ADRIEN DOUADY

# Cycles analytiques

*Séminaire N. Bourbaki*, 1962, exp. n° 223, p. 5-26
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__5_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 223

Décembre 1961

# CYCLES ANALYTIQUES,

par Adrien DOUADY

[d'après un article de M. F. ATTIYAH et F. HIRZEBRUCH, présenté par ATTIYAH à Zurich en 1960, à paraître au journal "Topology"]

Sauf mention expresse du contraire, tous les espaces considérés dans cet exposé seront homéomorphes à des CW-complexes de dimension finie.

## I. Sorites sur le foncteur $K^*$

### A. Le foncteur $K$.

Pour tout espace $X$, soit $J(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes unitaires sur $X$ (on n'exige pas que la dimension soit la même sur les différentes composantes connexes de $X$).

$J(X)$, muni des opérations $\oplus$ et $\otimes$, est un semi-anneau. Soit $K(X)$ l'anneau symétrisé. On a donc une application

$$J(X) \to K(X) \quad ,$$

qui n'est pas injective en général, car les éléments de $J(X)$ ne sont pas réguliers pour l'opération $\oplus$.

$K$ est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces considérés et des classes d'homotopie d'applications continues dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires. Si $p$ est un espace réduit à un point, $K(p) = \underset{\sim}{Z}$, l'isomorphisme donné par la dimension.

### B. Le foncteur $K^0$.

Si $X = (|X| , x_0)$ est un espace pointé, et $|X|$ l'espace sous-jacent, on pose

$$K^0(X) = \operatorname{Ker} i^* : K(|X|) \to K(x_0) \quad .$$

On a naturellement

$$K(|X|) = K(x_0) \oplus K^0(X) \quad ,$$

et $K^0(X)$ est un sous-anneau non unitaire de $K(|X|)$ .

PROPOSITION I. B. - Le foncteur $K^0$ de la catégorie des espaces pointés dans la catégorie des anneaux commutatifs (sans unité en général) vérifie les propriétés suivantes :

a. Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ d'espaces pointés, on a

$$K^0(\bigvee_{i\in I} X_i) = \prod_{i\in I} K^0(X_i)$$

où $\bigvee X_i$ est le bouquet (wedge) des $X_i$ , muni de la topologie limite inductive des bouquets finis ;

b. Pour toute paire $(X , Y)$ , où $Y$ est un sous-complexe de $X$ , et a même point de base, on a la suite exacte, chère à ECKMANN

$$\ldots \to K^0(S^1 \wedge Y) \xrightarrow{\delta} K^0(X/Y) \to K^0(X) \to K^0(Y) \quad .$$

c. Pour tout couple $X$ , $X'$ , on a un produit naturel,

$$K^0(X) \otimes K^0(X') \to K^0(X \wedge X')$$

symétrique au sens suivant : Si $a \in K^0(X)$ , $a' \in K^0(X')$ ,

$$aa' \in K^0(X \wedge X') \ , \quad a'a \in K^0(X' \wedge X)$$

Alors

$$aa' = \sigma^* (a'a)$$

où $\sigma : X \wedge X' \to X' \wedge X$ est la symétrie canonique.

Ce produit est également associatif.

<u>Esquisse de la démonstration</u>. - Les parties (a) et (b) se démontrent en identifiant $K^0(X)$ à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de $X$ dans $BU_\infty \times \mathbb{Z}$

respectant le point de base (mension expresse : $BU_\infty \times \underset{\sim}{Z}$ n'est pas de dimension finie).

Pour la partie (c), on observe que la suite exacte :

$$K^0(S^1 \divideontimes (X \times X')] \rightleftarrows K^0(S' \divideontimes (X \vee X')] \to K^0(X \divideontimes X') \to K^0(X \times X') \rightleftarrows K^0(X \vee X')$$

"splitté" naturellement. On a donc

$$K^0(X \times X') = K^0(X \divideontimes X') \oplus K^0(X \vee X') \quad .$$

Si $a \in K^0(X) \subset K(|X|)$, $b \in K^0(X') \subset K(|X'|)$, le produit tensoriel $ab \in K(|X| \times |X|)$ a une image nulle au point de base $(x_0 , x_0')$, ainsi que sur $|X \vee X'|$. Il définit donc un élément de $K^0(X \divideontimes X')$.

REMARQUE. - Soient $Y$, $Y'$ deux sous-complexes de $X$. L'application diagonale

$$X \to X \times X \to (X/Y) \times (X/Y') \to (X/Y) \divideontimes (X/Y')$$

envoie $Y \cup Y'$ au point de base. On a donc une application diagonale

$$\Delta : X/Y \cup Y' \to (X/Y) \divideontimes (Y/Y')$$

qui donne un produit naturel

$$K^0(X/Y) \circ K^0(X/Y') \to K^0(X/Y \cup Y')$$

C. Le foncteur $K^*$

ALIYAH donne l'énoncé suivant du théorème de BOTT [1] :

THÉORÈME de Bott.

a. $K^0(S^1) = 0$ , $K^0(S^2) = \underset{\sim}{Z}$ , et a pour générateur $\eta = h - 1$. $h \in K(|S^2|)$ est la classe du fibré de Hopf, et 1 désigne la classe du fibré trivial de dimension 1.

Si $\varphi : S^2 \to S^2$ est de degré $k$ , $\varphi^*_{(\eta)} = k\eta$ .

b. Pour tout espace pointé $X$ , l'application

$$\eta_* : K^0(X) \to K^0(S^2 \wedge X)$$

qui à $a \in K^0(X)$ associe le produit $\eta . a$ est un isomorphisme additif.

La démonstration ne sera pas donnée ici.

