LAURENT SCHWARTZ

Sous-espaces hilbertiens et antinoyaux associés

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. nº 238, p. 255-272

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__255_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 238

Mai 1962

SOUS-ESPACES HILBERTIENS ET ANTINOYAUX ASSOCIÉS

par Laurent SCHWARTZ

Cette théorie complète celle des noyaux reproduisants d'Aronszajn (voir la bibliographie).

1. Sous-espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique.

Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$, séparé, localement convexe, quasi-complet. On appelle sous-espace hilbertien de E la donnée d'un sous-espace vectoriel H de E, et d'une structure hilbertienne sur H, telle que l'injection naturelle de H dans E soit continue. Sur l'ensemble $\mathcal{H}$ des sous-espaces hilbertiens de E existent les structures suivantes :

1° Une loi de multiplication par les nombres réels $\geqslant 0$. Si $H \in \mathcal{H}$ et $\lambda \geqslant 0$, on appelle λH l'espace $\{0\}$ si $\lambda = 0$, et si $\lambda > 0$, l'espace H muni d'un nouveau produit scalaire, obtenu en multipliant l'ancien par $\frac{1}{\lambda}$:

$$(1) \qquad (h_1|h_2)_{\lambda H} = \frac{1}{\lambda}(h_1|h_2)_H \, , \quad \text{ou} \quad \|h\|_{\lambda H} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|h\|_H \quad .$$

Associativité : $\lambda(\mu H) = (\lambda\mu) H$, pour $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $H \in \mathcal{H}$.

2° Une loi d'addition. Si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces hilbertiens, $H_1 + H_2$ est, en tant qu'espace vectoriel, la somme de H_1 et H_2 (attention, on n'a pas nécessairement $H_1 \cap H_2 = \{0\}$), et sa norme est définie par

$$(2) \qquad \|h\|^2_{H_1+H_2} = \inf_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1\in H_1, h_2\in H_2}} \left(\|h_1\|^2_{H_1} + \|h_2\|^2_{H_2}\right) \quad .$$

On montre qu'on définit bien là un sous-espace hilbertien de E. On peut d'ailleurs l'obtenir comme suit. Soit $H_1 \oplus H_2$ la somme directe hilbertienne de H_1 et H_2, c'est-à-dire leur somme directe munie de la norme

$$(3) \qquad \|(h_1 , h_2)\|^2_{H_1\oplus H_2} = \|h_1\|^2_{H_1} + \|h_2\|^2_{H_2} \quad .$$

Il existe une application linéaire continue de $H_1 \oplus H_2$ dans E, définie par $(h_1, h_2) \rightsquigarrow h_1 + h_2$; soit N son noyau ; elle définit alors une injection linéaire continue du quotient $(H_1 \oplus H_2)/N$, qui est encore un espace de Hilbert, dans E, dont l'image est l'ensemble somme $H_1 + H_2$; la structure hilbertienne placée sur $H_1 + H_2$ est l'image de celle de $(H_1 \oplus H_2)/N$ par la bijection ci-dessus.

L'addition de $\mathcal{H}$ est associative et commutative, d'élément neutre $\{0\}$; on a les distributivités

(4) $$(\lambda + \mu) H = \lambda H + \mu H , \qquad \lambda(H_1 + H_2) = \lambda H_1 + \lambda H_2 \quad .$$

3° Une structure d'ordre. On écrira $H_1 \leqslant H_2$, si $H_1 \subset H_2$ et si, pour tout $h \in H_1$, on a

(5) $$\|h\|_{H_1} \geqslant \|h\|_{H_2} \quad ;$$

ceci exprime que l'injection naturelle $H_1 \to H_2$ est continue, de norme $\leqslant 1$. On a

(6) $$H_1 + H_2 \geqslant H_1 , \quad \text{et} \quad \geqslant H_2 \; ; \quad \lambda H \geqslant H \iff \lambda \geqslant 1 \quad \text{si} \quad H \neq \{0\} \quad .$$

2. Les antinoyaux relatifs à E.

On appelle antinoyau relatif à E une application antilinéaire de E' dans E. Un tel antinoyau L définit une forme sesquilinéaire $(e', f') \rightsquigarrow \langle Lf', e' \rangle$ sur $E' \times E'$; L est dit hermitien, hermitien $\geqslant 0$, si cette forme sesquilinéaire l'est. L'hermiticité de L entraîne sa continuité, forte ou faible. L'ensemble $\overline{\mathfrak{L}}^+$ des antinoyaux $\geqslant 0$ est un cône convexe saillant dans l'espace $\overline{\mathfrak{L}}(E' ; E)$ des applications antilinéaires continues de E' dans E. Il est donc muni des trois mêmes structures que $\mathcal{H}$: la multiplication par les scalaires et l'addition sont induites par celles de $\overline{\mathfrak{L}}(E' ; E)$, et la structure d'ordre est définie par :

(7) $$L_1 \leqslant L_2 \iff L_2 - L_1 \geqslant 0 \quad .$$

Le théorème essentiel de la théorie est le suivant :

THÉORÈME 1. – Il existe un isomorphisme canonique entre $\mathcal{H}$ et $\overline{\mathcal{E}}^+$ (relativement aux structures précédentes).

COROLLAIRE 1. – Soient H , $H_1 \in \mathcal{H}$. Pour qu'il existe un $H_2 \in \mathcal{H}$ tel que $H = H_1 + H_2$, il faut et il suffit que $H \geqslant H_1$, et H_2 est alors unique.

La propriété est, en effet, vraie dans $\overline{\mathcal{E}}^+$ (formule (7)).

COROLLAIRE 2. – Soient H_1 , $H_2 \in \mathcal{H}$. Pour que $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, il faut et il suffit que les antinoyaux associés L_1 , L_2 soient étrangers, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'antinoyau $\geqslant 0$, majoré par chacun d'eux, autre que 0 .

