

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PIERRE KAHANE

Travaux de Beurling et Malliavin

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 225, p. 27-39

http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__27_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE BEURLING ET MALLIAVIN

par Jean-Pierre KAHANE

1. - Les articles [1] et [2], à paraître, répondent aux questions suivantes :

1° Caractériser les fonctions entières qui sont quotients de fonctions entières de type exponentiel bornées sur la droite réelle.

2° Calculer le rayon de totalité $R(\Lambda)$ d'une suite réelle Λ , c'est-à-dire la borne supérieure des r tels que les exponentielles $\{e^{i\lambda x}\}$ ($\lambda \in \Lambda$) forment un système total dans $L^2(-r, r)$.

Outre [1] et [2] (manuscripts multiformes), on peut consulter [4] et [5].

2. - La réponse au problème 1 est très simple. Désignons par E_a l'ensemble des fonctions entières f bornées sur la droite réelle et telles que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z)|}{|z|} < a \quad ,$$

et par E la réunion des E_a ($a > 0$). Posons

$$J(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(x)|}{1+x^2} dx$$

chaque fois que le second membre a un sens comme intégrale de Lebesgue.

THÉORÈME I. - Soit g une fonction entière.

a. Si il existe une $f \in E$ telle que $fg \in E$, g est de type exponentiel et $J(\log^+ |g|) < \infty$.

b. Si g est de type exponentiel et que $J(\log^+ |g|) < \infty$, toute E_a ($a > 0$) contient une f telle que $fg \in E$.

La partie (a) est immédiate, à partir des résultats classiques :

a. Toute fonction entière quotient de deux fonctions entières de type exponentiel est de type exponentiel.

β . $f \in E$, $f \neq 0 \implies J(|\log |f||) < \infty$.

La partie (b), par contre, est difficile ; nous en esquisserons la démonstration plus loin.

Remarque. - D'après PALEY-WIENER, on sait que les éléments de E_a sont transfourrés de distributions à support dans $] - a, a[$. On peut d'ailleurs, sans modifier l'énoncé du théorème I, remplacer E et E_a par les ensembles de fonctions transfourrés de distributions à support compact (resp. à support dans $] - a, a[$).

Voici une application du théorème I aux équations de convolution (indiquée par MALGRANGE). Soit I un intervalle ouvert, soit μ une distribution à support dans I , et soit $F = F(\mu, I)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{E}(I)$ satisfaisant $f \star \mu = 0$ sur l'intervalle où le premier membre a un sens.

THÉORÈME II. - F est le sous-espace fermé de $\mathcal{E}(I)$ engendré par les exponentielles-polynômes $P(x) e^{i\lambda x}$ qu'il contient.

Démonstration. - Il s'agit de montrer que toute distribution \tilde{v} à support dans I et orthogonale aux $P(x) e^{i\lambda x} \in F$ est orthogonale à F . L'hypothèse sur v signifie que sa transfourrée \hat{v} est le produit de $\hat{\mu}$ par une fonction entière g . D'après le théorème I, (a), g est de type exponentiel et $J(\log^+ |g|) < \infty$; d'après (b) et la remarque, il existe, pour tout $a > 0$, une distribution χ à support dans $] - a, a[$ telle que $\chi g \in E$, soit $\hat{\chi} g = \hat{\lambda}$, λ étant (si a est assez petit) une distribution à support dans I . Comme $\hat{\tilde{v}} \chi = \hat{\lambda} \hat{\mu}$, on a

$$v \star \chi = \lambda \star \mu \quad .$$

Choisissons a de façon que $f \star v$ soit définie sur $] - 2a, 2a[$. On a alors $(f \star v) \star \chi$ sur $] - a, a[$. Par le procédé de Schwartz (remplacer $\hat{\chi}$ par sa dérivée, et itérer), on a aussi $(f \star v) \star x^n \chi = 0$ pour tout entier n , donc $f \star v = 0$ sur $] - a, a[$, d'où la conclusion.