L'isomorphisme de Bott permet d'identifier

$$K^0(S^{2k} \wedge X) \quad \text{à} \quad K^0(X) \quad \text{et} \quad K^0(S^{2k+} \wedge X) \quad \text{à} \quad K^0(S \wedge X)$$

pour tout $k$ . Cette identification est fonctorielle, et, de plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K^0(S^1 \wedge Y) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\eta_*"] & K^0(X/Y) \arrow[d, "\eta_*"] \\
K_0(S^3 \wedge Y) \arrow[r, "\delta"] & K^0(S^2 \wedge X/Y)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, car il fait intervenir la symétrie $S^1 \wedge S^2 \to S^2 \wedge S^1$ qui est un homéomorphisme de degré $+1$ de $S^3$ sur elle-même.

En posant

$$K^1(X) = K^0(S^1 \wedge X) = K^0(S^{2k+1} \wedge X) \qquad ,$$

et

$$K^*(X) = K^0(X) \oplus K^1(X)$$

(les indices 0 et 1 doivent être considérés comme pris dans le groupe $\mathbb{Z}_2$ à 2 éléments), on obtient donc un foncteur de la catégorie des CW-complexes de dimension finie pointés et des classes d'homotopie d'applications respectant les points de base dans la catégorie des groupes gradués par $\mathbb{Z}_2$ , qui, pour chaque paire $(X , Y)$ où $Y$ est un sous-complexe de $X$ , donne naissance à une suite exacte

$$\begin{tikzcd} K^*(X/Y) \arrow[r] & K^*(X) \arrow[r] & K^*(Y) \arrow[ll, bend left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

où $\delta$ change la dimension.

D'autre part, le produit

$$K\,(S^k \wedge X) \otimes K^o(S^{k'} \wedge X') \to K^o(S^k \wedge X \wedge S^{k'} \wedge X) = K^o(S^{k+k'} \wedge X \wedge X')$$

donne un produit

$$K^*(X) \otimes K^*(X') \to K^*(X \wedge X') \qquad ,$$

compatible avec la graduation et antisymétrique, i. e.

$$aa' = (-1)^{kk'} \; \sigma^*(a'a)$$

si $a \in K^k(X)$ et $a' \in K^{k'}(X')$ . Ceci provient de ce que la symétrie

$$S^k \wedge S^{k'} \to S^{k'} \wedge S^k$$

est un homéomorphisme de degré $kk'$ de $S^{k+k'}$ sur elle-même.

En composant avec la diagonale $X \to X \wedge X$ , on munit naturellement chaque $K^*(X)$ d'une structure d'anneau gradué par $\underset{\sim}{Z}_2$ anticommutatif. Enfin, pour toute paire $(X , Y)$ et tout espace pointe $Z$ , le diagramme

$$\begin{tikzcd} K^*(Y) \otimes K^*(Z) \arrow[rr, "\delta \otimes I"] \arrow[dd] & & K^*(X/Y) \otimes K^*(Z) \arrow[d] \\ & & K^*[(X/Y) \wedge Z] \arrow[d, leftrightarrow] \\ K^*(Y \wedge Z) \arrow[rr, "\delta"] & & K^*(X \wedge Z/Y \wedge Z) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

D. Le foncteur $K^o$ pour les paires.

Pour toute paire $(X , Y)$ , où $X$ est un C-W-complexe de dimension finie et $Y$ un CW-complexe, on pose alors

$$K^o(X , Y) = K^o(X/Y) \ , \qquad K^*(X , Y) = K^*(X/Y)$$

$X/Y$ est un espace pointé (si $Y = \emptyset$ , $X/Y$ s'obtient, à partir de $X$ , en ajoutant un point isolé et $K^o(X , \emptyset) = K(X)$ ).

Si $X$ et $Y$ sont des espaces homéomorphes à des C-W-complexes de dimension finie, et si $Y$ est un sous-espace de $X$ , mais qui ne puisse pas être considéré comme un sous-complexe, on se ramène au cas précédent en approchant l'injection $i : Y \to X$ par une application simpliciale, et en remplaçant $X$ par le "mapping cylinder". On définit ainsi $K^*(X , Y)$ . On appliquera ceci en particulier au cas où $X$ est une variété et $Y \subset X$ un ouvert.

E. Fibré différence.

Soient $(X , Y)$ une paire, $E$ , $E'$ deux fibrés vectoriels complexes sur $X$ et $f$ un isomorphisme de $E_{|Y}$ sur $E'_{|Y}$ . On définit un élément $d(E' , E , f)$ de la façon suivante : on se ramène d'abord au cas où $Y$ est un sous-complexe de $X$ . Supposons que la dimension de $E$ soit bornée sur $Y$ , et soit $F$ un fibré sur $X$ tel que $(E \oplus F)_{|Y}$ soit trivial (ceci est possible, car $X$ est supposé de dimension finie).

Soient

$$\alpha : Y \times \underset{\sim}{C}^r \overset{\approx}{\to} E \oplus F_{|Y}$$

une trivialisation de $E \oplus F_{|Y}$

$$\alpha' = (f \oplus I) \circ \alpha : Y \times \underset{\sim}{C}^r \overset{\approx}{\to} E' \oplus F_{|Y}$$

la trivialisation correspondante de $E' \oplus F_{|Y}$ . Soit $(E \oplus F)/\alpha$ le fibré sur $X/Y$ obtenu en identificatiant dans $E \oplus F$ les points $\alpha(y , z)$ et $\alpha(y' , z)$ pour $y , y' \in Y$ . Alors $(E \oplus F/\alpha)$ et $(E' \oplus F/\alpha')$ sont des éléments de $K(|X/Y|)$ et

$$d(E', E, f) = (E' \oplus F/\alpha') - (E \oplus F/\alpha) \in K^0(X/Y) \quad .$$

L'élément ainsi défini ne dépend pas du choix de $F$ ni de $\alpha$ : Soient en effet $G$ un autre fibré sur $X$ tel que $E \oplus G$ soit trivial sur $Y$, $\beta$ une trivialisation de $(E \oplus G)_{|Y}$ et $\beta'$ la trivialisation correspondante de $(E' \oplus G)_{|Y}$.

