J_{10}^{-n}\, r(J)$, où $r(J)$ est un élément homogène de degré $10n$ de $Z[J]$, est un anneau de type fini sur Z, <u>qu'on note</u> R .

Pour tout corps k , on pose $k[J] = k \otimes_Z Z[J]$. On a un homomorphisme gradué évident de $k[X_1 , \dots , X_5]$ (gradué en prenant X_i de degré $2i$) sur $k[J]$. On démontre :

LEMME 1. - Le noyau de cet homomorphisme est l'idéal $(X_1 X_3 - X_2^2 - 4X_4)$.

Il résulte du lemme 1 que $k[J]$ est intégralement clos (en caractéristique $\neq 2$, on divise par 4, d'où $J_4 \in k[J_2 , J_6 , J_8 , J_{10}]$, qui est un anneau de polynômes ; en caractéristique 2, l'équation est $X_1 X_3 - X_2^2$, c'est-à-dire celle d'un cône normal). Ceci ayant lieu pour tout corps k , et le Z-module $Z[J]$ étant libre (en tant que sous-module de l'anneau de polynômes $Z[a , b , c , d]$), on en déduit que $Z[J]$ lui-même est intégralement clos. Comme R est l'ensemble des éléments de degré 0 d'un anneau de fractions de $Z[J]$, on a le

THÉORÈME 1. - L'anneau R est intégralement clos.

IV - L'anneau R et les courbes de genre 2.

Par construction les éléments de $\bar{R}$ sont, en caractéristique $\neq 2$, des invariants birationnels des courbes de genre 2. Ceci est vrai en toutes caractéristiques, et nous allons même voir que R fournit un système "complet" d'invariants birationnels.

a. Caractéristique 2.

Le calcul montre que les carrés des invariants birationnels donnés en II (b) s'expriment au moyen des J_{2i} :

-En type $(1 , 1 , 1)$ (caractérisé par $J_2 \neq 0$) on a

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = J_2^{-2} J_4 , \quad (\alpha\beta\gamma)^2 = J_2^{-5} J_{10}$$

$$(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 = J_2^{-4} J_8 + (J_2^{-2} J_4)^3 + (J_2^{-2} J_4)^4 .$$

- En type $(3 , 1)$ (caractérisé par $J_2 = 0$, $J_6 \neq 0$) on a

$$\alpha^6 = J_6^{-1} J_8^{3/4} , \quad \beta^6 = J_6^{-5} J_{10}^3 , \quad (\alpha\beta)^2 = J_6^{-2} J_8^{1/4} J_{10} .$$

- En type (5) , (caractérisé par $J_2 = J_6 = 0$) , on a

$$\alpha^{10} = J_{10}^{-1} J_8^{5/4} \quad .$$

On notera que les seconds membres sont bien des éléments 2-radiciels sur le corps des fractions de H , et qu'ils déterminent les invariants birationnels de façon unique.

b. Caractéristique $\neq 2$.

On part ici de la sextique déduite du polynôme $X(X-1)(X^3 - s_1 X^2 + s_2 X - s_3)$ (où les s_i sont des lettres). On calcule les covariants A , B , C , D pour cette sextique, et on en déduit les covariants J_{2i} au moyen des formules (6) de III. Notons $J_{2i}(s)$ les quantités obtenues, qui sont des polynômes en s_1 , s_2 , s_3 , à coefficients dans Q (et dénominateurs "bornés"). Comme toute sextique peut être transformée, au moyen de Gl(2) , en une sextique du type ci-dessus, l'homomorphisme m de Z[J] sur Z[J(s)] défini par $m(J_{2i}) = J_{2i}(s)$ est un monomorphisme, de sorte qu'il suffit d'étudier les $J_{2i}(s)$.

On a vu, en II, (a), que 120 points (s_1 , s_2 , s_3) correspondent à la même classe d'équivalence birationnelle. Notons c(s) le "point de Chow" représentant le cycle de degré 120 contenant (s_1 , s_2 , s_3) . Si k désigne un corps, k(s) est une extension séparable de degré 120 de k(c(s)). Posons

$$(7) \quad t_1 = J_4(s)\, J_2(s)^{-2} , \quad t_2 = J_6(s)\, J_2(s)^{-3} , \quad t_3 \equiv J_{10}(s)\, J_2(s)^{-5} \quad .$$

Comme les t_i sont des éléments du corps des fractions de R , ce sont des invariants birationnels, et on a $k(t) \subset k(c(s))$. Or les trois surfaces

$$J_4(S) - t_1 J_2(S)^2 = 0 , \quad J_6(S) - t_2 J_2(S)^3 = 0 , \quad J_{10}(S) - t_3 J_2(S)^5 = 0$$

sont de degrés 4, 6, 10, et on en commun les 3 points "fixes" de coordonnées homogènes (1 , 0 , 0 , 0) , (1 , 3 , 3 , 1) , (0 , 0 , 0 , 1) . Restent, d'après BEZOUT, au plus 237 points communs ; d'où $[k(s) : K(t)] \leqslant 237$. Comme $[k(s) : k(t)]$ doit être un multiple de $120 = [k(s) : k(c(s))]$, on en déduit que c'est 120. D'où :

LEMME 2. – Le corps des fractions de $R \otimes_Z k$ est engendré par les quantités t_1, t_2, t_3 (définies par (7)), et coïncide avec $k(c(s))$.