Nous démontrerons au § 3 l'existence d'une bijection naturelle de $\mathcal{H}$ sur $\overline{\mathcal{E}}^+$, et au § 4 nous montrerons que cette bijection est un isomorphisme.

3. Bijection canonique $\mathcal{H} \to \overline{\mathcal{E}}^+$.

Soient $H \in \mathcal{H}$, j son injection canonique dans E . Alors son antinoyau associé $L \in \overline{\mathcal{E}}(E' ; E)$ est l'application composée :

$$E' \xrightarrow{{}^t j} H' \xrightarrow[\text{canonique}]{\text{anti-isomorphisme}} H \xrightarrow{j} E \qquad . \tag{8}$$

On peut encore dire que, pour $e' \in E'$, l'élément Le' de $H \subset E$ est caractérisé par

$$\forall \ h \in H , \quad (h|Le')_H = \langle h , e' \rangle \qquad . \tag{9}$$

On en déduit :

$$\forall \ e' , f' \in E' : \ (Lf'|Le')_H = \langle Lf' , e' \rangle \qquad ; \tag{10}$$

par suite, L est $\geqslant 0$, donc $L \in \overline{\mathcal{E}}^+$:

$$\forall \ e' \in E' , \quad \|Le'\|_H^2 = \langle Le' , e' \rangle \geqslant 0 \qquad . \tag{11}$$

L'image $L(E')$ de E' par L est le sous-espace H_0 des $k \in H$ tels que la forme linéaire $h \to (h|k)_H$ soit continue sur H muni de la topologie induite par E . H_0 est dense dans H . Nous venons de définir une application $\mathcal{H} \to \overline{\mathcal{E}}^+$. Montrons qu'elle est bijective.

Soit donc $L \in \overrightarrow{E}^{+}$. Nous devons montrer qu'il existe un élément H de $\mathcal{H}$, unique, dont L soit l'antinoyau associé. Soit H_o l'ensemble $L(E')$. On peut le munir d'un produit scalaire sesquilinéaire :

$$(12) \qquad (u|v)_{H_o} = \langle u \, , \, e' \rangle \quad \text{si} \quad v = Le' \qquad ;$$

Cette expression est en effet bien indépendante de l'élément e' de E' tel que $v = Le'$ car, si $u = Lf'$, on a

$$\langle Lf' \, , \, e' \rangle = \overline{\langle Le' \, , \, f' \rangle}$$

d'après l'hermiticité de L . Ce produit scalaire est $\geqslant 0$ d'après (11). Il est même défini positif. Soit en effet $u = Le'$ tel que

$$(u|u)_{H_o} = \langle Le' \, , \, e' \rangle = 0 \qquad ;$$

l'inégalité de Schwarz donne

$$(13) \qquad \forall \; f' \in E' \, , \quad |\langle u \, , \, f' \rangle| \leqslant \langle Le' \, , \, e' \rangle^{1/2} \, \langle Lf' \, , \, f' \rangle^{1/2}$$

donc $u = 0$ d'après HAHN-BANACH. L'injection $H_o \to E$ est continue, si on munit H_o de la structure préhilbertienne définie par $(\;|\;)_{H_o}$. Pour le voir, nous devons montrer que la boule-unité de H_o est bornée dans E , et il suffit pour cela, d'après MACKEY, qu'elle soit faiblement bornée ; or cela résulte immédiatement de (13).

Soit alors $\hat{H}_o$ le complété de H_o ; il n'est pas, a priori, un sous-espace de E ; mais c'est aussi le quasi-complété de H_o , et, comme E est supposé quasi-complet, l'injection $H_o \to E$ se prolonge en une application linéaire continue Φ de $\hat{H}_o$ dans E :

$$\begin{tikzcd} H_o \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & E \\ & \hat{H}_o \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

Montrons que Φ est une injection. Pour cela, remarquons que, si $h \in \hat{H}_o$, on a

$$(14) \qquad \forall\ e' \in E' \ , \quad (h \mid Le')_{\hat{H}_o} = \langle \Phi(h) \ , e' \rangle \quad ;$$

c'est en effet vrai, pour e' fixé, pour $h \in H_o$ et les deux membres dépendent continuement de $h \in \hat{H}_o$. Alors, si $\Phi(h) = 0$, on a $(h \mid Le')_{\hat{H}_o} = 0$ pour tout $Le' \in H_o$, et, comme H_o est dense dans $\hat{H}_o$, on a $h = 0$, Φ est bien injective. On peut donc transporter par Φ la structure hilbertienne de $\hat{H}_o$ sur son image $H = \Phi(\hat{H}_o)$; H est un sous-espace hilbertien de E qu'on peut appeler <u>le complété canonique de</u> H_o <u>dans</u> E. C'est le seul sous-espace hilbertien de E dans lequel H_o soit dense et qui induise sur H_o sa structure préhilbertienne. On le notera directement $\hat{H}_o$ avec $\Phi =$ identité ; alors (14) montre, d'après (9), que son antinoyau associé est L, et il est bien trivialement le seul sous-espace hilbertien de E à **avoir** cette propriété. Ainsi l'application $\mathcal{H} \to \overline{\mathcal{E}}^+$ est bien une bijection. Nous verrons au § 4 que c'est un isomorphisme pour les structures définies sur ces deux ensembles.

