ALEXANDER GROTHENDIECK

Erratum à l'exposé n°236

Séminaire N. Bourbaki, 1962, p. 303-307

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__303_1>

8. TDTE VI : Les schémas de Picard. Propriétés générales.
[Séminaire Bourbaki, t. 14, 1961/62, n° 236, 23 p.]

Page 12, ligne 16. - Au lieu de "droite affine", lire "droite affine privée de l'origine".

- ligne 18. - Au lieu de " $X[t]$ ", lire " $X[t , t^{-1}]$ ".

Page 16, proposition 3.1, 6e ligne. - Au lieu de "Or l'hypothèse ...", lire "Or, de l'hypothèse ...".

Page 21, § 4 : Le théorème de finitude pour le schéma de Picard. - Les questions de finitude du genre de celles soulevées dans ce paragraphe ont été à peu près totalement résolues depuis la rédaction du présent exposé. Indiquons les faits principaux connus maintenant dans cette direction. Pour simplifier les énoncés, nous supposons implicitement que tous les préschémas de Picard, intervenant dans les énoncés, existent, bien qu'une modification évidente de ces énoncés permette de se débarrasser de toute hypothèse d'existence. S désigne par la suite un schéma noethérien, X , Y des schémas propres sur S .

(i) Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif, alors $f^* : \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est un morphisme de type fini.

(ii) Supposons Y projectif sur S, muni d'un Module inversible ample relativement à S, et soient X le schéma des zéros d'une section quelconque de ce Module, $f : X \to Y$ l'immersion canonique. Supposons enfin que les composantes irréductibles des fibres de Y/S soient de dimension $\geqslant 3$. Alors $f^* : \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est de type fini.

(iii) Supposons que X soit projectif sur S, et que toutes ses fibres géométriques soient intègres et de dimension n. Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un Module inversible ample sur X, permettant de définir des polynômes de Hilbert. Soit M une partie de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, alors M est quasi-compacte si et seulement si, dans les polynômes de Hilbert $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$ des éléments de M, les coefficients a_1 et a_2 restent bornés.

(iv) Pour tout entier $n \neq 0$, l'homomorphisme de puissance n-ième dans le préschéma en groupes $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est un morphisme de type fini.

Notons que (i) et (ii) signifient aussi que (sous les hypothèses envisagées dans ces énoncés (i) et (ii)) une partie M de $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ est quasi-compacte si et seulement si son image dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ l'est. On en conclut qu'un Module inversible $\mathcal{L}$ sur Y est τ-équivalent à zéro si et seulement si son image inverse sur X l'est ; en d'autres termes $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{Y/S}$ est l'image inverse de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$. En particulier, pour montrer que le premier préschéma est de type fini sur S, il suffit de le prouver pour le second puisque $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est de type fini. Utilisant alors (i), le lemme de Chow et (iii), on trouve :

(v) $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est de type fini sur S.

De façon générale, la conjonction de (i) pour un morphisme fini et de (ii) permet de se ramener, pour la plupart des questions de finitude, au cas où X/S est à fibres géométriques intègres normales de dimension $\leqslant 2$; souvent même, appliquant (i) pour un morphisme surjectif non nécessairement fini, et la résolution des singularités des surfaces algébriques (due en caractéristique quelconque à ABHYANKAR), on se ramène au cas où X/S est même simple, donc à fibres géométriques non singulières de dimension 2. Cela permet par exemple, compte tenu de (v), et de l'inégalité de Picard-Igusa majorant le rang du groupe de Néron-Severi d'une surface projective non singulière, de prouver la généralisation suivante du théorème de finitude de Néron :

(vi) Soit X/S propre sur S et par ailleurs quelconque, alors les groupes de Néron-Severi $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_i/k_i}/\underline{\mathrm{Pic}}^{0}_{X_i/k_i}$ des fibres géométriques X_i/k_i de X/S

sont de type fini, et leur rang et l'ordre de leur sous-groupe de torsion restent majorés.

La même méthode de réduction au cas des surfaces non singulières, et des théorèmes connus pour ce cas (savoir le théorème de finitude de Néron, et le fait que la forme intersection sur le groupe de Néron-Severi est non dégénérée) impliquent :

(vii) Soit X un schéma propre sur un corps algébriquement clos. Alors il existe un nombre fini de courbes fermées intègres C_i $(1 \leq i \leq r)$ dans X, ayant la propriété suivante : pour toute partie M de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, M est quasi-compacte si et seulement si les entiers $\deg \mathcal{L}_{C'_i}$ $(\mathcal{L} \in M)$ restent bornés (où C'_i désigne la normalisée de C_i).