On est ramené à montrer que

$$(E \oplus F/\alpha) \oplus (E' \oplus G/\beta') \approx (E' \oplus F/\alpha') \oplus (E \oplus G/\beta) \quad .$$

Or ces deux fibrés s'obtiennent à partir du même fibré $E \oplus E' \oplus F \oplus G$ par deux trivialisations qui sont homotopes, comme on le voit facilement en remarquant que l'identité et la symétrie de $E \oplus E$ sont homotopes parmi les automorphismes de $E \oplus E$. Dans le cas où $E$ n'a pas une dimension bornée, on peut trouver un fibré $H$ sur $X$ tel que la dimension de $E/i(H)$ soit bornée, et deux injections $i : H \to E$ et $i' : H \to E'$ telles que $i' = f \circ i$ sur $Y$. Ceci parce qu'on a supposé $X$ de dimension finie. On peut même prendre $H$ trivial sur chaque composante connexe de $X$.

On pose alors

$$d(E', E, f) = d(E'/i'M, E/iH, f) \quad .$$

REMARQUE. - Dans la construction précédente, le fait de prendre des trivialisations $\alpha$ et $\alpha'$ se correspondant par $f$ est essentiel. Ainsi les fibrés $E$ et $E'$ peuvent très bien être isomorphes, avec cependant $d(E', E, f) \neq 0$, si $f$ n'est pas un isomorphisme qui s'étende sur $X$.

EXEMPLE. - $X = \mathbf{C}$, $Y = \mathrm{C}\, U$, où $U$ est un disque de centre $0$. $E = E'$ est le fibré trivial de fibre $\mathbf{C}$, $f : E_z \to E'_z$ est la multiplication par $z$ pour $z \in X$. C'est bien un isomorphisme pour $z \in Y$. Bien que $E$ et $E'$ soient isomorphes, $d(E', E, f)$ est le générateur $\eta$ de $K^0(X, Y) = K^0(S^2)$.

F. <u>Fibré différence généralisé.</u>

Plus généralement, soient $E_0, \ldots, E_n$ des fibrés vectoriels sur $X$, et soit

$$0 \to E_{n|Y} \xrightarrow{f_n} E_{n-1|Y} \cdots \xrightarrow{f_1} E_{o|Y} \to 0$$

une suite exacte de fibrés sur $Y$ . On définit un élément

$$d(E_o , \dots , E_n , f_1 , \dots , f_n) \in K^o(X , Y)$$

de la façon suivante : On casse la suite exacte en suites exactes courtes

$$0 \to B_k \to E_{k|Y} \to B_{k-1} \to 0$$

chacune de ces suites exactes courtes " splite " et donne un isomorphisme

$$E_{k|Y} \xrightarrow{\approx} B_k \oplus B_{k-1} \quad .$$

Finalement on obtient un isomorphieme

$$\begin{tikzcd} \bigoplus E_{2i+1|Y} \arrow[r, "\approx"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \bigoplus B_i & \bigoplus E_{2i|Y} \arrow[l, "\approx"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

et on pose

$$d((E_i) , (f_i)) = d(\bigoplus E_{2i} , \bigoplus E_{2i+1} , f] \in K^o(X , Y) \quad .$$

Cet élément ne dépend pas de la façon dont on scinde les suites exactes courtes, car deux scissions sont homotopes.

PROPOSITION I. F. - Soient $X$ un CW-complexe , $Y$ et $Y'$ deux sous-complexes de $X$ , $L = [(E_i) , (f_i)]$ et $L' = [(E'_j) , (f'_j)]$ deux complexes de fibrés vectoriels complexes sur $X$ , tels que $L$ soit acyclique sur $Y$ et $L'$ acyclique sur $Y'$ .

Alors le complexe $L \otimes L'$ est acyclique sur $Y \cup Y'$ , et

$$d(L \otimes L') = d(L).d(L')$$

le produit étant pris au sens de

$$K^{o}(X , Y) \otimes K^{o}(X , Y') \to K^{o}(X , Y \cup Y') \quad .$$

La démonstration est laissée au lecteur.

## II. La suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH.

### A. La suite spectrale.

Soit $X$ un CW-complexe de dimension finie pointé. Pour tout $p$ , $X_p$ est son p-squelette (réduit au point de base pour $p < 0$ ).

Pour $p \geq q$ , posons $K(p , q) = K^{*}(X_p , X_q)$ . Pour $p \geq q$ , $p' \geq q'$ , $p \geq p'$ , $q \geq q'$ , on a des homomorphismes

$$\rho : K(p , q) \to K(p' , q') \quad ,$$

et pour $p \geq q \geq r$ , des homomorphismes

$$\delta : K(q , r) \to K(p , q) \quad ,$$

qui font de $K(p , q)$ un système spectral [2]. De plus

$$K(p , q) = K(p' , q) \quad \text{si} \quad p , p' \geq \dim X$$

et

$$K(p , q) = K(p , q') \quad \text{si} \quad q , q' < 0$$

ce qui permet de définir $K(p , q)$ quand $p = +\infty$ ou $q = -\infty$ . On pose

$$K = K(+\infty , -\infty) = K^{*}(X) \quad .$$

On a donc une suite spectrale $(E_r)$ avec :

$$E_1 = \bigoplus K(p\,,\, p-1)\,, \quad E_1^{p,(q)} = K^{(p+q)}(X_p\,,\, X_{p-1})$$

$$E_\infty = \bigoplus F_p\, K/F_{p+1}\, K\,, \quad E_\infty^{p,(q)} = F_p\, K^{(p+q)}/F_{p+1}\, K^{(p+q)}$$

où

$$F_p\, K^{(q)} = \operatorname{Ker} K^{(q)}(X) \to K^{(q)}(X_{p-1})$$

(les indices entre parenthèses sont pris dans $\underset{\sim}{Z}_2$ )