La construction, que nous venons de donner de H à partir de l'antinoyau associé L, ne permet pas de reconnaître facilement si un $h \in E$ appartient à H. Mais :

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> $H \in \mathcal{H}$, L <u>l'antinoyau associé. Pour que</u> $h \in E$ <u>appartienne à</u> H, <u>il faut et il suffit que</u>

$$(15) \qquad \ell(h) = \sup_{e' \in E'} \frac{|\langle h \ , e' \rangle|}{\langle Le' \ , e' \rangle^{1/2}} < \infty \quad ;$$

<u>et alors on a</u>

$$\ell(h) = \|h\|_H \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Si $h \in H$, on a sûrement (15), et $\ell(h) \leq \|h\|_H$. Inversement, si l'on a (15), alors $Le' \rightsquigarrow \langle h \ , e' \rangle$ est une forme antilinéaire continue sur H_o, de norme $\leq \ell(h)$; alors il existe $k \in H$ tel que, pour tout $e' \in E'$, on ait

$$(k \mid Le')_H = \langle h \ , e' \rangle \ , \ \text{et} \ \ \|k\|_H \leq \ell(h) \quad ;$$

mais

$$(k \mid Le')_H = \langle k \ , e' \rangle \quad ,$$

donc $h = k$, et, par suite,

$$h \in H \quad \text{et} \quad \|h\|_H \leq \ell(h) \quad .$$

C. Q. F. D.

Remarque. - Ce théorème montrerait à nouveau que l'application canonique $\mathcal{H} \to \overline{\mathcal{E}}^+$ est injective, puisqu'il permet de construire H à partir de L . Il ne semble pas bien utilisable pour montrer directement que l'application est surjective ; si, pour L donné, on appelle H l'ensemble des h vérifiant (15) et si l'on pose $\ell(h) = \|h\|_H$, il n'est pas clair a priori que cela définisse un sous-espace hilbertien de E .

4. Isomorphisme de $\mathcal{H}$ et $\overline{\mathcal{E}}^+$.

1° Conservation de la multiplication par les scalaires ≥ 0 : évidente par (15).

2° Conservation de la relation d'ordre :

$$H_1 \leq H_2 \iff L_1 \leq L_2 \quad .$$

Soit d'abord $H_1 \leq H_2$. Pour $e' \in E'$, $L_1 e' \in H_1$ donc $\in H_2$, et

$$(16) \quad \langle L_1 e' , e' \rangle^{1/2} = \|L_1 e'\|_{H_1} \geq \|L_1 e'\|_{H_2} = \sup_{f' \in E'} \frac{|\langle L_1 e' , f' \rangle|}{\langle L_2 f' , f' \rangle^{1/2}} \geq \frac{\langle L_1 e' , e' \rangle}{\langle L_2 e' , e' \rangle^{1/2}} \quad ;$$

donc

$$\langle L_1 e' , e' \rangle^{1/2} \leq \langle L_2 e' , e' \rangle^{1/2} \quad \text{ou} \quad L_1 \leq L_2 \quad .$$

Inversement soit $L_1 \leq L_2$. Si $h \in H_1$, l'application du théorème 2 à H_2 et h montre que $h \in H_2$, et que $\|h\|_{H_2} \leq \|h\|_{H_1}$; donc $H_1 \leq H_2$.

3° Conservation de la loi d'addition.

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces hilbertiens de E , L_1 et L_2 leurs antinoyaux. Soit $e' \in E'$. L'élément $(L_1 e' , L_2 e')$ de la somme directe hilbertienne $H_1 \oplus H_2$ est orthogonal au noyau N de son application dans E définie au § 1, 2°. En effet, si (k_1 , k_2) est dans ce noyau, $k_1 + k_2 = 0$, et

$$(17) \quad \Big((k_1 , k_2) \mid (L_1 e' , L_2 e')\Big)_{H_1 \oplus H_2}$$
$$= (k_1 \mid L_1 e')_{H_1} + (k_2 \mid L_2 e')_{H_2} = \langle k_1 , e' \rangle + \langle k_2 , e' \rangle$$
$$= \langle k_1 + k_2 , e' \rangle = 0 \quad .$$

Donc son produit scalaire avec un vecteur quelconque de $H_1 \oplus H_2$ est égal à celui de leurs images dans $(H_1 \oplus H_2)/N$, et, par conséquent, dans $H_1 + H_2$. Soit donc $h \in H_1 + H_2$ de la forme $h_1 + h_2$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$.

$$(18) \quad \langle h , e' \rangle = \langle h_1 + h_2 , e' \rangle = \langle h_1 , e' \rangle + \langle h_2 , e' \rangle$$
$$= (h_1 \mid L_1 e')_{H_1} + (h_2 \mid L_2 e')_{H_2}$$
$$= \Big((h_1 , h_2) \mid (L_1 e' , L_2 e')\Big)_{H_1 \oplus H_2}$$
$$= (h_1 + h_2 \mid (L_1 + L_2)e')_{H_1 + H_2}$$
$$= (h \mid (L_1 + L_2)e')_{H_1 + H_2} \quad .$$

Alors la caractérisation (9) montre que $L_1 + L_2$ est l'antinoyau de $H_1 + H_2$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

THÉORÈME 3. - Soient H un sous-espace hilbertien de E, $(h_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Alors l'antinoyau L de H est

$$(19) \qquad L = \sum_{i\in I} h_i \otimes \overline{h_i} \quad ,$$

la somme étant prise dans $\overline{\mathcal{E}}_s(E' ; E)$; autrement dit, pour $e' \in E'$.

$$(20) \qquad Le' = \sum_{i\in I} \overline{\langle h_i , e' \rangle}\, h_i \quad .$$

COROLLAIRE. - Tout antinoyau $\geqslant 0$ est une "somme de carrés".

THÉORÈME 3 bis. - Soit $(h_i)_{i\in I}$ un ensemble d'éléments de E. Pour qu'il soit base hilbertienne d'un sous-espace hilbertien de E, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

(A) $\forall\ e' \in E'\ ,\ \sum_{i\in I} |\langle h_i\ ,\ e'\rangle|^2 < +\infty$;

(B) La famille $(h_i)_{i\in I}$ est Hilbert-libre ; on entend par là qu'il n'existe pas de relation non triviale

$$\sum_{i\in I} c_i\, h_i = 0\ ,\ \ \underline{\text{avec}}\ \ \sum_{i\in I} |c_i|^2 < +\infty \quad .$$

(Excellents exercices pour le lecteur).