3. - Le rayon de totalité $R(\Lambda)$ est, d'après PALEY-WIENER, la borne inférieure des a tels que E_a contienne une $f \neq 0$ s'annulant sur Λ . Il est clair que $R(\Lambda)$ est proportionnel à une certaine "densité" de Λ . Pour simplifier les écritures, supposons $0 \notin \Lambda$.

Soit n_Λ la fonction de distribution de Λ , c'est-à-dire la primitive, nulle en 0, de la mesure $\sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$. BEURLING et MALLIAVIN appellent "densité effective" de Λ , et notent $D_e(\Lambda)$ (nous noterons aussi $D_{\text{eff}}(\Lambda)$) la borne inférieure des a , tels que

$$(1) \quad J(n_{a,\Lambda} - n_\Lambda) < \infty$$

$n_{a,\Lambda}$ étant la fonction dont la restriction à $t > 0$ (resp. $t < 0$) est la plus petite (resp. la plus grande) des fonctions croissantes de pente $\leq a$ majorant (resp. minorant) n_Λ .

THÉORÈME III. - $R(\Lambda) = \pi D_e(\Lambda)$.

Démonstration. - Propositions A, B, C ci-dessous.

Pour comparer ce résultat aux estimations de $R(\Lambda)$ jusqu'alors connues, et en donner une application simple (théorème 4), quelques remarques sur les "densités" des suites sont opportunes.

Au sens strict, une densité D est une fonction positive, définie sur un ensemble M de suites ("suites mesurables"), avec les propriétés suivantes :

- si deux suites disjointes Λ_1 et Λ_2 sont mesurables, leur réunion Λ l'est aussi, et $D(\Lambda) = D(\Lambda_1) + D(\Lambda_2)$;
- si Λ et Λ_1 sont mesurables, et $\Lambda_1 \subset \Lambda$, $\Lambda - \Lambda_1$ est aussi mesurable.

A chaque densité D sont associées une "densité intérieure" D_i et une "densité extérieure" D_e (que nous noterons aussi D_{ext}) : pour toute Λ , $D_i(\Lambda)$ (resp. $D_e(\Lambda)$) est la borne supérieure (resp. inférieure) des densités des suites mesurables contenues dans (resp. contenant) Λ . Si Λ_1 et Λ_2 sont complémentaires par rapport à une suite mesurable Λ , il est alors immédiat que

$$D_i(\Lambda_1) + D_e(\Lambda_2) \leq D(\Lambda) \quad .$$

Dans les exemples qui suivent, il y a égalité.

Exemples :

a. Densité ordinaire. - Λ est mesurable et de densité ordinaire $\omega(\Lambda)$, si

$$\omega(\Lambda) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t}$$

existe. ω_e et ω_i s'appellent la densité maximum et la densité minimum (POLYA).

b. Densité uniforme. - Λ est mesurable et de densité uniforme $\Delta(\Lambda)$, si

$$n_\Lambda(t) - \Delta(\Lambda) t = o(1) \quad .$$

Δ_e et Δ_i ont été appelées densités supérieure et inférieure de répartition.

Depuis PALEY-WIENER et LEVINSON (1934-1935), on savait que

$$(2) \quad \pi\omega_e(\Lambda) \leq R(\Lambda) \leq \pi\Delta_e(\Lambda)$$

et il est immédiat que, pour certaines suites Λ , $R(\Lambda) < \pi\Delta_e(\Lambda)$. Il est moins immédiat, quoique facile, de construire des Λ pour lesquelles $R(\Lambda) > \omega_e(\Lambda)$; le dernier résultat dans cette direction était la construction d'une suite Λ d'entiers, telle que $\omega(\Lambda) = 0$, et telle que $R(\Lambda) = \pi\Delta_e(\Lambda) = \pi$ (KOOSIS, [3]).

c. Densité maligne. - Λ est mesurable et de densité maligne $\Theta(\Lambda)$, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|n_\Lambda(t) - D(\Lambda) t|}{1 + t^2} dt < \infty \quad .$$

La "densité effective" de MALLIAVIN-BEURLING n'est autre que la densité maligne extérieure. Cela résulte des propositions suivantes, qui entraînent le théorème III.