B. Calcul des termes $E_1$ et $E_2$ .

$$X_p/X_{p-1} = \bigvee_{\sigma_p} S^p$$

où $\sigma_p$ est l'ensemble des cellules de dimension $p$ de $X$ , et

$$K^*(X_p/X_{p-1}) = \prod_{\sigma_p} K^*(S^p) \quad .$$

Or, d'après le théorème de Bott,

$$K^{(p)}(S^p) = \underset{\sim}{Z}\,, \quad K^{(p+1)}(S^p) = 0 \quad .$$

Donc

$$K^{(p)}(X_p\,,\, X_{p-1}) = C^p(X\,;\, \underset{\sim}{Z}) \quad ,$$

$$K^{(p+1)}(X_p\,,\, X_{p-1}) = 0$$

où $C^p(X)$ est le groupe des cochaînes cellulaires de dimension $p$ sur $X$ à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ (les cochaînes de dimension $0$ doivent s'annuler au point de base).

Finalement :

$$E_1^{p,(0)} = C^p(X\,;\, \underset{\sim}{Z})$$

$$E_1^{p,(1)} = 0$$

l'opérateur

$$d_1 : E_1^{p,(q)} \to E_1^{p+1,(q)}$$

n'est autre que l'opérateur différentiel des cochaînes

$$d : C^p(X ; \underset{\sim}{Z}) \to C^{p+1}(X ; \underset{\sim}{Z}) \quad .$$

On peut le vérifier en se ramenant par fonctorialité au cas où $X$ est une boule de dimension $p + 1$ , avec la décomposition cellulaire minimale.

On en conclut que

$$E_2^{p,(0)} = H^p(X ; \underset{\sim}{Z})$$

$$E_1^{p,(1)} = 0$$

C. Les différentielles de la suite spectrale.

L'opérateur $d_2$ , et plus généralement les opérateurs $d_{2r}$ sont nuls, car

$$d_{2r} : E_{2r}^{p,(q)} \longrightarrow E_{2r}^{p+2r,(q+1)}$$

et l'un de ces deux groupes est réduit à $0$ .

On a donc $E_3 = E_2$ , et l'opérateur $d_3 : H^p(X ; \underset{\sim}{Z}) \to H^{p+3}(X ; \underset{\sim}{Z})$ provient d'une opération cohomologique stable de type $(3 , \underset{\sim}{Z} , \underset{\sim}{Z})$ [4]. Cette opération est l'opération $Sq^3$ de Steenrod. En effet les seules opérations du type donné sont $0$ et $Sq^3$. Soit $A$ un espace obtenu en attachant à $S^4$ une cellule de dimension $6$ , puis une autre de dimension $7$ , et tel que

$$H^4(A ; \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Z} , \quad (\text{générateur } \alpha) \quad ,$$

$$H^5(A ; \underset{\sim}{Z}) = H^6(A ; \underset{\sim}{Z}) = 0$$

$$H^7(A ; \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Z}_2 , \quad (\text{générateur } \beta = Sq^3\alpha) \quad .$$

Soit $\varepsilon : S^4 \to BU_\infty$ le générateur de $\Pi_4(BU_\infty) = \underset{\sim}{Z}$. Si $c \in H^4(BU_\infty ; \underset{\sim}{Z})$ désigne l'élément qui donne la 2e classe de Chern, on a $\varepsilon^* c = -1 \in H^4(S^4 ; \underset{\sim}{Z})$ [5]. Comme $Sq^3 c \in H^7(BU_\infty) = 0$, et $Sq^3 \alpha \neq 0$, il n'existe pas d'application $\varphi : A \to BU_\infty$ telle que $\varphi^* c = \alpha$, i. e. $c : S^4 \to BU_\infty$ ne se prolonge pas à $A$. L'application $K^0(A) \to K^0(S^4)$ n'est donc pas surjective, et la différentielle $d_3$ de la suite spectrale d'Atiyah-Hiezebruch de $A$ n'est pas nulle. On a donc bien $d_3 = Sq^3$. Les différentielles $d_{2r+1}$ sont des opérations cohomologiques secondaires ou supérieures qu'on ne sait pas vien décrire.

Remarquons cependant que, si les $H^k(X ; \underset{\sim}{Z})$ non nuls correspondent à des $k$ qui sont tous de même parité, on a $d_r = 0$ pour $r \geqslant 2$ et $K^*(X)$ admet $H^*(X ; \underset{\sim}{Z})$ comme gradué associé.

Remarquons également qu'un élément de l'image de $d_r$ est toujours un élément de torsion de $E_r$. S'il n'en était pas ainsi, le premier $d_r$ faisant exception définirait une opération cohomologique stable de type $(r , \underset{\sim}{Q} , \underset{\sim}{Q})$ non nulle or on sait bien qu'il n'en existe pas.

On peut aussi le voir à l'aide du caractére de Chern, qui est un morphisme de foncteurs

$$Ch : K^* \to H^*( \ ; \underset{\sim}{Q}) \quad .$$

D. <u>Homomorphismes latéraux</u>.

Soit $X$ un espace pointé ou une paire d'espaces, et soit $k$ le plus petit entier tel que $H^k(X ; \underset{\sim}{Z}) \neq 0$. On a alors des homomorphismes latéraux ("edge homomorphisme")

$$K^{(k)}(X) \to H^k(X ; \underset{\sim}{Z})$$

$$K^{(k+1)}(X) \to H^{k+1}(X ; \underset{\sim}{Z})$$

dont l'image se compose des éléments $u$ tels que $d_r u = 0$ pour tout $r \geqslant 2$.