Sous-espaces hilbertiens de l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions sur $\underset{\sim}{R}^n$. - Un antinoyau $\geqslant 0$ sur $\mathcal{D}'$ est une application antilinéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, définie (théorème des noyaux) à partir d'une distribution $L_{x,\xi}$ sur $\underset{\sim}{R}^n \times \underset{\sim}{R}^n$, par $\varphi \rightsquigarrow L\cdot\overline{\varphi}$, de type positif, c'est-à-dire vérifiant, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle L_{x,\xi}\ ,\ \varphi(x)\ \overline{\varphi}(\xi)\rangle \geqslant 0 \quad . \tag{21}$$

Le plus "connu" des sous-espaces hilbertiens de $\mathcal{D}'$ est L^2. Son antinoyau est l'application "barre" : $\varphi \to \overline{\varphi}$, de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, définie par la distribution $\delta_{x-\xi}$ sur $\underset{\sim}{R}^n \times \underset{\sim}{R}^n$ (en effet, si on part de cet antinoyau, l'espace H_0 est l'espace $\mathcal{D}$ avec la norme $\|\varphi\|^2_{H_0} = \int |\varphi|^2$, et son complété H dans $\mathcal{D}'$ est bien L^2).

5. Images par une application continue.

Soient E, F des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés quasi-complets ; soit u une application linéaire (resp. antilinéaire) continue de E dans F. Soit H un sous-espace hilbertien de E. On appelle image $u(H)$ le sous-espace hilbertien de F défini par le sous-espace vectoriel image $u(H)$, avec la structure hilbertienne suivante : si $N = u^{-1}(\{0\}) \cap H$, u définit, par passage au quotient, une bijection linéaire (resp. antilinéaire) $\mathring{u}$ de H/N sur $u(H)$, et la structure hilbertienne cherchée est la transportée (resp. antitransportée) par $\mathring{u}$ de celle de H/N.

THÉORÈME 4. - Si L est l'antinoyau associé au sous-espace hilbertien H de E, l'ensemble $L({}^t u(F'))$ est dense dans l'orthogonal de N dans H, et l'antinoyau associé à $u(H)$ est $u \circ L \circ {}^t u$.

Démonstration (cas linéaire). – Soit K l'orthogonal de N dans H ; alors $u(H)$ est l'image de K, avec transport de la structure hilbertienne. Soit, d'autre part, G le sous-espace hilbertien de F associé à $u \circ L \circ {}^t u$ (qui est trivialement un antinoyau $\geqslant 0$) ; nous devons montrer que $G = u(H) = u(K)$. Pour $h \in H$, $f' \in F'$ on a

$$(h \mid L({}^t u\, f'))_H = \langle h\,,\, {}^t u\, f'\rangle = \langle uh\,,\, f'\rangle \quad . \tag{22}$$

Donc h est orthogonal, dans H, à $L({}^t u(F'))$, si et seulement si $uh = 0$; l'orthogonal de $L({}^t u(F'))$ est N. Cela prouve que $L({}^t u(F'))$ est un sous-espace dense de K ; donc $(u \circ L \circ {}^t u)(F')$, sous-espace dense G_o de G, est aussi un sous-espace dense de $u(H)$; en outre, pour $f' \in F'$,

$$\|L({}^t u\, f')\|_H = \|(u \circ L \circ {}^t u)(f')\|_{u(H)} \quad .$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|(u \circ L \circ {}^t u)(f')\|_G^2 &= \langle (u \circ L \circ {}^t u)\, f'\,,\, f'\rangle \\ &= \langle L({}^t u\, f')\,,\, {}^t u\, f'\rangle = \|L({}^t u\, f')\|_H^2 \\ &= \|(u \circ L \circ {}^t u)\, f'\|_{u(H)}^2 \quad . \end{aligned} \tag{23}$$

Donc, sur G_o, les normes induites par G et par $u(H)$ coïncident ; donc $G = u(H)$, complété de G_o dans F.

Exemple. – La transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ applique $E = \mathcal{S}'$ dans $F = \mathcal{S}'$. Sa transposée ${}^t\mathfrak{F}$ est $\mathfrak{F}$ (symétrie du noyau $\exp(-2i\pi\langle x\,,\, y\rangle)$). Prenons $H = L^2 \subset \mathcal{S}'$. Alors $\mathfrak{F}(L^2)$ a son antinoyau défini par

$$\varphi \rightsquigarrow \mathfrak{F}\, \overline{{}^t\mathfrak{F}\, \varphi} = (\mathfrak{F} \circ \overline{\mathfrak{F}})(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}$$

(formule de réciprocité) ; donc c'est encore L^2, et $\mathfrak{F}$ est une isométrie de L^2 sur L^2 (PARSEVAL-PLANCHEREL). Comme connu, la formule de réciprocité entraîne celle de Parseval-Plancherel.

6. Antinoyaux inverses et sous-espaces hilbertiens en dualité.

Dans ce paragraphe, on suppose donnée une fois pour toutes une identification de E' avec un sous-espace de E avec une injection **égale à sa transposée**, donc faiblement continue (exemples : $E = \mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, etc.). Un sous-espace hilbertien H de E , à injection continue, sera dit normal, si $E' \subset H$, avec injection faiblement continue, et si E' est dense dans H . (Exemples : espaces de distributions normaux, pour $E = \mathcal{D}'$). Du diagramme $E' \to H \to E$, on déduit, par transposition, un diagramme $E' \to H' \to E$; si H est un sous-espace hilbertien normal de E , il en est de même de H' . Quelle relation existe entre leurs antinoyaux L , L' ? D'après leur définition (8), $L : E' \to E$ s'étend en une application $\tilde{L} : H' \to H$, qui est l'anti-isomorphisme canonique, tandis que L' s'étend en $\tilde{L}' : H \to H'$, qui est l'inverse du précédent ; en ce sens, L et L' sont "inverses" l'un de l'autre. Il est naturel de songer à définir chacun des deux espaces, non seulement à partir de son antinoyau, mais aussi à partir de l'antinoyau de l'autre.