PROPOSITION A. - $D_{\text{eff}}(\Lambda) \geq D_{\text{ext}}(\Lambda)$.

Car, si (1) a lieu, la suite Λ' définie par

$$n_{\Lambda'}(t) = [at - n_{a,\Lambda}(t) + n_\Lambda(t)]$$

contient Λ , et admet a pour densité maligne.

PROPOSITION B. - Supposons

$$(1) \quad J(n_{a,\Lambda} - n_\Lambda) = \infty \quad .$$

Si $b < a$ et si $f \in E_{\pi b}$ s'annule sur Λ , $f = 0$. Donc $R(\Lambda) \geq \pi D_{\text{eff}}(\Lambda)$.

PROPOSITION C. - Si Λ admet une densité maligne D , il existe, pour tout $D' > D$, une $f \in E_{\pi D'}$, s'annulant sur Λ , et $\neq 0$. Donc $R(\Lambda) \leq \pi D_{\text{ext}}(\Lambda)$.

Voici une application immédiate du théorème III. Soit Λ une suite d'entiers, et F_Λ l'ensemble des fonctions périodiques de spectre dans Λ . Problème : quelle est la borne inférieure $U(\Lambda)$ des longueurs des intervalles I tels que la seule fonction F_Λ , nulle sur I , soit la fonction nulle ?

THÉORÈME IV. - $U(\Lambda) = 2\pi D_1(\Lambda)$ (densité maligne intérieure).

Car, dire que $f \in F_\Lambda$, c'est dire que la restriction de f à un intervalle de longueur 2π est orthogonale aux $e^{i\lambda'x}$ ($\lambda' \in \Lambda'$), Λ' désignant la suite d'entiers complémentaire de Λ .

4. - Démonstration de la proposition B.

Supposons pour fixer les idées

$$(3) \quad \int_1^\infty \frac{n_a(t) - n(t)}{t^2} dt = \infty$$

($n_a = n_{a,\Lambda}$ et $n = n_\Lambda$). L'ensemble A des $t > 1$, où $n_a(t) > n(t)$, est une réunion d'intervalles $I_m =]\alpha_m, \alpha_m + \ell_m[$ ($m = 1, 2, \dots$) que l'on peut ordonner par origines α_m croissantes. Si l'un de ces intervalles (le dernier) est une demi-droite, on a $\varrho_e(\Lambda) \geq a$, et (2) établit le résultat ⁽¹⁾. Sinon, soit

$$J_m =]\alpha_m, \beta_m[, \quad \beta_m = \alpha_m + \ell_m + \varepsilon \ell_m$$

($\varepsilon > 0$ sera fixé plus loin). De la suite des J_m , supprimons tour à tour, dans l'ordre des m croissants, tout intervalle contenu dans la réunion des autres ; on obtient ainsi une suite d'intervalles J_μ (μ parcourant une suite d'entiers) recouvrant A sans triple superposition. Chacune des deux suites obtenues à partir de $\{J_\mu\}$ en supprimant un intervalle sur deux est formée d'intervalles disjoints, et pour l'une au moins, soit $\{J_V\}$, on a, d'après (3),

$$(4) \quad \sum_V \int_{J_V} \frac{n_a(t) - n(t)}{t^2} dt = \infty$$

(V parcourt une suite d'entiers convenables). Comme, pour tout ℓ et tout α_m , on a

⁽¹⁾ On peut aussi adapter la méthode qui suit.

$$\int_{\alpha_m}^{\alpha_m + \ell} \frac{n_a(t) - n(t)}{t^2} dt < \frac{\ell^2}{2\alpha_m^2}$$