Plus généralement généralement, on dira qu'un élément $a \in K^{(p)}(X)$ représente un élément $u \in H^p(X ; \underset{\sim}{Z})$ si

$$a \in F_p\, K^{(p)}(X) = \operatorname{Ker} K^{(p)}(X) \to K^{(p)}(X_{p-1})$$

et si l'image de $a$ dans $F_p\, K/F_{p+1}\, K = E_\infty^{p,(o)}$ est représentée par $a \in E_2^{p,(o)}$ .

Pour que $u \in H^p(X\,;\,\underset{\sim}{Z})$ soit représenté par un élément $a \in K^{(p)}(X)$ , il faut et il suffit que $d_r\, u = 0$ pour tout $r$ .

## III. Structures complexes sur les fibrés.

### A. Condition nécessaire pour l'existence de structures complexes.

THÉORÈME 2. - Soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel réel orientable de dimension $2k$ . Pour que $E$ admette une structure complexe, il faut que la classe fondamentale $u \in H^{2k}(E\,,\,E^*\,;\,\underset{\sim}{Z})$ , où $E^*$ est le complémentaire de la section nulle, vérifie $d_r\, u = 0$ , pour tout $r$ , dans la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de la paire $(E\,,\,E^*)$ .

DÉMONSTRATION. - Supposons $E$ muni d'une structure complexe. Pour $x \in E$ , posons $E(x) = \pi^{-1}(\{x\})$ . On va construire un élément $a \in K^o(E\,,\,E^*)$ qui représente $u$ par l'homomorphisme latéral. Soit $\Lambda = \bigoplus_{0 \leq i \leq k} \Lambda^i$ le fibré sur $X$ d'algèbre extérieure sur $\underset{\sim}{C}$ du fibré $E'$ dual de $E$ , et soit $L_i = \pi^* \Lambda^i$ le fibré image réciproque sur $E$ . Soit $f_i : L_i \to L_{i-1}$ l'homomorphisme du fibré défini de la façon suivante : si $\ell \in L_i(y) = \Lambda^i(x)$ où $x = \pi(y)$ ; $f_i(\ell)$ est le produit intérieur de $\ell \in \Lambda^i E'(x)$ avec $y \in E(x)$ , soit

$$f_i(\ell) = (y \llcorner \ell) \in \Lambda^{i-1} E'(x) = L_{i-1}(y) \qquad .$$

$L = ((L_i)\,,\,(f_i))$ est un complexe de fibrés sur $E$ , acyclique sur $E^*$ , comme on le vérifie en prenant une base de $E(\pi(y))$ comportant $y$ . Posons

$$a = dL \in K^o(E\,,\,E^*)$$

soit $x_o \in X$ , et supposons $X$ connexe (le cas général s'y ramène immédiatement). Pour montrer que $a$ représente $u$ , il suffit de vérifier que l'image de $a$ dans $K^o(E(x_o)\,,\,E^*(x_o))$ est le générateur de Bott $\eta^k$ , qui représente le générateur $\xi \in H^{2k}(E(x_o)\,,\,E^*(x_o)\,;\,\underset{\sim}{Z})$ défini par l'orientation donnée par la structure complexe, car $u$ est caractérisé par le fait qu'il induit $\xi$ sur la fibre. En prenant une base de $E(x_o)$, on l'identifie à $\underset{\sim}{C}^n$ et le complexe $L_{|E(x_o)}$ s'identifie au produit tensoriel $\bigotimes_{1\leq j\leq k} A_j$, où $A_j$ est le complexe

$$0 \to \underset{\sim}{C} \xrightarrow{z_j} \underset{\sim}{C} \to 0 \qquad ,$$

$z_j$ désignent la multiplication par la $j$-ième coordonnée. $d(A_j)$ est donc le générateur de Bott $\eta \in K^o(E(x_o), U_j)$, où $U_j$ est défini par $z_j \neq 0$. On en déduit que

$$d(L_{|E(x_o)}) = \eta^k \in K^o(E(x_o), E^*(x_o))$$

en appliquant la proposition I. F généralisée au cas de $k$-facteurs.

B. Structure complexe sur des fibrés normaux.

COROLLAIRE du théorème 2. - Soient $V$ une variété $C^\infty$ de dimension $n$, $W \subset V$ une sous-variété fermée de dimension $n-2k$ dont le fibré normal $N$ admette une structure complexe. Alors l'élément $v \in H^{2k}(V ; \underset{\sim}{Z})$ correspondant à $W$ dans la dualité de Poincaré vérifie $d_r v = 0$, pour tout $r$, dans la suite spectrale d'Atiyah- Hirzebruch de $V$.

DÉMONSTRATION. - Plongeons $N$ dans $V$ comme voisinage tubulaire de $W$. Alors

$$K^o(V , V - W) = K^o(N , N^*)$$

possède un élément $a$ qui représente l'élément fondamental

$$u \in H^{2k}(N , N ; \underset{\sim}{Z}) = H^{2k}(V , V - W ; \underset{\sim}{Z}) \qquad .$$

Par définition, $v$ est l'image de $u$ dans $H^{2k}(V ; \underset{\sim}{Z})$, donc l'image $b$ de $a$ dans $K^o(V)$ représente $v$, ce qui démontre le corollaire.

Dans le cas où $V$ est une variété analytique complexe, on a ainsi des conditions nécessaires pour qu'un élément $v \in H^{2k}(V ; \underset{\sim}{Z})$ corresponde par la dualité de

Poincaré à une sous-variété analytique complexe sans singularité. Le but de cet exposé est de montrer que ces conditions sont encore vérifiées si $v$ correspond à un sous-espace analytique avec éventuellement des singularités.