On peut prendre ici pour r le rang du groupe de Néron-Severi. Une fois connu que ce dernier est de type fini, (vii) se réduit au fait que les formes linéaires sur le groupe de Néron-Severi définies par des courbes C dans X ne s'annulent simultanément que sur les éléments de torsion du groupe de Néron-Severi. Dans le cas X projectif non singulier, ce résultat, ainsi que (v), était dû à MATSUSAKA. Utilisant (vii), on obtient facilement la caractérisation suivante des Modules inversibles τ-équivalents à 0 sur X :

(viii) Soient X/k un schéma propre sur un corps, $\mathcal{L}$ un Module inversible sur X. Conditions équivalentes :

a. $\mathcal{L}$ est τ-équivalent à 0,

b. Pour tout Module cohérent F, on a $\chi(F \otimes \mathcal{L}) = \chi(F)$, où χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré,

b'. Comme (b), mais avec $F = \mathcal{O}_Y$, Y étant un sous-schéma fermé intègre de dimension 1 dans X,

c. Pour tout Y comme ci-dessus, désignant par Y' la courbe normalisée, on a $\deg \mathcal{L}_{Y'} = 0$.

Si X/k est projectif et muni d'un Module inversible ample $\mathcal{O}_X(1)$, les conditions précédentes sont aussi équivalentes aux suivantes :

d. Pour tout entier m, $\mathcal{L}^{\otimes m}(1)$ est ample.

e. (Si X est intègre.) Pour tout couple d'entiers m, n, on a

$$\chi(\mathcal{L}^{\otimes m}(n)) = \chi(\mathcal{O}(n))$$

(i. e. (b) est vrai en faisant $F = \mathcal{L}^{\otimes m}(n)$) .

Pour la suffisance de cette dernière condition, on notera qu'elle signifie que les polynômes de Hilbert des $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sont tous égaux, donc, en vertu du critère de Mumford (iii), les $\mathcal{L}^{\otimes m}$ restent dans un ensemble quasi-compact de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$, i. e. on a (a). Les conditions (b), (b'), (c) doivent être considérées comme des variantes (sur un schéma propre quelconque) de la notion d'<u>équivalence numérique</u>, définie habituellement sur des variétés projectives non singulières. Pour ces dernières, l'équivalence de (a) et (c) était évidemment bien connue (MATSUSAKA).

Le critère (e) implique aussi le résultat suivant :

(ix) Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat dont les fibres géométriques sont intègres. Alors $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est ouvert <u>et fermé</u> dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$.

Nous nous bornerons à quelques commentaires sur la démonstration des résultats-clefs (i), (ii), (iii) (le résultat (iv) est un peu à part des autres, et se prouve en utilisant seulement (i) pour les morphismes finis surjectifs radiciels, de façon précise, pour un morphisme de Frobenius). Pour (i), on utilise de façon essentielle les idées de la descente non plate (voir notamment TDTE I, page 9). Il se trouve que (n'ayant en vue que des résultats de finitude), le manque de critères d'effectivité pour des données de descente est inoffensif. D'autre part, MUMFORD a démontré récemment une forme un peu moins forte de (iii), savoir le critère faisant intervenir <u>tous</u> les coefficients du polynôme de Hilbert. Son argument est extrêmement simple, et inspiré par la démonstration d'un critère d'amplitude de NAKAI (énoncé par ce dernier pour les surfaces non singulières, et généralisé par MUMFORD aux morphismes projectifs quelconques). Il me semble d'ailleurs que cet argument n'est valable que moyennant une légère restriction supplémentaire sur les fibres de X/S , (la propriété (S_2) de SERRE), vérifiée si les fibres géométriques sont normales. On utilise alors ce critère restreint dans la démonstration de (ii) : le critère (i) permet en effet de se ramener au cas où Y/S est plat à fibres géométriques intègres et normales, et appliquant le critère de Mumford, on se ramène aisément au cas où X/S satisfait aux mêmes conditions. De l'hypothèse de dimension résulte alors que les fibres géométriques de Y et de X sont de profondeur $\geqslant 2$ en leurs points fermés, ce qui permet d'appliquer les "critères d'équivalence" sous la forme qui leur est donnée dans SGA 1962 (exposé XII), et d'achever la démonstration de (ii). Une fois qu'on dispose de (i) et (ii), il n'est pas difficile dans le critère de Mumford de se débarrasser de toute hypothèse de normalité sur les fibres, et de le démontrer également sous la forme plus forte donnée dans (iii).

Notons enfin que la démonstration de (i) et (ii) montre également que dans le cas où S est le spectre d'un corps k, le morphisme $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ est affine (et non seulement de type fini).