THÉORÈME 5. - Si H et H' sont deux sous-espaces hilbertiens normaux de E , en dualité, d'antinoyaux L , L' alors :

H est le complété dans E du sous-espace $L(E')$ muni de la norme $\|Le'\|_H = \langle Le' , e' \rangle^{1/2}$; et le complété dans E du sous-espace E' , muni de la norme $\|e'\|_H = \langle L' e' , e' \rangle^{1/2}$.

Démonstration. - La première affirmation est ce qui a été vu au § 3. D'autre part, E' est dense dans H ; et $\|e'\|_H = \|L' e'\|_{H'}$ puisque L' est une anti-isométrie de H sur H' , et $\|L'e'\|_{H'} = \langle L' e' , e' \rangle^{1/2}$, ce qui démontre la deuxième affirmation.

THÉORÈME 6. - Soit H un sous-espace hilbertien de E , d'antinoyau L . Pour que H soit normal, il faut et il suffit que l'ensemble

$$B = \{e' ; \langle Le' , e' \rangle \leq 1\} \tag{24}$$

soit borné dans E , et fermé dans E' pour la topologie induite par E .

Démonstration.

1° Soit H normal. Alors, d'après le théorème 5, B est l'intersection de E' et de la boule-unité $\tilde{B}$ de H' . Donc B est bornée dans H' et, par suite, dans E ; en outre, $\tilde{B}$ est faiblement compacte dans H' , donc dans E , par conséquent faiblement fermée dans E ; donc B est fermée dans E' pour la topologie induite par E .

2° Supposons que B ait les propriétés énoncées. Soit E'_B l'espace E' muni de la norme $e' \to \langle Le', e'\rangle^{1/2}$ (c'est en général une semi-norme ; c'est ici une norme parce que B est bornée dans E). Comme $\langle Le', e'\rangle^{1/2} = \|Le'\|_H$, la norme sur E'_B est l'image réciproque de celle de H' , par l'application $E' \to H'$ transposée de l'injection $H \to E$. L'image de E' dans H' est dense ; on peut donc prendre H' comme exemplaire du complété $\hat{E}'_B$, et $E' \to H'$ est alors l'injection canonique $E'_B \to \hat{E}'_B$. Puisque B est bornée dans E , l'injection $E'_B \to E$ est continue ; elle se prolonge en une application continue des quasi-complétés, et alors, comme E est quasi-complet, il existe une application linéaire continue $H' \to E$, telle que l'injection $E' \to E$ soit la composée $E' \to H' \to E$. Par transposition, il existe une application linéaire faiblement continue $E' \to H$ telle que l'injection $E' \to E$ soit la composée $E' \to H \to E$. Donc E' est un sous-espace de H , avec injection faiblement continue. D'autre part, le fait que la boule-unité B de E'_B soit fermée dans E'_B pour la topologie induite par E , entraîne que l'application prolongée aux quasi-complétés, $H' \to E$, soit injective ; donc E' est dense dans H par transposition, et H est un sous-espace normal de E .

Remarque 1. - On peut remplacer les conditions sur B par les conditions équivalentes :

il faut et il suffit que l'espace E'_B , c'est-à-dire E' muni de la semi-norme $\|e'\|_B = \langle Le', e'\rangle^{1/2}$, ait une injection continue dans E et admette un complété dans E .

Remarque 2. - Nous dirons que l'application L est prolongeable, si elle se prolonge en une application antilinéaire continue de E dans E ; au quel cas, par transposition, elle applique E' dans E' . S'il en est ainsi B est sûrement fermée dans E' pour la topologie induite par E . En effet, B est l'intersection avec E' de l'image réciproque par L , continue de E dans E , de la boule-unité de H , partie faiblement compacte de H donc fermée dans E .

THÉORÈME 7. - Soit H un sous-espace hilbertien de E , d'antinoyau L prolongeable. Pour que H soit normal, il faut et il suffit qu'il existe un antinoyau $M \geq 0$, inverse bilatère de L ; dans ce cas, l'antinoyau L' du dual H' de H

<u>est le plus petit antinoyau</u> $\geqslant 0$ <u>inverse bilatère de</u> L.

<u>Démonstration</u>. — Soit M un antinoyau quelconque. Alors $L \circ M$ et $M \circ L$ ont un sens, car $L \circ M$ est $E' \xrightarrow{M} E \xrightarrow{L} E$, et $M \circ L$ est $E' \xrightarrow{L} E' \xrightarrow{M} E$. M est inverse bilatère de L si $L \circ M = M \circ L = I$, injection canonique donnée de E' dans E.

Si H est normal, et si L' est l'antinoyau de son dual H', L' est un inverse bilatère de L d'après le début du paragraphe 6.

Inversement, soit M un antinoyau $\geqslant 0$ inverse bilatère de L; soit K son sous-espace hilbertien associé. Soit $N = K \cap L^{-1}(\{0\})$, et soit K_1 l'orthogonal de N dans K. L'image $L(K) = L(K_1)$ a pour antinoyau, d'après le théorème 4, $L \circ M \circ {}^tL$; mais ${}^tL = L$ (symétrie hermitienne), et $L \circ M = I$, donc cet antinoyau est L; alors $L(K) = H$, et E' est un sous-espace dense de K_1. Alors, comme M est faiblement continu $E' \to K$ et que $M(E')$ est dense dans K, $L \circ M = I$ est faiblement continue de E' dans $L(K) = H$, et E' est dense dans H : H est normal. Pour $e' \in E'$, $\|e'\|_{K_1} = \|Le'\|_H = \|e'\|_{H'}$; donc sur E', dense dans K_1 et dans H', les normes induites par K_1 et H' coïncident, donc $K_1 = H'$. Alors $K \geqslant H'$ et, par suite, $M \geqslant L'$, L' est le plus petit antinoyau $\geqslant 0$ inverse bilatère de L. On voit même comment on obtient tous les sous-espaces K ou tous les antinoyaux M : on prend n'importe quel sous-espace hilbertien N de $L^{-1}(\{0\})$, alors $N \cap H' = (\{0\})$, et $K = H' + N$.