(4) implique $\sum \frac{\ell_V^2}{\alpha_V^2} = \infty$, ou aussi bien

$$(5) \quad \sum \frac{\ell_V^2}{\beta_V^2} = \infty \quad .$$

Soit maintenant $f \in E_{nb}$, nulle sur Λ . Utilisons, comme KOOSIS ([3]), la formule de Jensen autour du point x ; on obtient

$$\begin{aligned} \log|f(x)| &\leq -\int_0^R \frac{n(x+t) - n(x-t)}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(x + \operatorname{Re} i\theta)| d\theta \\ &\leq -\int_0^R \frac{n(x+t) - n(x-t)}{t} dt + 2bR \end{aligned}$$

et en intégrant

$$\int_{\alpha}^{\beta} \log|f(x)| dx \leq -\int_0^R \frac{N(\beta+t) - N(\beta-t) - N(\alpha+t) + N(\alpha-t)}{t} dt + 2bR(\beta - \alpha)$$

$N(t)$ étant une primitive de $n(t)$. Comme

$$N(\alpha+t) - N(\alpha-t) \leq 2tn(\alpha+R)$$

$$N(\beta+t) - N(\beta-t) \geq 2tn(\beta-R)$$

on a

$$(6) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \log|f(x)| dx \leq 2R(b(\beta - \alpha) - (n(\beta - R) - n(\alpha + R))) \quad .$$

Choisissons $\alpha = \alpha_V$, $\beta = \beta_V$, et $R = \varepsilon \ell_V$; (6) s'écrit

$$\int_{J_V} \log|f(x)| dx \leq 2\varepsilon \ell_V^2 (b(1 + \varepsilon) - a(1 - \varepsilon)) \quad .$$

Choisissons ε assez petit pour avoir $a(1 - \varepsilon) - b(1 + \varepsilon) = \varepsilon' > 0$; alors

$$\int_{J_V} \frac{\log |f(x)|}{x^2} dx \leq -\varepsilon' \frac{\ell_V^2}{\beta_V^2} .$$

D'après (5), et le fait que les J_V sont disjoints, $J(\log |f(x)|) = \infty$, donc $f = 0$. La proposition B est démontrée.

5. - Démonstration de la proposition C.

Pour toute suite Λ ayant une densité maligne D , posons

$$r_\Lambda(t) = \frac{n_\Lambda(t) - Dt}{t}$$

$$C_\Lambda(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{\lambda \in \Lambda, |\lambda| < R} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) .$$

On a par hypothèse

$$I(r_\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|r_\Lambda(t)|}{\sqrt{1+t^2}} dt < \infty$$

et l'égalité

$$\int_{-R}^R \log \left|1 - \frac{x}{\lambda}\right| dn_\Lambda(t) = [\log |1 - \frac{x}{t}| n_\Lambda(t)]_{-R}^R + v. p. \int_{-R}^R \frac{x}{x-t} \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt$$

donne

$$\frac{1}{x} \log |C_\Lambda(x)| = v. p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_\Lambda(t)}{t-x} dt = U_\Lambda(x) .$$

$C_\Lambda(z)$ est de type exponentiel πD , et

$$J(\log |C_\Lambda(x)|) < \infty \iff I(U_\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|U_\Lambda(x)|}{\sqrt{1+x^2}} dx < \infty .$$

Supposons acquis le théorème I. Il nous suffit de montrer que, quel que soit $D_1 > D$, il existe une suite Λ_1 de densité maligne D_1 , contenant Λ , et telle que $I(U_{\Lambda_1}) < \infty$.

Plus généralement, soit $V(t)$ une fonction croissante telle que

$$V(t) = Dt + \sigma(|t|)$$

$(t \rightarrow +\infty)$, et soit

$$r_V(t) = \frac{V(t) - Dt}{t}$$

$$U_V(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_V(t)}{t-x} dt \quad \text{si } I(r_V) < \infty .$$

Il est connu, et facile de voir, que, si $V(t) - n_\Lambda(t) = O(1) \quad (t \rightarrow +\infty)$, on a

$$U_\Lambda(x) - U_V(x) = O\left(\frac{\log|x|}{|x|}\right) \quad (x \rightarrow +\infty) ,$$

de sorte que $I(U_\Lambda) < \infty \iff I(U_V) < \infty$. Pour démontrer la proposition C, il suffit donc d'établir :

(C'). - Quel que soit $D_1 > D$, il existe une fonction croissante

$$V(t) = D_1 t + \sigma(|t|)$$

$(t \rightarrow +\infty)$, telle que $V(t) - n_\Lambda(t)$ soit une fonction croissante, et telle que $I(r_V) < \infty$ et $I(U_V) < \infty$.