Il en résulte que deux sextiques sont équivalentes (modulo $Gl(2)$) si et seulement si leurs covariants J_{2i} diffèrent seulement par une transformation de la forme $J_{2i} \rightsquigarrow r^{2i} J_{2i}$ avec $r \neq 0$.

c. Détermination des invariants arithmétiques.

Soit f un invariant arithmétique des courbes de genre 2, au sens de I. Soit C la courbe $y^2 = x(x-1)(x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3)$, où les s_i sont des indéterminées sur Q. Comme $f(C)$ n'a d'autre spécialisation que lui-même sur $Q(c(s))$, on a $f(C) \in Q(c(s))$, c'est-à-dire $f(C)$ appartient au corps des fractions de $R \otimes_Z Q$ (lemme 2). Toute spécialisation finie de $R \otimes_Z Q$ sur Q s'étend en une spécialisation C' de C, et $f(C)$ se spécialise nécessairement en la quantité finie $f(C')$. Ainsi $f(C)$ appartient à tout anneau de valuation contenant $R \otimes_Z Q$; d'où $f(C) \in R \otimes_Z Q$ d'après le théorème 3 de III. On a donc $f(C) = P(J)/m(J)$ où P est un polynôme isobare à coefficients dans Q, et m un monôme de même poids. Par spécialisation "d'inégales caractéristiques" (envoyant Z sur $Z/(p)$) on voit, comme ci-dessus, que les coefficients de $P(J)$ ne peuvent avoir de dénominateurs. On a donc $f(C) \in R$. Ainsi $f \rightsquigarrow f(C)$ est un homomorphisme, évidemment injectif, de l'anneau des invariants arithmétiques dans R.

Pour montrer qu'il est surjectif, considérons un élément quelconque g de R. Si C est une courbe de genre 2, elle est birationnellement équivalente à une courbe C_1 de forme normale universelle (II, (c)) ; on calcule les J_{2i}, puis g en fonction des coefficients a, b, c, d correspondants ; soit $g(C)$ l'élément obtenu de U_p (domaine universel de même caractéristique que C). D'après ce qu'on a vu, $g(C)$ ne dépend que de la classe d'équivalence birationnelle de C (et est donc bien déterminé par C). Reste à montrer que l'application $C \rightsquigarrow g(C)$ a la propriété de "continuité" décrite en I; or ceci résulte de ce que toute spécialisation $C \to C'$ s'étend aux formes normales universelles correspondantes. D'où :

LEMME 3. – On a un isomorphisme canonique de l'anneau des invariants arithmétiques des courbes de genre 2 sur l'anneau R défini dans III.

On a donc démontré le théorème 1 de I, à l'exception de l'assertion auxiliaire sur les 10 générateurs (voir, pour cela, le § V). Passons au théorème 2. Pour toute classe d'équivalence birationnelle Γ, soit $h(\Gamma)$ l'homomorphisme correspondant de R (défini par la valeur des invariants sur ladite classe). Notons $\mathfrak{M}$ la "variété" de R (c'est-à-dire l'ensemble de tous ses homomorphismes dans tous les U_p), et $(\mathfrak{C})$ l'ensemble des classes d'équivalence birationnelle des courbes de genre 2. L'application h de $(\mathfrak{C})$ dans $\mathfrak{M}$ est injective, car on a vu que R fournit un système "complet" d'invariants birationnels. Elle est surjective car on montre que les coefficients s_1, s_2, s_3 ci-dessus (resp. α, β, γ de la caractéristique 2) sont entiers sur $R \otimes U_p$, $p \neq 2$ (resp. $R \otimes U_2$), de sorte que tout homomorphisme j de R dans U_p (resp. U_2) s'étend à ces coefficients, et correspond donc à la courbe de coefficients $j(s_i)$ (resp. $j(\alpha)$, etc.). D'où le théorème 2.