7. <u>Applications à la théorie du potentiel</u>.

Prenons, par exemple, $E = \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$. Soit D un opérateur différentiel à coefficients C^∞, de type positif :

$$\forall \ \varphi \in \mathcal{D}, \ \langle D\varphi, \overline{\varphi}\rangle \geqslant 0 \quad . \tag{24 bis}$$

Alors l'antinoyau $\varphi \to \overline{D\varphi}$ définit un sous-espace hilbertien H de $\mathcal{D}'$. On appelle espace des <u>charges d'énergie finie</u> le conjugué $\overline{H}$; c'est le complété dans $\mathcal{D}'$ de l'espace $D\mathcal{D}$, pour la norme $\|D\varphi\|_{\overline{H}} = \|\overline{D\varphi}\|_H = \langle D\varphi, \overline{\varphi}\rangle^{1/2}$. On dit que D <u>définit une théorie du potentiel si</u> $\overline{H}$ <u>est un espace de distributions normal</u>. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit (théorème 6 et remarques 1 et 2 qui le suivent) que $B = \{\varphi ; \langle D\varphi, \overline{\varphi}\rangle \leq 1\}$ soit borné dans $\mathcal{D}'$, ou encore que $\mathcal{D}_B$ ($\mathcal{D}$ muni de la norme $\varphi \rightsquigarrow \langle D\varphi, \overline{\varphi}\rangle^{1/2}$) ait une injection continue dans $\mathcal{D}'$; le complété de $\mathcal{D}_B$ dans $\mathcal{D}'$ est alors H'. D'après le théorème 7, il faut et il suffit que D ait un noyau élémentaire bilatère, de type positif ; alors il en existe un plus "petit" que tous les autres (pour la relation d'ordre : de type positif), le noyau de Green G ; l'antinoyau de H' est $\varphi \to G\bar{\varphi}$. D et G sont les isomorphismes canoniques réciproques $H' \to \overline{H}$ et $\overline{H} \to H'$. H' est l'espace des potentiels d'énergie finie. Si $T \in \overline{H}$, GT est son potentiel ; si $U \in H'$, DU est sa charge.

Soit ω un ouvert $\subset \Omega$. Alors D a dans ω les mêmes propriétés que dans Ω, donc définit encore une théorie des potentiels dans ω. Le noyau de Green G_Ω induit encore dans ω un noyau élémentaire bilatère de D, de type positif, mais ce n'est pas le plus petit ; d'où un nouveau noyau de Green $G_\omega \leq G_\Omega$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, et si D est à coefficients constants, $\mathcal{F}D$ est un polynôme $P \geq 0$. L'espace H (ou $\overline{H}$) est invariant par translation ; s'il est normal, son dual H' est nécessairement invariant par translation. Le noyau de Green est donc, s'il existe, un noyau de convolution. Il y a donc théorie du potentiel, autrement dit H est normal, si et seulement si D a une solution élémentaire de type positif ; alors le noyau de Green est l'opérateur de convolution avec la solution élémentaire la plus petite (pour la relation d'ordre : de type positif). Il faut et il suffit pour cela que $\frac{1}{P}$ soit localement intégrable et tempéré ; alors la solution élémentaire la plus petite est $\overline{\mathcal{F}}\frac{1}{P}$. Pour $D = -\Delta$,

$$P = 4\pi^2 r^2 , \quad \frac{1}{P} = \frac{1}{4\pi^2 r^2} ,$$

on doit avoir

$$n \geq 3 , \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}}\frac{1}{4\pi^2 r^2} = -\frac{1}{(n-2)\, s_n}\frac{1}{r^{n-2}} ;$$

G est l'opérateur de convolution avec cette distribution.

Pour montrer les nombreuses relations de cette théorie avec celle des équations aux dérivées partielles, nous ajouterons ceci. Si $H^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions sur Ω, dans L^2 ainsi que leurs dérivées premières, avec

$$\|f\|^2_{H^1} = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|^2 + \lambda|f|^2\Big) , \tag{25}$$

et si $H^1_0(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, l'antinoyau de H^1_0 est $\varphi \to G\bar{\varphi}$, et celui de H^1 est $\varphi \to N\bar{\varphi}$, où G est l'opérateur de Green et N l'opérateur de Neumann de $-\Delta+\lambda$; on a bien $N \geqslant G$, G est le plus petit noyau élémentaire bilatère de $-\Delta+\lambda$.

$-\Delta+\lambda$ définit une théorie des potentiels dans Ω, avec

$$\text{espace des charges} = H^{-1}(\Omega) \quad ,$$

$$\text{espace des potentiels} = H_0^1(\Omega) \quad .$$

8. Sous-espaces hermitiens et antinoyaux hermitiens associés.

On appelle espace hermitien H un espace vectoriel topologique hilbertisable, muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne continue (non nécessairement $\geqslant 0$), telle que l'application antilinéaire canonique qu'elle définit de H dans H' soit un anti-isomorphisme de H sur H'. Une structure hilbertienne H_0 choisie arbitrairement sur H permet d'associer à la forme hermitienne un opérateur hermitien continu inversible A de H_0 dans H_0 ; alors $A = A_+ - A_-$, de sorte que H est somme directe topologique de deux sous-espaces H_1, H_2 orthogonaux pour la forme hermitienne, tels que cette forme soit définie positive sur H_1, définie négative sur H_2 et définisse sur chacun d'eux une structure hilbertienne compatible avec la topologie induite par H. On écrira $H \approx H_1 \ominus H_2$; H sera différence hermitienne des espaces hilbertiens H_1, H_2. Naturellement cette décomposition n'est pas intrinsèque, car H_0 n'est pas donné dans la structure de H.

Un sous-espace hermitien de E est un sous-espace vectoriel de E, muni d'une structure d'espace hermitien avec injection continue.