Les choses seraient évidentes s'il était vrai que $I(r_V) < \infty$ entraînât $I(U_V) < \infty$. Faute de cela, on a le succédané :

LEMME. - Supposons qu'existe une suite croissante $\{\xi_n\}$ ($n = \dots -1, 0, 1, \dots$; $\xi_0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty$); telle que, sur chaque intervalle $[\xi_n, \xi_{n+1}]$, $r_V(t)/t$ ait une valeur moyenne nulle, et que, en posant $\ell_n = \xi_{n+1} - \xi_n$ pour $n > 0$, $\ell_n = \xi_n - \xi_{n-1}$ pour $n \leq 0$, on ait

$$(7) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell_n^2}{\xi_n} < \infty .$$

Alors $I(r_V) < \infty$ et $I(U_V) < \infty$.

DÉMONSTRATION. - Soit $r_{V,n}$ la restriction de r_V à $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ (pour fixer les idées, $n > 0$), et

$$U_{V,n}(x) = \text{v. p.} \int \frac{r_{V,n}(t)}{t-x} dt$$

Observons que, si $\frac{V(t)}{t} < c$, on a $t dr_V(t) > -c dt$, donc $dr_{V,n}(t) > -\frac{c}{\xi_n} dt$ et, compte tenu du fait que $r_{V,n}$ prend des valeurs positives et négatives,

$$(8) \quad |r_{V,n}(t)| \leq \frac{cl_n}{2\xi_n}$$

(7) et (8) entraînent $I(r_V) < \infty$. Il suffit maintenant de montrer

$$(9) \quad I(U_{V,n}) < K \frac{l_n^2}{\xi_n^2}$$

K indépendant de n . Soit $[\xi_n', \xi_n'']$ l'intervalle de même milieu que $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ et de longueur triple. Chacune des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\xi_n'} \int_{\xi_n'}^{\xi_n''} \int_{\xi_n''}^{\infty} \frac{|U_{V,n}(x)|}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

admet une majoration du type (9). Donnons-en rapidement la raison : pour la première et la dernière, cela résulte d'un calcul direct, utilisant (8) ; pour la seconde, du fait que

$$\int_{\xi_n'}^{\xi_n''} U_{V,n}^2(x) dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} r_{V,n}^2(t) dt$$

(propriété isométrique dans L^2 de la transformation de Hilbert), et de l'inégalité de Schwarz. On a donc (9), et le lemme est démontré.

Pour démontrer (C'), on cherche à construire $V(t)$ satisfaisant l'hypothèse du lemme. Indiquons la construction pour $t > 0$ (c'est la même pour $t < 0$). Soit $0 < \varepsilon < D_1 - D$, et $q(t)$ une fonction telle que

$$(10) \quad \begin{cases} q'(t) > -\varepsilon \frac{dt}{t} \\ q(t) = o(1) \quad (t \rightarrow \infty) \end{cases} .$$

On pose, pour t assez grand (de façon que $V(t) - n_{\wedge}(t) \nearrow$)

$$V(t) = n_{\wedge}(t) + (D_1 - D) t + tq(t)$$

d'où $r_V(t) = r_{\wedge}(t) + q(t)$. Reste à construire $q(t)$ satisfaisant (10), et une

suite $\{\xi_n\}$ satisfaisant (7), telles que

$$(11) \quad \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (r_{\wedge}(t) + q(t)) \frac{dt}{t} = 0, \quad \forall n.$$

L'idée est de prendre pour $q(t)$ une fonction triangulaire de pente $\frac{t}{\xi_n}$ sur

