PIERRE EYMARD

# Homomorphismes des algèbres de groupe

*Séminaire N. Bourbaki*, 1962, exp. n° 231, p. 129-142
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__129_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 231

Février 1962

# HOMOMORPHISMES DES ALGÈBRES DE GROUPE

par Pierre EYMARD

(d'après Paul J. COHEN)

## I. Introduction.

### 1. Notations.

Soit $G$ un groupe abélien localement compact. Notons $M(G)$ l'algèbre de Banach des mesures complexes bornées sur $G$, pour le produit de composition

$$\mu \star \nu(h) = \iint h(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

($\mu \in M(G)$, $\nu \in M(G)$, $h$ continue à support compact sur $G$), et la norme $\|\mu\| = \int_G d|\mu|(x)$. Soit $L^1(G)$ l'ensemble des (classes de) fonctions $f$ intégrables par rapport à $dx$, mesure de Haar sur $G$ ; en identifiant $f$ à la mesure $f(x)\,dx$, $L^1(G)$ apparaît comme un idéal fermé de $M(G)$. Si $x \in G$, on note $\delta_x$ la masse $1$ en $x$. Soit $\hat{G}$ le groupe dual de $G$. Si $x \in G$ et si $\hat{x} \in \hat{G}$, on note $\langle \hat{x}, x\rangle$ la valeur en $x$ du caractère $\hat{x}$. On note $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier

$$\hat{x} \to \int_G \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\, d\mu(x) \quad \text{de} \quad \mu \in M(G) .$$

Soient $G$ et $H$ deux groupes abéliens localement compacts. Adjoignons à $\hat{G}$ un point $\omega$, et munissons $\hat{G} \cup \{\omega\}$ de la topologie du compactifié d'Aleksandrov si $\hat{G}$ n'est pas compact ; si $\hat{G}$ est compact, $\omega$ lui est adjoint comme point isolé. Soit $\varphi$ un homomorphisme de l'algèbre $L^1(G)$ dans l'algèbre $M(H)$ ; comme $M(H)$ est semi-simple, $\varphi$ est automatiquement continu (cf. [9], p. 75). Si $\hat{x} \in \hat{H}$, l'application $f \to \widehat{\varphi f}(\hat{x})$ est un homomorphisme de l'algèbre de Banach $L^1(G)$ dans les complexes, éventuellement nul ; donc il lui correspond un élément de $\hat{G} \cup \{\omega\}$, noté $\hat{\varphi}\hat{x}$, tel que, pour tous $f \in L^1(G)$ et $\hat{x} \in \hat{H}$,

$$\widehat{\varphi f}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x}) ,$$

où l'on convient que $\hat{\varphi}\hat{x} = \omega$ si $f \to \widehat{\varphi f}(\hat{x})$ est identiquement nul, et où l'on pose $\hat{f}(\omega) = 0$. L'application $\hat{x} \to \hat{\varphi}\hat{x}$ de $\hat{H}$ dans $\hat{G} \cup \{\omega\}$ sera dite l'application duale de l'homomorphisme $\varphi$ ; elle est continue ; deux homomorphismes distincts ont des applications duales non identiques.

## 2. Énoncé des résultats.

Les travaux de Paul J. COHEN ([2] et [3]) concernent trois problèmes étroitement liés ; il résoud entièrement les deux premiers.

Problème 1. – Soit $G$ un groupe abélien localement compact. Trouver toutes les mesures $\mu \in M(G)$ telles que $\mu \star \mu = \mu$.

Problème 2. – Soient $G$ et $H$ deux groupes abéliens localement compacts. Trouver tous les homomorphismes $\varphi$ de l'algèbre $L^1(G)$ dans l'algèbre $M(H)$. Autrement dit, caractériser les applications $\hat{\varphi}$ de $\hat{H}$ dans $\hat{G} \cup \{\omega\}$ telles que, pour toute $f \in L^1(G)$, la fonction $\hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x})$ soit transformée de Fourier d'une mesure appartenant à $M(H)$.

Problème 3. – Soit $G$ un groupe abélien compact. Etudier pour $N \to \infty$ le comportement de la norme dans $L^1(G)$ d'une somme de $N$ caractères de $G$.

Le problème 1 a d'abord été résolu par HELSON [5] dans le cas $G = T$, puis par RUDIN [11] dans le cas $G = T^n$. Voici le résultat de COHEN.

THÉORÈME 1. – Pour qu'une mesure bornée $\mu$ sur $G$ vérifie $\mu \star \mu = \mu$, il faut et il suffit que $\hat{\mu}$ soit la fonction caractéristique d'un ensemble $E \subset \hat{G}$, où $E$ appartient à l'algèbre de Boole engendrée par les classes de $\hat{G}$ modulo ses sous-groupes ouverts.