## IV. Fibrés et faisceaux analytiques cohérents.

### A. Faisceaux analytiques réels cohérents.

Soit $V$ une variété analytique réelle de dimension $n$, dénombrable à l'infini. Le faisceau $\mathcal{O}$ des anneaux locaux de germes de fonctions $\mathbb{R}$-analytiques sur $V$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est cohérent. Tous les faisceaus que nous considérons dans ce chapitre seront des faisceaux cohérents de $\mathcal{O}$-modules.

Les théorèmes A et B de H. CARTAN s'appliquent à $V$, i. e. pour tout faisceau $\mathfrak{F}$ sur $V$,

$$A : \mathfrak{F}_x = H^0(V ; \mathfrak{F}) \otimes_{H^0(V;\mathcal{O})} \mathcal{O}_x \quad \text{pour tout } x \in V$$

$$B : H^q(V ; \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{pour tout } q > 0 \quad .$$

Pour la démonstration de ces réaultat, voir [3] et [6].

PROPOSITION IV. A. - Pour tout faisceau $\mathfrak{F}$ et tout ouvert $X \subset V$ relativement compact, on peut trouver une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{L}_n \to \mathfrak{L}_{n-1} \to \dots \to \mathfrak{L}_0 \to \mathfrak{F} \to 0$$

où les $\mathfrak{L}_i$ sont des faisceaux localement libres sur $X$.

DÉMONSTRATION. - D'après le théorème A, on peut trouver pour chaque point $x \in \overline{X}$ un nombre fini de sections de $\mathfrak{F}$ sur $V$ qui engendrent $\mathfrak{F}_x$, et engendrent donc $\mathfrak{F}_y$ pour tout $y$ suffisamment voisin de $x$. Par compacité de $\overline{X}$, on en déduit qu'on peut trouver un homomorphisme $\varphi_0 : \mathcal{O}^p \to \mathfrak{F}$ de faisceaux sur $V$, surjectif sur $X$, pour une valeur convenable de $p$. Posons $\mathfrak{F}_1 = \operatorname{Ker} \varphi_0$ (c'est encore un faisceau cohérent). En répétant cette construction, on obtient une suite exacte de faisceaux sur $X$ :

$$\mathfrak{L}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathfrak{L}_{n-2} \to \dots \to \mathfrak{L}_o \to \mathfrak{F} \to 0$$

où les $\mathfrak{L}_i$ sont des faisceaux libres. D'après le théorème des syzygies de HILBERT, le faisceau $\mathfrak{L}_n = \operatorname{Ker} \varphi_{n-1}$ est localement libre, ce qui démontre la proposition.

Remarquons que les faisceaux localement libres sur une variété analytique réelle sont projectifs dans la catégorie des faisceaux analytiques cohérents. En effet, si $\mathfrak{L}$ est localement libre, toute suite exacte $0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$ donne une suite exacte de faisceaux cohérents :

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}') \to \operatorname{Hom}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}) \to \operatorname{Hom}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}'') \to 0$$

donc, par le théorème B, l'homomorphisme de groupes

$$\operatorname{Hom}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}) \to \operatorname{Hom}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}'')$$

est surjectif.

On en déduit que, si

$$0 \to \mathfrak{L}_n \xrightarrow{\alpha_n} \mathfrak{L}_{n-1} \to \dots \to \mathfrak{L}_o \to \mathfrak{F} \to 0$$

$$0 \to \mathfrak{M}_n \xrightarrow{\beta_n} \mathfrak{M}_{n-1} \to \dots \to \mathfrak{M}_o \to \mathfrak{F} \to 0$$

sont deux résolutions localement libres $\mathfrak{F}$, l'application identique $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ se relève en un homomorphisme $A_i : (\mathfrak{L}_i) \to (\mathfrak{M}_i)$ des résolutions, et on a une suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{L}_n \xrightarrow{\gamma_{n+1}} \mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathfrak{M}_n \to \dots \to \mathfrak{L}_o \oplus \mathfrak{M}_1 \xrightarrow{\gamma_1} \mathfrak{M}_o \to 0$$

en posant

$$\gamma_i(x , y) = (\alpha_{i-1}(x) , \beta_i(y) + (-1)^{i-1} A_{i-1}(x)) \qquad .$$

B. <u>L'homomorphisme de Grothendieck.</u>

Soit $V$ une variété réelle, dénombrable à l'infini, et soit $Y \subset V$ un ouvert.

Soit $K_f(V, Y)$ le groupe ayant pour générateurs les classes de faisceaux analytiques cohérents sur $V$ dont le support ne rencontre pas $Y$, et pour relations $(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{F}') + (\mathfrak{F}'')$ chaque fois qu'il existe une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0 \quad .$$

On va définir un homomorphisme

$$\gamma : K_f(V, Y) \to \varprojlim K^0(X, X \cap Y)$$

la limite projective étant prise sous les ouverts $X \subset V$ relativement compacts.

Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau sur $V$ dont le support ne rendontre pas $Y$. Pour tout ouvert $X \subset V$ relativement compact, soit

$$0 \to \mathcal{E}_n \xrightarrow{\alpha_n} \mathcal{E}_{n-1} \to \dots \to \mathcal{E}_0 \to \mathfrak{F} \to 0$$

une résolution localement libre de $\mathfrak{F}$ sur $X$. Pour chaque $i$, soit $E_i$ le fibré vectoriel complexe sur $X$ correspondant à $\mathcal{E}_i$. On a un complexe

$$(\alpha) : \ 0 \to E_n \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-1} \to \dots \to E_0 \to 0$$

de fibrés vectoriels complexes sur $X$, acyclique sur $X \cap Y$.