$[\xi_n, \xi_{n+1}]$ (elle satisfait bien (8)) et, ξ_n étant défini et $q(t)$ astreinte à la condition ci-dessus, de choisir ξ_{n+1} maximum tel que (11) ait lieu ; de (11) résulte alors

$$\frac{\xi_n^2}{4\xi_n \xi_{n+1}} \leq \left| \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} r_{\wedge}(t) \frac{dt}{t} \right|$$

d'où (7). Une petite difficulté apparaît si $r_{\wedge}(t)$ est trop petit à droite de ξ_n : il se peut que le procédé indiqué donne $\xi_{n+1} = \xi_n$, ou ξ_{n+1} très voisin de ξ_n (disons : $\xi_{n+1} < (1 + \frac{1}{n}) \xi_n$) ; dans ce cas, on renonce à ce procédé, on pose $\xi_{n+1} = (1 + \frac{1}{n}) \xi_n$, et on choisit $q(t)$ en conséquence (c'est-à-dire satisfaisant (10) et (11)) sur $[\xi_n, \xi_{n+1}]$; on vérifie que l'on a encore (7).

Moyennant le théorème I, la proposition C se trouve ainsi démontrée.

6. - Démonstration du théorème I.

Rappelons que seule la partie (b) est à démontrer. On peut d'abord supposer g nulle en 0. Puis, comme g est majorée sur la droite réelle par

$$g_1(z) = 1 + g(z) \overline{g(\bar{z})} + g(-z) \overline{g(-\bar{z})},$$

on peut, quitte à remplacer g par g_1 , supposer g de la forme

$$(12) \quad g(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

avec

$$(13) \quad \begin{cases} |g(x)| \geq 1 \text{ pour } x \text{ réel} \\ J(\log|g(x)|) < \infty. \end{cases}$$

Nous allons donner une interprétation de $\log|g(x)|$ en théorie du potentiel.

Soit $G(x, y) = \log\left|\frac{x+y}{x-y}\right|$ (noyau de Green du demi-plan $\text{Rz} > 0$, restreint à la demi-droite $x > 0$). Le potentiel d'une mesure μ positive portée par $]0, \infty[$ est

$$(14) \quad U^\mu(x) = \int_0^\infty G(x, y) d\mu(y)$$

et son énergie est

$$(15) \quad E(\mu) = \int_0^\infty U^\mu(x) d\mu(x) \quad .$$

(14) est aussi défini pour certaines mesures réelles. En particulier, (14) et (15) ont un sens pour les mesures réelles à support compact dans $]0, \infty[$ (soit $\mu \in M$) et $\|\mu\| = \sqrt{E(\mu)}$ est une norme hilbertienne pour M . Le complété de M pour cette norme est l'espace \mathcal{E} des distributions d'énergie finie. On sait que la convergence des μ dans \mathcal{E} entraîne la convergence presque-partout des $U^\mu(x)$. On définit ainsi les potentiels d'énergie finie (= potentiels des distributions d'énergie finie).

On a les deux importantes propositions :

PROPOSITION D. - Si g est une fonction de type exponentiel satisfaisant (12) et (13), $\frac{1}{x} \log|g(x)|$ est un potentiel d'énergie finie, soit U^γ .

PROPOSITION E. - Si $d\varphi$ est une mesure d'énergie finie telle que

$$(16) \quad d\varphi(x) > -a \frac{dx}{x} \text{ pour } t \text{ assez grand, } a > 0$$

il existe une fonction f de type exponentiel $\leq a$, paire, égale à 1 en 0, telle que

$$\log|f(x)| = -x U^\varphi(x) + O(\log x) \quad (x \rightarrow \infty) \quad .$$

Admettons-les. Pour démontrer le théorème I, il suffit d'associer à toute g satisfaisant (12) et (13) une f paire de type exponentiel $\leq a$, telle que

$$\begin{cases} \log|f(x)| < O(\log x) \\ \log|f(x)| + \log|g(x)| < O(\log x) \end{cases} \quad .$$

D'après les propositions D et E, il suffit donc de résoudre le problème suivant :

associer à toute distribution γ d'énergie finie telle que

$$U^\gamma \geq 0, \quad \int_0^\infty U^\gamma(x) \frac{dx}{x} < \infty$$

une mesure φ d'énergie finie satisfaisant (16) et telle que $U^\varphi \geq U^\gamma$ quasi partout.