Autrement dit, il n'y a pas d'autres mesures idempotentes que celles qui sont évidentes, et fabriquées comme suit : disons qu'une $\nu \in M(G)$ est primitive, s'il existe un sous-groupe compact $K$ de $G$ et des $\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_p \in \hat{K}$ tels que $\nu$ soit l'image par injection canonique dans $G$ de la mesure $(\hat{k}_1 + \ldots + \hat{k}_p)\, dk$, où $dk$ est la mesure de Haar normalisée sur $K$ ; les $\mu$ idempotentes sont celles qui s'obtiennent à partir des $\nu$ primitives par une suite finie d'opérations du type $\nu_1 \star \nu_2$, $\delta - \nu$, $\nu_1 + \nu_2 - \nu_1 \star \nu_2$ ; elles sont combinaisons linéaires de mesures primitives. D'un autre point de vue, le théorème 1 caractérise tous les projecteurs continus de l'espace de Banach $L^1(G)$ qui commutent aux translations. Signalons que le problème 1 n'offre pas de difficulté sérieuse (même pour $G$ non abélien) sous l'hypothèse supplémentaire $\|\mu\| = 1$, et en particulier si

$\mu$ est supposée positive : dans ce dernier cas, il n'y a pas d'autres solutions que les mesures de Haar des sous-groupes compacts (cf. [13]).

Pour $G = H = \underset{\sim}{R}$ , la solution du problème 2 est due essentiellement à BEURLING et HELSON ([1] et [6]), qui de là passent au cas où $\hat{H}$ est connexe en utilisant la densité dans $\hat{H}$ de la réunion des sous-groupes à un paramètre. Pour le cas $G = H = T$ , le problème 2 est résolu par RUDIN [10], qui s'appuie sur la solution au problème 1 donnée dans ce cas par HELSON [5]. L'étude du cas $G = H = \underset{\sim}{Z}$ est due à LEJBENZON [8] et KAHANE [7]. Pour le cas général, COHEN se ramène d'abord, par compactification presque périodique, au cas où $G$ et $H$ sont compacts ; dans ce cas, il remarque que la partie du graphe de $\hat{\varphi}$ située dans $\hat{H} \times \hat{G}$ doit être le support de la transformée de Fourier d'une mesure idempotente sur $H \times G$ : on est ainsi ramené au problème 1. Avant d'énoncer le théorème de Cohen, donnons quelques exemples d'homomorphismes :

i. Soit $\hat{\sigma}$ un homomorphisme continu de $\hat{H}$ dans $\hat{G}$ ; soit $\sigma$ l'homomorphisme de $G$ dans $H$ défini par $\langle \hat{y} , \sigma x \rangle = \langle \hat{\sigma}\hat{y} , x \rangle$ pour tous $x \in G$ , $\hat{y} \in \hat{H}$ . Si $f \in L^1(G)$ , posons

$$\varphi_{\hat{\sigma}}(f) = \int_G \delta_{\sigma(x)} f(x)\, dx \quad .$$

On a $\varphi_{\hat{\sigma}}(f) \in M(H)$ , et $\varphi_{\hat{\sigma}}$ est un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$ tel que $\hat{\varphi}_{\hat{\sigma}} = \hat{\sigma}$ .

ii. Soit $\alpha$ une mesure idempotente appartenant à $M(H)$ ; soit $E \subset \hat{H}$ le support de $\hat{\alpha}$ . Si $\varphi$ est un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$ , l'application $f \to \alpha \star \varphi(f)$ en est un autre, dont l'application duale coïncide avec $\hat{\varphi}$ sur $E$ , et vaut $\omega$ en dehors de $E$ .

iii. Soit $K$ un sous-groupe ouvert de $\hat{H}$ , orthogonal au sous-groupe (compact) $K_o$ de $H$ ; soit $\hat{\sigma}$ un homomorphisme continu de $K$ dans $\hat{G}$ . Alors $\hat{\sigma}$ est la restriction à $K$ d'une $\hat{\varphi}$ duale de l'homomorphisme $\varphi$ de $L^1(G)$ dans $M(H)$ défini par

$$\varphi : \quad L^1(G) \xrightarrow{\varphi_{\hat{\sigma}}} M(H/K_o) \xrightarrow{\pi} M(H) \quad ,$$

où $\varphi_{\hat{\sigma}}$ a été défini en (i), et où $\pi$ est donné par la formule (convenablement normalisée)

$$\int_H h(x)\, d\pi(\mu)\,(x) = \int_{H/K_o} d\mu(\dot{x}) \int_{K_o} h(k_o + x)\, dk_o \quad .$$

Combinant cette remarque avec (ii), on voit que l'application de $\hat{H}$ dans $\hat{G} \cup \{\omega\}$, qui est identique à $\hat{\sigma}$ sur $K$ et vaut $\omega$ hors de $K$, est duale d'un homomorphisme.

iv. Soient donnés $\hat{a} \in \hat{G}$, $\hat{b} \in \hat{H}$. Si $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G} \cup \{\omega\}$ est duale d'un homomorphisme, il en est de même pour l'application $\hat{x} \to \hat{a} + \hat{\varphi}(\hat{x} + \hat{b})$.