Posons

$$\gamma_X(\mathfrak{F}) = d((E_i), \ (\alpha_i)) \in K^0(X, X \cap Y) \quad .$$

Montrons que cet élément ne dépend pas de la résolution choisie. Soit

$$0 \to \mathcal{M}_n \xrightarrow{\beta_n} \mathcal{M}_{n-1} \to \dots \to \mathcal{M}_0 \to \mathfrak{F} \to 0$$

une autre résolution de $\mathfrak{F}$ sur $X$, et soit $(F_i)$ les fibrés correspondant aux $\mathcal{M}_i$ qui forment un complexe $(\beta)$. On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{E}_n \xrightarrow{\gamma_{n+1}} \mathcal{E}_{n-1} \oplus \mathcal{M}_n \to \dots \to \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_0 \to 0$$

qui donne une suite exacte de fibrés sur $X$

$$(\gamma) : 0 \to E_n \xrightarrow{\gamma_{n+1}} E_{n-1} \oplus F_n \to \dots \to E_0 \oplus F_1 \to F_0 \to 0 .$$

On a

$$d(\gamma) = d((E_{i-1} \oplus F_i) , (\gamma_i)) = 0$$

car les $\gamma_i$ forment une suite exacte de fibrés sur $X$.

Mais, sur $X \cap Y$ on a une suite exacte de complexes

$$0 \to \beta \to \gamma \to \sigma(\alpha) \to 0$$

où $\sigma$ est le foncteur suspension d'un complexe, i. e. décalage des indices.

On en déduit que

$$d(\beta) - d(\alpha) = d(\beta) + d(\sigma\alpha) = d(\gamma) = 0 .$$

Il est clair que, si $X' \subset X$, $\gamma_{X'}(\mathfrak{F})$ est l'image de $\gamma_X(\mathfrak{F})$. Les $\gamma_X(\mathfrak{F})$ définissent donc un élément

$$\gamma(\mathfrak{F}) \in \varprojlim K^0(X , X \cap Y) .$$

## V. Sous-espaces analytiques complexes.

Les sous-espaces analytiques seront toujours supposés fermés.

### A. Classe duale d'un sous-espace analytique.

PROPOSITION V. A. - Soient $V$ une variété analytique complexe de dimension $n$, $W \subset V$ un sous-espace analytique, de dimension $n - k$, $S$ l'espace des points singuliers de $W$. Alors

$$H^p(V , V - W ; \mathbb{Z}) = H^p(V - S , V - W ; \mathbb{Z}) \quad \text{pour} \quad p \leqslant 2k .$$

DÉMONSTRATION. - On peut trouver une suite

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_{n-k} \supset S_{n-k-1} = \emptyset$$

telle que $S_i - S_{i+1}$ soit une variété analytique complexe de dimension $n - k - i$. On a donc

$$H^p(V - S_i , V - S_{i+1}) = 0 \quad \text{pour} \quad p < 2(k+i) \quad .$$

La suite exacte

$$H^p(V - S_i , V - S_{i+1}) \to H^p(V - S_i , V - W) \to H^p(V - S_{i+1} , V - W)$$
$$\to H^{p+1}(V - S_i , V - S_{i+1})$$

donne

$$H^p(V - S_i , V - W) = H^p(V - S_{i+1} , V - W) \qquad \text{pour} \quad p \leqslant 2k$$

d'où la proposition.

$W - S$ étant une variété de codimension complexe $k$, $H^p(V , V - W ; \mathbb{Z}) = 0$ pour $p < 2k$, et $H^{2k}(V - S , V - W ; \mathbb{Z})$ possède un élément fondamental $u$ que l'on peut caractériser de la façon suivante : Choisissons dans chaque composante connexe de $W - S$ un point $x_i$, et pour chacun de ces points un polycylindre $D_i^o$ de dimension complexe $k$ que l'on plonge dans $V$ transversalement à $W$ en $x_i$. Alors, pour chaque $i$, l'image de $u$ dans $H^{2k}(D_i , D_i - x_i ; \mathbb{Z})$ est le générateur de ce groupe défini par l'orientation de $D_i$ donnée par la structure complexe. Notons encore $u$ l'élément qui lui correspond dans $H^{2k}(V , V - W ; \mathbb{Z})$. Son image dans $H^{2k}(V ; \mathbb{Z})$ sera appelé élément dual de $W$.

B. <u>Calcul de</u> $\gamma$ <u>pour un certain faisceau</u>.

PROPOSITION V. B. - Soient $V$ une variété analytique complexe de dimension $n$, $\mathcal{H}(V)$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $V$, $\Theta$ le faisceau des germes de fonctions analytiques-réelles à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $W$ un sous-espace analytique de $V$ de dimension $n-k$, $\mathcal{H}(W)$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $W$, prolongé par $0$ sur $V-W$. Alors pour tout ouvert relativement compact $X \subset V$ l'élément

$$\gamma_X = \gamma_X(\mathcal{H}(W) \times_{\mathcal{H}(V)} \mathcal{O}) \in K^0(X\,,\,X-W)$$

représente par l'homomorphisme latéral l'élément fondamental

$$u \in H^{2k}(X\,,\,X-W\,;\,\underset{\sim}{Z}) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Grâce à la caractérisation qu'on a donnée de $u$, il suffit de vérifier cette proposition dans le cas où $X$ est un voisinage qu'on peut se donner arbitrairement d'un point régulier de $W$. On prendra un voisinage isomorphe à un polycylindre de dimension $n$, dans lequel $W$ donne un polycylindre de dimension $n-k$.

Si nous reprenons la démonstration du théorème 2, nous voyons que le complexe $L = ((L_i)\,,\,(f_i))$ introduit se réalise comme un complexe de fibrés analytiques complexes, d'ailleurs triviaux, et que le complexe de faisceaux cohérents de $\mathcal{O}$-modules associé constituera une résolution de $\mathcal{H}(W \cap X) \otimes_{\mathcal{H}(X)} \mathcal{O}$, car $\mathcal{O}$ est $H(V)$-plat, et l'élément $a$ qu'on avait construit n'est autre que $\gamma_X$. Or on a vu que cet élément $a$ représentait l'élément fondamental de $H^{2k}(X\,,\,X-W\,;\,\underset{\sim}{Z})$ par l'homomorphisme latéral, ce qui démontre la proposition.