Bien qu'ayant donné la définition générale d'un antinoyau au § 2, nous entendrons désormais par antinoyau relatif à E, un antinoyau hermitien, majoré par un antinoyau $\geqslant 0$, donc pouvant s'exprimer comme différence de deux antinoyaux $\geqslant 0$.

THÉORÈME 8. — <u>A tout sous-espace hermitien</u> H <u>de</u> E, <u>on peut associer un antinoyau</u> L. <u>Tout antinoyau</u> L <u>est l'associé d'au moins un sous-espace hermitien</u> H (<u>mais en général d'une infinité</u>).

<u>Démonstration.</u>

1° Si H est donné, $L \in \overline{\mathcal{E}}(E' ; E)$ se définit par (8) ; il est caractérisé par (9) et vérifie (10). Comme on peut exprimer H par une différence $H_1 \ominus H_2$, on aura $L = L_1 - L_2$, L_1 et L_2 antinoyaux $\geqslant 0$ de H_1 et H_2 ; donc L est bien un antinoyau au sens restreint adopté ici, et peut même s'exprimer comme différence de deux antinoyaux $\geqslant 0$ étrangers.

2° Soient K un sous-espace hilbertien de E , H un sous-espace hermitien de K . Compte tenu de la structure hilbertienne de K , l'antinoyau de H relativement à K peut être remplacé par un <u>noyau</u> A , opérateur hermitien continu de K dans K (et même dans H). Soit L l'antinoyau de K relativement à E . Alors l'antinoyau de H dans E est $A \circ L$ ($L : E' \to K$, $A : K \to H$) . En effet, $A \circ L$ n'est autre que

(25bis) $$\underbrace{E' \to K' \to K}_{L} \underbrace{\to K' \to H' \to H}_{A}$$

où $E' \to H' \to H$, noyau de H dans E . Ce résultat était également intéressant dans le cadre des paragraphes précédents, lorsque H était hilbertien ; si, en particulier, H est un sous-espace fermé de K , avec la structure hilbertienne induite, A est le projecteur orthogonal de K sur H , ce que nous utiliserons plus loin.

3° Inversement soit L un antinoyau $E' \to E$, et M un antinoyau $\geqslant 0$ tel que

(26) $$\forall\ e' , f' \in E' , \quad |\langle Le' , f' \rangle| \leqslant \langle Me' , e' \rangle^{1/2} \langle Mf' , f' \rangle^{1/2} \quad .$$

Soit K le sous-espace hilbertien de E d'antinoyau M . La forme sesquilinéaire hermitienne $(Me' , Mf') \rightsquigarrow \langle Le' , f' \rangle$ sur $M(E') \times M(E')$ est continue de norme $\leqslant 1$; elle se prolonge en une forme analogue sur $K \times K$, donc il existe une application linéaire hermitienne continue A , de norme $\leqslant 1$, de K dans K , telle que

(27) $$\langle Le' , f' \rangle = (AMe' \mid Mf')_H = \langle AMe' , f' \rangle$$

ou $L = A \circ M$.

On peut écrire $A = A_+ - A_-$ (avec, par exemple, $A^{-1}(\{0\}) = A_+^{-1}(\{0\})$). A_+ et A_- définissent, dans K , deux sous-espaces hilbertiens H_1 , H_2 , $H_1 \cap H_2 = \{0\}$; donc A est associé dans K à l'espace hermitien $H_1 - H_2$ de définition évidente ; alors $L = A \circ M$ est associé dans E à $H_1 - H_2$, d'après le 2°, ce qui démontre la 2e affirmation du théorème. Cela revient à dire qu'on peut (d'une infinité de manières, en général) représenter un antinoyau par une différence $L_1 - L_2$ de deux antinoyaux ≥ 0 étrangers, d'où un sous-espace hermitien $H = H_1 - H_2$ qui lui donne naissance. Si nous disons, à la fin de l'énoncé du théorème, qu'il n'y a pas unicité, nous entendons par là que $H = H_1 - H_2$ va, en général, varier quand la décomposition $L_1 - L_2$ varie. C'est cette non-unicité que nous allons préciser.

– Voici d'abord des résultats d'unicité.

THÉORÈME 9.

1° Si G, H sont deux sous-espaces hermitiens de E, de même antinoyau L, et si $G \subset H$, alors $G = H$.

2° Si $L = L_1 - L_2$, L_1 et L_2 antinoyaux ≥ 0, L_2 de rang fini n, alors, pour toutes les décompositions $L = L_3 - L_4$, où L_3 et L_4 sont des antinoyaux ≥ 0 étrangers, L_4 a le même rang fini $m \leq n$; en outre, il existe un seul sous-espace hermitien de E d'antinoyau L.

Démonstration.

1° Soit K une structure hilbertienne sur le sous-espace H, et soit M l'antinoyau de K. Alors G et H ont des injections continues dans E, donc dans K d'après le théorème du graphe fermé, donc ont, relativement à K, des noyaux associés U et V, et (voir théorème 8, démonstration, 2°), $L = U \circ M = V \circ M$; comme $M(E')$ est dense dans K, cela implique $U = V$. En outre, H est l'espace K lui-même, donc V est hermitien inversible de K dans K. Mais G contient $U(K) = V(K) = K$, donc $G = H = K$ en tant qu'ensembles. Le théorème du graphe fermé montre que leurs topologies sont les mêmes. Enfin, pour $\xi, \eta \in K$:

$$(V\xi \mid V\eta)_H = (V\xi \mid \eta)_K = (V\xi \mid V\eta)_G \quad ; \tag{28}$$

comme V est inversible, cela prouve que les formes hermitiennes sur G et H coïncident.

2° Soient H_1, H_2, H_3, H_4 les sous-espaces hilbertiens d'antinoyaux L_1, L_2, L_3, L_4.

On a $H_1 + H_4 = H_2 + H_3$, que nous appelerons K. Mesurons les codimensions relativement à K. On a $\dim H_2 = n$, donc $\operatorname{codim} H_3 \leq n$; comme $H_3 \cap H_4 = \{0\}$, on a $\dim H_4 = m \leqslant n$. Si on compare deux décompositions $L_3 - L_4$, $L_5 - L_6$, avec chaque fois deux antinoyaux $\geqslant 0$ étrangers, elles donnent la même dimension pour H_4 et H_6, car on a alors deux inégalités en sens inverse.