COHEN démontre en somme qu'il n'y a pas d'autres solutions au problème 2 que celles qu'on obtient en combinant un nombre fini de fois les remarques précédentes. De façon précise :

THÉORÈME 2. – Soient $G$ et $H$ deux groupes abéliens localement compacts, et $\hat{\varphi}$ une application de $\hat{H}$ dans $\hat{G} \cup \{\omega\}$. Pour que $\hat{\varphi}$ soit duale d'un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$, il faut et il suffit qu'il existe :

1° un nombre fini de sous-groupes ouverts $K_i$ de $\hat{H}$ et, pour chaque $i = 1, \dots, n$, un $\hat{a}_i \in \hat{G}$, un $\hat{b}_i \in \hat{H}$, et un homomorphisme continu $\hat{\sigma}_i$ de $K_i$ dans $\hat{G}$ ;

2° une partition finie $\hat{H} = \bigcup_{j=1}^{p} S_j$, chaque $S_j$ figurant dans l'algèbre de Boole engendrée par les classes $K_i - \hat{b}_i$ ;

tels que, pour tout $j = 1, \dots, p$, la restriction de $\hat{\varphi}$ à $S_j$ ou bien vaut identiquement $\omega$, ou bien est de la forme $\hat{x} \to \hat{a}_i + \hat{\sigma}_i(\hat{x} + \hat{b}_i)$ pour un indice $i$ tel que $S_j \subset K_i - \hat{b}_i$.

Pour $G = T$, le problème 3 est de borner inférieurement la norme dans $L^1(T)$ des sommes finies d'exponentielles

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \exp(in_j x) \qquad ,$$

où les $n_j$ sont des entiers tous distincts. LITTLEWOOD [4] conjecture que

$$\|f\| = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \exp(in_j x) \right| dx > K \log N \qquad ,$$

où $K$ est une constante indépendante de $N$. Les résultats obtenus jusqu'à présent concernaient des suites $n_j$ soumises à des hypothèses particulières (cf. SALEM [12]). On ignorait si, pour des suites $n_j$ quelconques, $\|f\|$ augmente indéfiniment avec $N$. Les relations entre les problèmes 3 et 1 sont éclairées par la remarque suivante : s'il existait une suite de $f_N$, somme de $N$ exponentielles, telle que les $\|f_N\|$ soient bornées (mais, d'après COHEN, ce n'est pas le cas!), on pourrait en extraire une suite infinie convergeant vaguement dans $M(T)$ vers une $\mu$ idempotente. L'estimation conjecturée par LITTLEWOOD est la meilleure possible (cas des $n_j = j$ ) ; COHEN démontre un peu moins.

THÉORÈME 3. - Soit $G$ un groupe abélien compact connexe. Pour $j = 1, \dots, N \geqslant 3$, soient $\hat{x}_j$ des caractères distincts sur $G$, et des constantes telles que $|c_j| \geqslant 1$. On a :

$$\int_G \left| \sum_{j=1}^{N} c_j \langle \hat{x}_j , x\rangle \right| dx > K(\log N / \log\log N)^{1/8} ,$$

où $K$ est une constante indépendante des $\hat{x}_j$, des $c_j$, et de $G$.

La généralisation aux groupes connexes n'est pas sans intérêt ; par exemple, prenant pour $G$ le compactifié presque périodique de $\mathbb{R}$, on obtient l'inégalité

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \left| \sum_{j=1}^{N} \exp(i\lambda_j x) \right| dx > K(\log N / \log\log N)^{1/8}$$

pour des nombres réels distincts $\lambda_j$ quelconques.

## II. Réduction du problème 2 au problème 1.

Admettons provisoirement le théorème 1.

### 1. Prolongement de $\varphi$ à $M(G)$.

PROPOSITION 1. - Tout homomorphisme $\varphi$ de $L^1(G)$ dans $M(H)$ se prolonge en un homomorphisme, de même norme, de $M(G)$ dans $M(H)$, par la formule

$$\widehat{\varphi\mu}(\hat{x}) = \hat{\mu}(\hat{\varphi}\hat{x}) , \qquad (\mu \in M(G) , \ \hat{x} \in \hat{H}) \tag{1}$$

où l'on convient que $\hat{\mu}(\omega) = 0$.

Dans l'espace des fonctions continues sur $H$ nulles à l'infini, est uniformément dense le sous-espace des $g \in L^1(H)$, continues et telles que $\hat{g}$ soit à support compact. Soient $k_n \in L^1(G)$, $\|k_n\| = 1$. Dans l'inégalité

$$\left| \int_{\hat{H}} \hat{g}(-\hat{x})\, \hat{\mu}(\hat{\varphi}\hat{x})\, \hat{k}_n(\hat{\varphi}\hat{x})\, d\hat{x} \right| = \left| \int_{\hat{H}} \hat{g}(-\hat{x})\, \widehat{\varphi(k_n * \mu)}(\hat{x})\, d\hat{x} \right| = \left| \int_H g(x)\, d\varphi(k_n * \mu)(x) \right|$$

$$\leq |||\varphi||| \; ||\mu|| \; ||g||_\infty \quad ,$$

prenons les $k_n$ tels que les fonctions $\hat{x} \to \hat{k}_n(\hat{\varphi}\hat{x})$ tendent vers 1 uniformément sur $(-\operatorname{support}(\hat{g})) \cap \hat{\varphi}^{-1}(\hat{G})$. On voit que la forme linéaire

$$g \to \int_{\hat{H}} \hat{g}(-\hat{x}) \; \hat{\mu}(\hat{\varphi}\hat{x}) \; d\hat{x}$$

se prolonge par continuité en une mesure $\varphi(\mu) \in M(H)$, de norme $\leq |||\varphi||| \; ||\mu||$, et dont la transformée de Fourier est donnée par (1).