IGUSA démontre en utilisant le "principe de dégénérescence" (dit aussi "théorème de connexion"), le résultat suivant :

LEMME 4. - Si j et j' sont deux points de M tels que j' soit une spécialisation de j (i. e. l'homomorphisme j' s'obtient en composant j avec un autre homomorphisme), cette spécialisation s'étend en une spécialisation $C \to C'$ de courbes de genre 2 telle que $j = h(\mathrm{cl}C)$ et $j' = h(\mathrm{cl}C')$ (cl désignant la classe d'équivalence birationnelle).

V - Structure de l'anneau R.

Rappelons qu'on forme l'anneau $Z[J_2, \ldots, J_{10}]$ où les J_{2i} sont liés par

$$J_4^2 + 4J_8 = J_2 J_6 \qquad \text{(cf. III, lemme 1)} \tag{8}$$

qu'on munit les J_{2i} des poids $2i$, et que R est l'ensemble des fractions $P(J)/J_{10}^n$ où P est un polynôme isobare de poids $10n$. Rappelons que R est intégralement clos (III, th. 3). Rappelons enfin que, pour tout corps k, le corps des fractions de $R \otimes_Z k$ est une extension pure de k de degré de transcendance 3 (IV, lemme 2).

Soient y_1, y_2, y_3 des indéterminées sur Q ; posons :

$$y_4 = (y_1 y_3 - y_2^2)/4$$

Alors

$$J_2^{e(1)}\, J_4^{e(2)}\, J_6^{e(3)}\, J_8^{e(4)}\, J_{10}^{-e(5)} \rightsquigarrow y_1^{e(1)}\, y_2^{e(2)}\, y_3^{e(3)}\, y_4^{e(4)}$$

(où $e(1) + 2e(2) + 3e(3) + 4e(4) = 5e(5)$) définit un monomorphisme de R dans $Z[y_1, \ldots, y_4]$. Graduons $Z[y_1, \ldots, y_4]$ en assignant le degré i à y_i ; ainsi R est isomorphe au sous anneau engendré par les éléments homogènes dont le degré est multiple de 5. Notant q une racine primitive cinquième de l'unité, ce sous anneau est (en caractéristiques $\neq 2$ et 5) l'anneau des invariants de la transformation $y_i \rightsquigarrow q^i y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

En caractéristique 2 et 5, il faut utiliser des dérivations.

Pour obtenir des générateurs de R, il s'agit donc de déterminer les systèmes $(e(1), e(2), e(3), e(4))$ d'entiers positifs tels que $e(1) + 2e(2) + 3e(3) + 4e(4)$ soit multiple de 5. D'après (8), on peut supposer que $e(2)$ est 0 ou 1. Les calculs sont élémentaires, et montrent que l'image de R dans $Z[y_1, \ldots, y_4]$ est engendrée par les 10 monômes :

$$(9) \quad y_1^5,\ y_1^3 y_2,\ y_1^2 y_3,\ y_1 y_4,\ y_2 y_3,\ y_2 y_4^2,\ y_3^2 y_4,\ y_3^5,\ y_3 y_4^3,\ y_4^5 \quad .$$

Voici, pour tout corps k, les <u>points singuliers</u> de la variété affine $\mathfrak{M} \otimes k$ dont l'anneau est $R \otimes_Z k$;

a. En caractéristique $\neq 2$, un seul point singulier, correspondant à $J_2 = J_6 = J_8 = 0$; une courbe correspondante est

$$y^2 = x(x-1)(x-1-q)(x-1-q-q^2)(x-1-q-q^2-q^3)$$

(q : racine cinquième primitive de l'unité ; ça donne $y^2 = x^5 - x$ en caractéristique 5).

b. En caractéristique 2, les points singuliers forment une courbe unicursale, définie par $J_2 = J_6 = 0$; ils correspondent aux courbes de "type (5)" :

$$y^2 - y = x^5 + \alpha x^3 \quad .$$

Cette courbe unicursale admet un point "très singulier" (sur $\mathfrak{M} \otimes k$), défini par $J_2 = J_6 = J_8 = 0$, et correspondant à la courbe

$$y^2 - y = x^5 \quad .$$

L'étude des anneaux locaux de ces points singuliers montre que l'on ne peut engendrer R par moins de 10 générateurs. En effet l'espace tangent de Zariski $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ au point "très singulier" de caractéristique 2 est de dimension 10.

REMARQUE - Si k est un corps de caractéristique $\neq 2$, l'utilisation de la relation $y_4 = (y_1 y_3 - y_2^2)/4$ montre que l'image de $P \otimes k$ dans $k[y_1, \dots, y_4]$ est engendrée par des monômes en y_1, y_2, y_3 seulement. Par la même méthode que ci-dessus, on trouve 8 générateurs :

$$(10) \qquad y_1^5 , y_1^3 y_2 , y_1 y_2^2 , y_1^2 y_3 , y_2 y_3 , y_1 y_3^3 , y_2^5 , y_3^5 \quad .$$

On ne peut faire mieux, car l'espace tangent de Zariski au point singulier de $\mathfrak{M} \otimes k$ est de dimension 8.