## C. Condition nécessaire pour qu'une classe de cohomologie soit duale d'un sous-espace analytique.

THÉORÈME 3. - Soient $V$ une variété analytique complexe de dimension $n$, et $v \in H^{2k}(V\,;\,\underset{\sim}{Z})$. Pour qu'il existe un sous-espace analytique $W \subset V$ de dimension $n-k$, tel que $v$ soit dual de $W$, il faut que $d_r\, v = 0$ pour tout $r$ dans la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de $V$.

Pour la démonstration nous aurons besoin d'un lemme.

Soient $V$ une variété, $Y$ un ouvert de $V$, $\tilde{V}$ une triangulation de $V$, $\tilde{Y}$ une triangulation de $Y$, $\tilde{i} : \tilde{Y} \to \tilde{V}$ une application simpliciale homotope à l'injection canonique $i : Y \to V$. Soit $M$ le cylindre d'application de $\tilde{i}$. Par définition

$$K^*(V\ ,\ Y) = K^*(M\ ,\ \widetilde{Y}) \quad .$$

LEMME. - L'application canonique $K^*(V\ ,\ Y) \to \varprojlim K^*(A\ ,\ A \cap \widetilde{Y})$ où $A$ parcourt l'ensemble des sous-complexes finis de $M$, est surjective.

DÉMONSTRATION du lemme. - Par définition, $K^*(M\ ,\ \widetilde{Y}) = K^*(N)$ où $N = M/\widetilde{Y}$ est un $CW$-complexe pointé dénombrable et de dimension finie. $B = (A/A \cap \widetilde{Y})$ parcourt l'ensemble des sous-complexes pointés finis de $N$. Soit $(B_r)$ une suite croissante de sous-complexes pointés finis de $N$ telle que $\cup B_r = N$. On peut montrer que l'application canonique : $K^*(N) \to \varprojlim K^*(B_r)$ est surjective. Mais $K^p(X)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'applications de $X$ dans $C$ pour tout $CW$-complexe $X$ de dimension finie, où $C = BU_\infty \times \underset{\sim}{Z}$ si $p = 0$ et $C = U_\infty$ si $p = 1$. Un élément $\ell \in \varprojlim K^p(B_r)$ est une suite $(\ell_r)$ de classes d'applications de $B_r$ dans $C$, telle que $\ell_r$ soit l'image de $\ell_{r+1}$, et on cherche à le réaliser par une application $f : N \to C$. On construit par récurrence $f_r : B_r \to C$ telle que $f_r$ soit de la classe $\ell_r$ et induise $f_{r-1}$ sur $B_{r-1}$. Ceci est possible d'après le théorème de prolongement des homotopies, et l'application $f : N \to C$ réunion des $f_r$ répond à la question, ce qui démontre le lemme.

DÉMONSTRATION du théorème 3. - Soient $V$ une variété analytique complexe de dimension $n$, $W \subset V$ un sous-espace analytique de dimension $n - k$. Considérons l'élément $\gamma = \gamma(\mathcal{H}(W) \otimes_{\mathcal{H}(V)} \mathcal{O}) \in \varprojlim K^0(X\ ,\ X - W)$ (notations de la proposition V. B). En prenant des triangulations $\widetilde{V}$ de $V$ et $\widetilde{Y}$ de $Y = V - W$, $\gamma$ définit un élément $\gamma_1 \in \varprojlim K^0(A\ ,\ A \cap \widetilde{Y})$ (notations du lemme) et d'après le lemme, cet élément peut-être réalisé par un élément $\widetilde{\gamma} \in K^0(V\ ,\ V - W)$. Cet élément $\widetilde{\gamma}$ représente, par l'homomorphisme latéral, un élément

$$\widetilde{u} \in H^{2k}(V\ ,\ V - W) = H^{2k}(M\ ,\ \widetilde{Y}) \quad ,$$

tel que l'image de $\widetilde{u}$ dans $H^{2k}(A\ ,\ A \cap \widetilde{Y})$ coïncide avec celle de l'élément fondamental $u \in H^{2k}(V\ ,\ V - W)$ pour tout $A$, d'après la proposition V. B. Mais la caractérisation qu'on a donnée de $u$, à la fin de V. A, montre que ceci entraîne $\widetilde{u} = u$. On en déduit que l'élément $\widetilde{\gamma} \in K^0(V\ ,\ V - W)$ représente l'élément fondamental $u \in H^{2k}(V\ ,\ V - W\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ par l'homomorphisme latéral. L'image de $\widetilde{\gamma}$ dans $K^0(V)$ représentera donc l'élément $v \in H^{2k}(V\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ dual de $W$, ce qui achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOTT (Raoul). - Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 293-310 (Coll. intern. du C. N. R. S. : Topologie algébrique et géométrique différentielle [89. 1959. Lille]).

[2] CARTAN (H.) et EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] CARTAN (Henri). - Sur les fonctions de plusieurs variables complexes : les espaces analytiques, Proc. Intera, Congress Math. [13. 1958. Edinburgh] ; p. 33-52. - Cambridge at the University Press, 1960.

[4] DOUADY (Adrien). - Opérations cohomologiques, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 9, 15 pages.

[5] DOUADY (Adrien). - Périodicité de groupe unitaire, Séminaire Cartan-Moore, t. 12, 1959/60 ; Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott, n° 11 16 pages.

[6] GRAUERT (Hans). - On Levi's problem and imbedding of real-analytic manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 460-472.