C. Q. F. D.

Remarque. – Il résulte a posteriori du théorème 2 que le prolongement de $\varphi$ est unique si et seulement si l'on est dans l'un des cas : $G$ discret ; $\omega \notin \hat{\varphi}(\hat{H})$.

2. Cas des groupes compacts.

PROPOSITION 2. – Soient $G$ et $H$ abéliens compacts ; $\varphi$ un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$. Soit $E$ la partie de $\hat{H} \times \hat{G}$ formée des $(\hat{x}, \hat{\varphi}\hat{x})$, où $\hat{x} \in \hat{H}$ et $\hat{\varphi}\hat{x} \neq \omega$. Alors la fonction caractéristique $\chi_E$ de $E$ est transformée de Fourier d'une mesure idempotente appartenant à $M(H \times G)$.

Soit $k \in L^1(H)$ tel que $||k|| = 1$ et que $\hat{k}$ soit à support fini. Si

$$(x, y) \in H \times G \quad ,$$

posons

$$F_k(x, y) = k *_{M(H)} \varphi(\delta_{-y}).(x) = \sum_{\substack{\hat{\alpha} \in \hat{H} \\ \hat{\varphi}\hat{\alpha} \neq \omega}} \hat{k}(\hat{\alpha}) \quad \langle \hat{\varphi}\hat{\alpha}, y \rangle \langle \hat{\alpha}, x \rangle \quad .$$

On a

$$||F_k||_{L^1(H \times G)} \leq |||\varphi||| \quad \text{et} \quad \hat{F}_k(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{k}(\hat{x}) \; \chi_E(\hat{x}, \hat{y}) \quad .$$

Prenons des $\hat{k}$ tendant vers 1 sur toute partie finie de $\hat{H}$. Alors les $\hat{F}_k$ tendent vers $\chi_E$ sur toute partie finie de $\hat{H} \times \hat{G}$, les $||F_k||$ étant bornées ; donc $\chi_E$ est une transformée de Fourier de mesure.

C. Q. F. D.

Ainsi (théorème 1), $E \in \mathcal{B}(\hat{H} \times \hat{G})$ , algèbre de Boole engendrée par les classes de sous-groupes de $\hat{H} \times \hat{G}$ . De plus $E$ doit être un graphe, i. e. pour chaque $\hat{x} \in \hat{H}$ doit ~~exister~~ au plus un $\hat{y} \in \hat{G}$ tel que $(\hat{x}, \hat{y}) \in E$ . Un raisonnement algébrique simple montre que, par le fait, $E$ doit plus précisément appartenir à l'algèbre de Boole $\mathcal{B}'(\hat{H} \times \hat{G})$ engendrée par les classes des sous-groupes qui sont des graphes. La nécessité de la condition du théorème 2 s'en déduit immédiatement.

3. Réduction au cas compact.

On procède par compactification presque périodique. Désignons par $\hat{G}_d$ (resp. $\hat{H}_d$) le groupe $\hat{G}$ (resp. $\hat{H}$) muni de la topologie discrète, et par $\overline{G}$ (resp. $\overline{H}$) le groupe compact dual de $\hat{G}_d$ (resp. $\hat{H}_d$) . Alors $G$ (resp. $H$) s'identifie de manière évidente à un sous-groupe partout dense de $\overline{G}$ (resp. $\overline{H}$) .

PROPOSITION 3. - Soient $G$ et $H$ abéliens localement compacts, et $\varphi$ un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$ . Alors l'application duale $\hat{\varphi}$ de $\varphi$ , considérée comme une application de $\hat{H}_d$ dans $\hat{G}_d \cup \{\omega\}$ , est duale d'un homomorphisme $\overline{\varphi}$ de $L^1(\overline{G})$ dans $M(\overline{H})$ .

L'application identique $\hat{\sigma} : \hat{H}_d \to \hat{H}$ est duale d'un homomorphisme

$$\varphi_{\hat{\sigma}} : M(H) \to M(\overline{H}) \quad .$$

Soit $\mu \in M(\overline{G})$ . Il existe des $\mu_\alpha \in M(G)$ telles que $\|\mu_\alpha\| \leqslant \|\mu\|$ et telles que les $\hat{\mu}_\alpha$ convergent vers $\hat{\mu}$ sur toute partie finie de $\hat{G}$ . Les mesures

$$\varphi_{\hat{\sigma}} \circ \varphi(\mu_\alpha) \overset{\tau}{=} \nu_\alpha \in M(\overline{H}) \quad ,$$

uniformément bornées en norme, sont telles que les $\hat{\nu}_\alpha$ convergent sur toute partie finie de $\hat{H}_d$ vers la fonction $\hat{\mu}(\hat{\varphi}\hat{x})$ ; cette dernière est donc transformée de Fourier d'une $\overline{\varphi}\mu \in M(\overline{H})$ .