VI - Courbes de genre 2 possèdant un nombre élevé d'automorphismes.

Une courbe C de genre 2 est un revêtement séparable d'ordre 2 d'une droite projective D, et ceci de façon unique. Son groupe d'automorphismes $G(C)$ admet donc un sous-groupe distingué d'ordre 2 ; le quotient correspondant $G'(C)$ s'appelle le groupe réduit d'automorphismes de C. C'est un groupe d'automorphismes de D, qui permute les points de ramification de $C \to D$. Il est, "en général", réduit à l'élément neutre. IGUSA détermine, par un calcul explicite, tous les cas où ces points de ramification peuvent être permutés de façon non triviale par des transformations projectives de D. Dans ce qui suit, D_{2n} désigne le groupe diédral d'ordre $2n$.

a. Caractéristique $\neq 2$.

Il y a 6 points de ramification, $0, 1, \infty, u_1, u_2, u_3$ (cf. forme normale de Rosenhain). Les cas où le groupe réduit G' est non trivial sont :

1° Les u_i sont de la forme $(a, b, a(1-a)^{-1}(1-b))$; sauf dans les cas ci-dessous, $G' = Z/(2)$.

2° On fait $b = (a-1)/a$, de sorte que les u_i sont de la forme $(a, (a-1)/a, 1/(1-a))$; alors $G' = D_6 (= \mathfrak{S}_3)$.

3° On fait $b = 1/a$, de sorte que les u_i sont de la forme $(a , 1/a , -1)$; sauf dans les cas ci-dessous, on a $G = D_4$ (= groupe de Klein).

4° On fait $a = 2$ dans (2) ou (3), de sorte que les u_i sont $(2 , 1/2 , -1)$; le groupe G' est alors D_{12} .

5° On fait $a = i (=(-1)^{1/2})$ dans (3), de sorte que les u_i sont $(i , -i , -1)$; alors $G' = \mathfrak{S}_4$.

6° Les u_i sont $(1 + q , 1 + q + q^2 , 1 + q + q^2 + q^3)$, où q est une racine primitive cinquième de l'unité ; alors $G' = Z/(5)$.

Il y a deux exceptions. En caractéristique 3, le cas (4) disparait (la courbe tombant au genre 1). En caractéristique 5, les cas (4), (5), (6) se confondent, et $G' = Pl(2 , F_5)$ est d'ordre 120.

On voit que (2) et (3) sont des cas limites de (1), (4) et (5) des cas limites de (2) et de (3), et que (sauf en caractéristique 5) (6) est un cas isolé.

b. <u>Caractéristique</u> 2.

En type $(1 , 1 , 1)$, il y a 3 coefficients α , β , γ .

1' Deux d'entre eux sont égaux ; alors $G' = Z/(2)$.

2' Ils sont tous les trois égaux ; alors $G' = D_6 = \mathfrak{S}_3$.

En type $(3 , 1)$, G' est toujours trivial.

En type (5) , il y a un coefficient α .

3' Pour $\alpha \neq 0$, G' est commutatif de type $(2 , 2 , 2 , 2)$ (donc d'ordre 16)

6' Pour $\alpha = 0$, G' est métabélien d'ordre 80.

On montre que (2') et (3') sont des cas limites de (1'), et que (6') est un cas limite de (3'). Passant aux formes normales universelles, on voit aussi que, pour $n = 1 , 2 , 3 , 6$, le cas (n') de caractéristique 2 est "spécialisation" du cas (n) de caractéristique 0. Les cas (4) et (5) disparaissent en caractéristique 2. IGUSA donne les valeurs des covariants J_{2i} dans tous les cas où G' est non trivial.

IGUSA montre que dans les cas (n) et (n') avec $n \leq 5$, le groupe $G(C)$ contient un élément d'ordre 2 distinct de celui correspondant au revêtement $C \to D$. Cet élément donne un revêtement $C \to A$ d'ordre 2, et la formule de Riemann-Hurwitz montre que A doit être une courbe de genre 1. Étendant $C \to A$ aux jacobiennes, on obtient $J(C) \to A$, de sorte que la jacobienne $J(C)$ est isogène au produit de deux courbes elliptiques.

Au contraire, dans le cas (6) et en caractéristique 0, la jacobienne $J(C)$ est simple, et (comme on pouvait s'y attendre) son anneau d'endomorphismes est l'anneau des entiers du corps des racines cinquièmes de l'unité.