Soit A_γ l'ensemble des distributions d'énergie finie ψ telles que $U^\psi \geq U^\gamma$ q. p., et

$$l(\psi) = E(\psi) + 2a \int_0^\infty U^\psi(x) \frac{dx}{x} \quad .$$

A_γ est un cône convexe fermé dans \mathcal{E} , et $l(\psi)$ est semi-continue inférieurement sur A_γ (car la convergence dans \mathcal{E} entraîne la convergence q. p. des potentiels); de plus, $l(\psi)$ n'est pas constamment ∞ sur A_γ , car $l(\gamma) < \infty$. Soit $\varphi \in A_\gamma$ telle que $l(\varphi)$ soit minimum. Nous allons montrer que φ est une mesure et satisfait (16).

Considérons en effet une fonction indéfiniment dérivable positive à support compact dans $]0, \infty[$. C'est un potentiel d'énergie finie U^θ , et $\varphi + \lambda\theta \in A_\gamma$ pour tout $\lambda > 0$. Or (en utilisant la notation intégrale pour (φ, U^θ))

$$l(\varphi + \lambda\theta) = l(\varphi) + 2\lambda \int U^\theta(x) (d\varphi(x) + a \frac{dx}{x}) + \lambda^2 E(\theta)$$

donc l'intégrale du second membre est positive. Cela veut dire que la distribution $d\varphi(x) + a \frac{dx}{x}$ est positive; c'est donc une mesure, et φ satisfait (16).

Moyennant les propositions D et E, dont on trouvera la démonstration en [5], le théorème I est donc démontré.

7. - Compléments et problèmes.

1° En ce qui concerne le problème 2, B et M ne se limitent pas à des suites Λ réelles; on a le résultat :

$$\text{si } \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{|\Im \lambda|}{|\lambda|^2} < \infty, \quad R(\Lambda) = \pi D_e(\Lambda_r)$$

Λ_r étant la suite réelle telle que tout demi-disque $|z| < R$, $\Re z > 0$ ou $\Re z < 0$ contienne autant de points de Λ et de Λ_r ;

$$\text{si } \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{|\Im \lambda|}{|\lambda|^2} = \infty, \quad R(\Lambda) = \infty \quad .$$

Cela donne une caractérisation complète des spectres des fonctions moyenne-périodiques d'une variable puisque une suite complexe Λ est un tel spectre si et seulement si $R(\Lambda) < \infty$.

2° Problème : Soit E_a l'ensemble des fonctions entières de n variables, de type exponentiel $< a$, et bornées dans le domaine réel, et soit E la réunion des E_a . Montrer (?) que si une fonction entière s'écrit $\frac{f}{g}$, $f \in E$, $g \in E$, elle s'écrit aussi, pour tout $a > 0$, $\frac{f_1}{g_1}$, $f_1 \in E$, $g_1 \in E_a$.

3° Le théorème 4 s'étend aux fonctions pseudopériodiques ayant leur spectre dans une suite Λ régulière ($\inf |\lambda' - \lambda| > 0$).

Problème : Étendre le théorème 4 aux fonctions moyenne-périodiques ayant leur spectre dans une suite Λ complexe (satisfaisant $R(\Lambda) < \infty$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEURLING (A.) and MALLIAVIN (P.). - Closure of a set of exponentials on an interval, Acta Mathematica (à paraître).
- [2] BEURLING (A.) and MALLIAVIN (P.). - On Fourier transforms of measures with compact support, Annals of Math. Series 2 (à paraître).
- [3] KOOSIS (Paul). - Sur la totalité des systèmes d'exponentielles imaginaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2102-2103.
- [4] MALLIAVIN (Paul). - Spectres des fonctions moyenne-périodiques, totalité d'une suite d'exponentielles sur un segment, Séminaire Lelong : Analyse, t. 3, 1961, n° 11, 12 p.
- [5] MALLIAVIN (Paul). - Some applications of entire functions of exponential type to harmonic analysis. Stanford, Summer Institute, Stanford University, 1961 (Multigraphed Lectures).