C. Q. F. D.

Ainsi $\hat{\varphi}$ satisfait à la condition "discrète" du théorème 2, avec des $K_i'$ , $S_j'$ , $\hat{\sigma}_i'$ quelconques. Reste à voir, à l'aide de la continuité de $\hat{\varphi}$ , qu'elle y satisfait pour les topologies initiales de $\hat{G}$ et $\hat{H}$ . Voici quelques indications sur ce point.

Soit $S$ l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{H}$ tels que $\hat{\varphi}\hat{x} \neq \omega$, i. e. la projection de $E$ sur $\hat{H}$. On montre d'abord que $S$ est ouvert et fermé, et donc $E$ fermé : cela tient à ce que la restriction de $\hat{\varphi}$ à chaque $S_j^! \subset S$ est uniformément continue (translatée d'homomorphisme), d'où $\overline{S_j^!} \subset S$, et $S$ est fermé ; $S$ est visiblement ouvert $(\hat{\varphi}^{-1}(C\omega))$. D'après les propositions 2 et 3 et le théorème 1, $E$ est réunion finie d'ensembles de la forme

$$P = L \cap (\bigcap_{j=1}^{r} C\, M_j)$$

où $L$ et $M_j$, classes de sous-groupes, sont, si l'on veut, des graphes et tels que $L \supset M_j$. En fait, $E$ étant fermé, on montre qu'il est loisible de prendre les $L$ et $M_j$ dans l'algèbre de Boole engendrée par les fermés. Désignant par $\sim$ la projection sur $\hat{H}$, il vient alors que les $\tilde{L}$, $\tilde{M}_j$ et $\tilde{P}$ sont mesurables dans $\hat{H}$. Remarquant que, si une classe de sous-groupe est de mesure $> 0$, elle est nécessairement ouverte, et négligeant ceux des $\tilde{M}_j$ ou $\tilde{L}_j$ qui sont de mesure nulle, on en déduit la condition du théorème 2 avec des sous-groupes $K_i$ ouverts.

Remarque. – Soit $\varphi$ un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$. Pour que son image soit dans $L^1(H)$, il faut et il suffit que, pour tout ensemble $C$ compact dans $\hat{G}$, $\hat{\varphi}^{-1}(C)$ soit compact dans $\hat{H}$.

## III. La conjecture de Littlewood.

Le cas général n'offrant pas de difficulté sérieuse supplémentaire, nous nous placerons, pour esquisser la démonstration du théorème 3, dans les hypothèses $G = T$, $c_j = 1$ (du reste les seules intervenant dans l'application du théorème 3 au problème 1). On utilise deux lemmes, l'un de théorie de l'intégration, l'autre d'analyse combinatoire, que nous citons sans démonstration.

LEMME 1. – Soient $\mu$ une mesure sur un espace compact $X$, $A$ un nombre $\geq 1$, $r$ un entier $\geq 2(A+1)^2$. Soient $g$ et $f_1 \dots, f_r$ des fonctions continues sur $X$ telles que, pour tout $j = 1, \dots, r$.

(1.1) $$|g(x)| \leq 1 \ ; \qquad |f_j(x)| \leq 1$$

(1.2) $$\int f_j(x)\, d\mu(x) = 1 \ ; \qquad \int g(x)\, d\mu(x) = A$$

(1.3) $$\int g(x)\, f_i(x)\, \overline{f_j(x)}\, d\mu(x) = 0 \quad \text{quel que soit } i < j \quad .$$

Alors il existe des constantes $\alpha$, $\beta_j$, $\gamma_{ij}$ telles que, si l'on pose

$$g^1(x) = \alpha g(x) + \sum_j \beta_j f_j(x) + \sum_{i<j} \gamma_{ij} f_i(x) \overline{f_j(x)} g(x) ,$$

on ait

$$|g^1(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad \int g^1(x)\, d\mu(x) = A + \frac{1}{64\, A^3} .$$

LEMME 2. – Soit $E = \{n_1 > n_2 > \dots > n_N\}$ une suite de $N$ entiers, et soient $r$ et $s$ deux entiers positifs tels que $(2r^2)^{2s^2} \leq N$. Alors, pour tout $k = 1, \dots, s$, il existe des ensembles d'entiers $T_k = \{m_1^{(k)} > \dots > m_r^{(k)}\}$ et $P_k$, avec $P_1 = \{n_1\}$, tels que

(2.1) $T_k \subset E$

(2.2) $p + m_i^{(k)} - m_j^{(k)} \notin E$, si $p \in P_k$ et $i < j$

(2.3) $P_{k+1}$ est la réunion de $P_k$, $T_k$ et des $p + m_i^{(k)} - m_j^{(k)}$ $(p \in P_k ;\ i < j)$.