Soient deux espaces hermitiens de même antinoyau L. On aura deux décompositions $L = L_3 - L_4 = L_5 - L_6$, chaque fois comme différence de deux antinoyaux $\geqslant 0$ étrangers ; et les deux sous-espaces hermitiens seront $H_3 - H_4$ et $H_5 - H_6$. Appelons H, cette fois, l'espace $H_3 + H_6 = H_4 + H_5$, et mesurons les codimensions par rapport à H. On a $\dim H_4 = \dim H_6 = m$; de $H = H_3 + H_6$, on tire $\operatorname{codim} H_3 \leqslant m$, et, de $H = H_4 + H_5$, $\operatorname{codim} H_5 \leqslant m$; comme $H_3 \cap H_4 = \{0\}$, on a

$$\operatorname{codim} H_3 = m, \quad \text{et} \quad H_3 + H_4 = H \qquad ;$$

de même, comme $H_5 \cap H_6 = \{0\}$,

$$\operatorname{codim} H_5 = m, \quad \text{et} \quad H_5 + H_6 = H \qquad .$$

Alors les structures hermitiennes $H_3 - H_4$ et $H_5 - H_6$ sont placées sur l'espace $H_3 + H_4 = H_5 + H_6 = H$, donc, d'après le 1°,elles coïncident.

Ainsi une condition de finitude entraîne l'unicité du sous-espace hermitien donnant un antinoyau L. Mais cette condition de finitude n'est pas nécessaire pour assurer l'unicité : si E est hilbertisable, si L est un antinoyau associé à une structure hermitienne H sur E lui-même, le 1° montre qu'il existe un seul sous-espace hermitien d'antinoyau L, même si $L = L_1 - L_2$, L_1 et L_2 antinoyaux $\geqslant 0$ étrangers de rangs infinis.

Voici maintenant des résultats de non-unicité. Nous dirons qu'un sous-espace hilbertien H de E est Hilbert-compact, s'il existe un sous-espace hilbertien K de E, $K \supset H$, tel que l'injection $H \to K$ soit compacte. Si E est le dual d'un tonnelé nucléaire (exemple : $E = \mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, etc.), tout sous-espace hilbertien de E est Hilbert compact. Alors :

THÉORÈME 10. – Soit L un antinoyau de la forme $L_1 - L_2$ où L_1 et L_2 sont des antinoyaux $\geqslant 0$ étrangers, représentant des sous-espaces hilbertiens Hilbert-compacts de dimension infinie, alors il existe une infinité de sous-espaces hermitiens de E d'antinoyau L.

La démonstration est trop longue pour pouvoir être donnée ici. Bornons-nous à donner un autre exemple de non-unicité, essentiel pour la démonstration du théorème 10 (et qui montre aussi que la condition de non-unicité donnée dans ce théorème est bien trop forte).

Soit E un Hilbert, et soient H_1, H_2 deux sous-espaces vectoriels fermés, d'intersection $\{0\}$ et de somme dense mais distincte de E. Leurs orthogonaux H_4, H_3 ont la même propriété. Nous les munirons tous de la structure hilbertienne induite. Puisque E est hilbertien on pourra, au lieu d'antinoyaux, considérer les noyaux de ces espaces ; le noyau A_i de H_i est le projecteur orthogonal de E sur H_i. Alors $H_1 + H_4 = H_2 + H_3 = E$, donc $A_1 + A_4 = A_2 + A_3$, et, par suite, $A_1 - A_2$ et $A_3 - A_4$ sont le même opérateur hermitien A. Cependant les espaces hermitiens $H_1 - H_2$ et $H_3 - H_4$ sont distincts ; sans quoi leurs espaces vectoriels sous-jacents, $H_1 + H_2$, $H_3 + H_4$, seraient confondus ; on aurait alors $H_2 \subset H_1 + H_2$, $H_3 \subset H_1 + H_2$ donc $E = H_2 + H_3 \subset H_1 + H_2$, ou $H_1 + H_2 = E$, or il est supposé que $H_1 + H_2$ est dense mais $\neq E$.

Remarque. - L'ensemble des antinoyaux a une structure d'espace vectoriel ordonné. Le résultat du théorème 1 montre qu'il n'existe aucune structure raisonnable de ce type sur l'ensemble des sous-espaces hermitiens de E (même si E est un Hilbert). Car on peut trouver quatre sous-espaces hilbertiens H_1, H_2, H_3, H_4, $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, $H_3 \cap H_4 = \{0\}$, pour lesquels $H_1 + H_4 = H_2 + H_3$, et pour lesquels $H_1 - H_2 \neq H_3 - H_4$, avec la définition raisonnable adoptée pour $H_1 - H_2$ lorsque $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.

9. Bibliographie

C'est ARONSZAJN qui a introduit, et systématiquement étudié les "noyaux reproduisants" (qui correspondent au cas où E est l'espace $\underset{\sim}{C}^X$ des fonctions complexes sur un ensemble X, muni de la topologie de la convergence simple). Citons, par exemple :

ARONSZAJN (N.). - Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. math. Soc., t. 68, 1950, p. 337-404.

Le noyau de Bergman correspond à $H =$ espace des fonctions holomorphes sur un ouvert X de $\underset{\sim}{C}^n$, muni de la norme L^2.

Une partie des résultats de cet exposé se trouve dans mes conférences multigraphiées de Berkeley :

SCHWARTZ (Laurent). - Application of distributions to the study of elementary particles in relativistic quantum mechanics. - Berkeley, University of California, Department of Mathematics, 1961 (Technical Report, 7).

et dans celles du Centro internazionale Matematico Estivo [Septembre 1961. Vallombrosa (Italie)] qui ne sont pas encore parues.