Soit alors

$$\mu = \sum_{j=1}^{N} \exp(-\, i n_j\, x)\, dx , \qquad (n_j \text{ distincts}) ,$$

et supposons que

$$\|\mu\| \leq M ,$$

où $M \geq 1$. Soit $r = [2(M^2 + 1)] + 1$, et soit $s$ un entier tel que $(2r^2)^{2s^2} \leq N$. A partir de ces données, le lemme 2 fournit des ensembles d'entiers $T_k$ et $P_k$. Pour $1 \leq k \leq s$, on définit par récurrence sur $k$ des fonctions $g_k$ remplissant les conditions suivantes :

(3.1) $g_k$ est combinaison linéaire d'exponentielles $\exp(inx)$, où $n \in P_k$ ;

(3.2) $|g_k(x)| \leq 1$ (et donc $|\int g_k(x)\, d\mu(x)| \leq M$) ;

(3.3) $\int g_k(x)\, d\mu(x) = 1 + \dfrac{k-1}{64\, M^3}$ .

Pour cela, il suffit de prendre $g_1(x) = \exp(i n_1\, x)$ et, pour passer de $g_k$ à $g_{k+1}$, de faire jouer à $g_k$, $g_{k+1}$ le rôle de $g$, $g_1$ dans le lemme 1, où l'on fait $A = 1 + \dfrac{k-1}{64\, M^3}$ et où l'on prend pour $f_j(x)$ les $\exp(i m_j^{(k)}\, x)$ formées à l'aide des $m_j^{(k)} \in T_k$ du lemme 2, la condition (2.2) assurant (1.3).

Supposons alors que $\|\mu\|$ reste borné par $M$ quand $N$ devient arbitrairement grand ; la construction des $g_k$ pouvant alors se poursuivre aussi loin qu'on veut; l'inégalité

$$1 + \frac{k-1}{64\, M^3} \leqslant M \qquad , \tag{3.4}$$

impliquée par (3.2) et (3.3), finit par fournir contradiction ; donc $\|\mu\|$ augmente indéfiniment avec $N$. En fait un calcul simple, effectué à partir de (3.4) et de l'inégalité $(2r^2)^{2s^2} \leqslant N$, fournit plus précisément l'inégalité du théorème 3.

## IV. Mesures idempotentes.

Notations. – $\mathfrak{J}(G)$ ensemble des $\mu \in M(G)$ telles que $\mu * \mu = \mu$ ; $\mathcal{E}(G)$ ensemble des $\mu \in M(G)$ telles que $\hat{\mu}$ ne prenne que des valeurs entières ; $\mathcal{P}(G)$ ensemble des combinaisons linéaires de mesures primitives (cf. l'introduction).

### 1. Réduction au cas compact.

Si $\mu \in \mathfrak{J}(G)$, le support de $\mu$ est contenu dans un sous-groupe compact de $G$, l'orthogonal du sous-groupe des périodes de $\hat{\mu}$, lequel est ouvert dans $\hat{G}$ en vertu de l'uniforme continuité de $\hat{\mu}$. Cette remarque suffit déjà à établir le théorème 1 quand $G$ est discret. Dans le cas général, elle ramène la démonstration du théorème 1 au cas où $G$ est compact ($\hat{G}$ discret), ce que nous supposerons désormais.

### 2. Décomposition d'une mesure relativement à un sous-groupe.

-Soit $K$ un sous-groupe fermé de $G$. Si $\mu \in M(G)$, et si $E$ est un ensemble $\mu$-mesurable, posons

$$\mu_K(E) = \sum_{x+K} \mu[E \cap (x + K)] \qquad ,$$

où $x + K$ parcourt l'ensemble des classes de $G$ modulo $K$. On généralise ainsi la notion de partie discrète de $\mu$, obtenue pour $K = \{0\}$. On a aisément les propriétés :

a. $\|\mu\| = \|\mu_K\| + \|\mu - \mu_K\|$ ;

b. $\mu \to \mu_K$ est un endomorphisme de l'algèbre $M(G)$, qui laisse fixe $\mathfrak{J}(G)$ et $\mathcal{E}(G)$ ;

c. si $\mu \in \mathcal{E}(G)$ , le support de $\mu_K$ est contenu dans un sous-groupe fermé de $G$ dans lequel $K$ soit d'indice fini.

3. Enoncé et utilisation du lemme principal.

Admettons provisoirement le

LEMME principal. - Si $\mu \in \mathcal{E}(G)$ , ou bien $\mu \in L^1(G)$ , ou bien il existe un sous-groupe fermé $K$ d'indice infini dans $G$ tel que $\mu_K \neq 0$ .

On en déduit le théorème 1 comme suit. Il suffit de démontrer que $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{P}(G)$ . Si $\mu \in \mathcal{E}(G) \cap L^1(G)$ , $\hat{\mu}$ est à support fini, donc $\mu \in \mathcal{P}(G)$ . Soit $\mu \in \mathcal{E}(G)$ , $\mu \notin L^1(G)$ . On peut supposer que $G$ est le plus petit sous-groupe fermé de $G$ contenant le support de $\mu$ . Soit $K$ le sous-groupe du lemme principal. On a $\|\mu_K\| \geq 1$ et, en vertu de (c), on a $\mu \neq \mu_K$ . Supposons qu'on ait $\|\mu\| \leq n + 1$ , ( $n$ **entier** $\geq 0$ ) ; il résulte alors de (a) que $\|\mu_K\| \leq n$ et $\|\mu - \mu_K\| \leq n$ . Comme $\mu_K$ et $\mu - \mu_K$ appartiennent à $\mathcal{E}(G)$ , l'inclusion $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ est ainsi démontrée par récurrence sur $n$ .

4. Existence d'ensembles de périodes. Application au cas $G = T$ .

Soit $\mu \in \mathcal{J}(G)$ telle que $\mu \notin L^1(G)$ ; le support $E$ de $\hat{\mu}$ est infini. Soit $\Pi$ une partie finie de $\hat{G}$ . On dit que $\Pi$ est un P-ensemble pour $E$ si, pour tout $\hat{x} \in E$ à l'exception d'un nombre fini, on a $(\hat{x} + \Pi) \cap E \neq \emptyset$ . Un premier pas vers la "régularité par translation" de l'ensemble $E$ est accompli par le

LEMME 3. - Pour tout ensemble fini $A \subset \hat{G}$ , il existe pour $E$ un P-ensemble qui soit disjoint de $A$ .

Dans son principe, la démonstration de ce lemme est la même que celle du théorème 3. Supposant faux le lemme 3, on parvient à construire, pour $1 \leq k \leq s$ , des ensembles $T_k$ et $P_k$ contenus dans $\hat{G}$ et remplissant les conditions (2.1), (2.2), (2.3) du lemme 2. La construction s'effectue par récurrence, utilisant notamment la non-existence de P-ensemble pour remplir la condition (2.2) ; elle est possible pour tout $s$ parce que $E$ est infini. Soit $\|\mu\| = M$ . Procédant à l'aide du lemme 1 exactement comme dans le cas du théorème 3, on montre que, pour $s$ assez grand, on obtiendrait $\|\mu\| > M$ , d'où contradiction.

COROLLAIRE. - Le théorème 1 est vrai pour $G = T$ .

Car, dans ce cas, le lemme principal s'obtient comme suit. Si $\mu$ était diffuse, ses coefficients de Fourier $\hat{\mu}(n)$ vérifieraient la condition ([14]) :

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{-p}^{p} |\hat{\mu}(n)| = 0 \quad .$$

Comme $\hat{\mu}(n)$ est à valeurs entières, l'ensemble $E$ présenterait des lacunes arbitrairement grandes, ce qui contredit le lemme 3.

5. Démonstration du lemme principal.

On le démontre pour $\mathfrak{J}(G)$ , car il s'en déduit immédiatement pour $\mathcal{E}(G)$ . Soit $\mu \in \mathfrak{J}(G)$ , $\mu \notin L^1(G)$ . Supposons désormais que $\mu$ mette en défaut le lemme principal, i. e. que $\mu_K = 0$ pour tout sous-groupe $K$ d'indice infini dans $G$ . Selon la méthode déjà utilisée en III et en IV. 4, on va montrer que toute inégalité $\|\mu\| \leqslant M$ serait contradictoire. Faisons d'abord deux remarques :

Remarque 1. – Pour tout $\hat{y}$ d'ordre infini et tout $\hat{x} \in \hat{G}$ , le nombre d'éléments de la forme $\hat{x} + j\hat{y}$ $(j \in \mathbb{Z})$ qui tombent dans $E$ est borné par un nombre fini $N$ ne dépendant que de $M$ .

Par dualité, c'est une conséquence facile du corollaire du lemme 3, et du théorème 3.

Remarque 2. – Soit une suite strictement croissante de sous-groupes finis $F_n$ de $\hat{G}$ . Il existe au moins un $n$ tel que $E$ ne contienne aucune classe modulo $F_n$ .

Sinon on aurait $\mu_K \neq 0$ pour $K = \bigcap_n F_n^{\perp}$ , d'indice infini dans $G$ .

On s'appuie sur un lemme analogue au lemme 1, que nous énonçons sans démonstration :

LEMME 4. – Soient $\mu$ une mesure sur un espace compact $X$ , et $A \geqslant 1$ . Soient $g$ , $h$ , $k$ des fonctions continues sur $X$ telles que

(4.1) $|g(x)| \leqslant 1$ ; $|h(x)| \leqslant 1$ ; $|k(x)| \leqslant 1$ ;

(4.2) $\int g(x)\, d\mu(x) = A$ ; $\int g(x)\, h(x)\, d\mu(x) = A$ ; $\int k(x)\, d\mu(x) = 1$ ;

(4.3) $\int h(x)\, k(x)\, d\mu(x) = 0$ .

Alors il existe des constantes $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\alpha_3$ , $\alpha_4$ , ne dépendant que de $A$ , et non du choix de $g$ , $h$ , $k$ , telles que, si l'on pose

$$g^1 = \alpha_1\, g + \alpha_2\, gh + \alpha_3\, k + \alpha_4\, hk \qquad ,$$

on ait

$$|g^1(x)| \leqslant 1$$

et

$$\int g^1(x)\, d\mu(x) = A + \Delta(A) \qquad ,$$

où $\Delta(A)$ est $> 0$ et fonction décroissante de $A$.

Nous nous contenterons d'examiner le cas où $G$ est <u>connexe</u> ( $\hat{G}$ sans torsion), où la situation est un peu plus simple (dans le cas général, les complications techniques dues aux éléments d'ordre fini dans $\hat{G}$ sont levées grâce à la remarque 2).

A l'aide du lemme 4, on va construire par récurrence des fonctions $g_j^{(k)}$, $1 \leqslant j \leqslant \alpha(k)$, $|g_j^{(k)}| \leqslant 1$, et telles que, pour tout $\hat{x} \in E$ et quel que soit $k$, il existe $j$ tel que

$$\int \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\, g_j^{(k)}(x)\, d\mu(x) = 1 + k\Delta(M) \qquad ,$$

d'où contradiction, dès que $k \geqslant M/\Delta(M)$. Partant de $\alpha(0) = 1$ et $g_0^{(0)} = 1$, on passe des $g_j^{(k)}$ aux $g_i^{(k+1)}$ comme suit.

D'après le lemme 3, il existe des $\hat{y}_m$ $(1 \leqslant m \leqslant \alpha(k) + 1)$ deux à deux distincts tels que, pour tout $\hat{x} \in E$, il existe au moins un $m$ avec $\hat{x} + \hat{y}_m \in E$.
Fixons $\hat{x} \in E$. Par hypothèse de récurrence, on a des $g^k_{j(m)}$ tels que

$$\int \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\,\overline{\langle \hat{y}_m, x\rangle}\, g_{j(m)}^{(k)}(x)\, d\mu(x) = 1 + k\Delta(M) \qquad .$$

Pour un couple $m_1 \neq m_2$ au moins $j(m_1) = j(m_2)$. Soit $\hat{y} = y_{m_2} - \hat{y}_{m_1}$ ; d'après la remarque 1, pour un $0 \leqslant n \leqslant N$, on a $\hat{x} + n\hat{y} \in E$, mais $\hat{x} + (n+1)\hat{y} \notin E$. Appliquons le lemme 4 en faisant jouer aux fonctions

$$\overline{\langle \hat{x}, x\rangle\langle \hat{y}_{m_1}, x\rangle}\, g_{j(m_1)}^{(k)}(x) \ ; \quad \overline{\langle \hat{y}, x\rangle} \ ; \quad \overline{\langle \hat{x} + n\hat{y}, x\rangle}$$

le rôle de $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ respectivement, et en prenant $A = 1 + k\Delta(M)$. On obtient une fonction $g^1$ telle que

$$\hat{x}g^1 = \alpha_1\, g_{j(m_1)}^{(k)}\, \overline{\hat{y}}_{m_1} + \alpha_2\, g_{j(m_1)}^{(k)}\, \overline{\hat{y}}_{m_2} + \alpha_3\, \overline{\hat{y}^n} + \alpha_4\, \overline{\hat{y}^{n+1}} \qquad ;$$

$|g^1| \leqslant 1$ ; $\int g^1 \, d\mu = 1 + (k+1)\,\Delta(M)$ . Or, quand $\hat{x}$ varie dans $E$ , cette construction fournit au plus un nombre <u>fini</u> $\alpha(k+1)$ de fonctions $\hat{x}g^1$ distinctes, car $m$ et $n$ sont bornés et les $\alpha_i$ ne dépendent que de $A$ . Ces fonctions sont prises pour $g_i^{(k+1)}$ , ce qui termine la construction.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BEURLING (A.) and HELSON (H.). - Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers, Math. Scand., t. 1, 1953, p. 120-126.

[2] COHEN (Paul J.). - On a conjecture of Littlewood and idempotent measures, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 191-212.

[3] COHEN (Paul J.). - On homomorphisms of group algebras, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 213-226.

[4] HARDY (G. H.) and LITTLEWOOD (J. E.). - A new proof of a theorem on rearrangements, J. London math. Soc., t. 23, 1948, p. 163-168.

[5] HELSON (H.). - Note on harmonic functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 4, 1953, p. 686-691.

[6] HELSON (H.). - Isomorphisms of abelian group algebras, Ark. för Math., t. 2, 1953, p. 475-487.

[7] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 36-37.

[8] LEJBENZON (Z. L.). - Sur l'anneau des fonctions à séries de Fourier absolument convergentes [en russe], Usp. Mat. Nauk, N. S., t. 9, 1954, n° 3, p. 157-162.

[9] RICKART (Charles E.). - General theory of Banach algebras. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1960 (The University Series in higher Mathematics).

[10] RUDIN (Walter). - The automorphisms and endomorphisms of the group algebra of the unit circle, Acta Math., t. 95, 1956, p. 39-55.

[11] RUDIN (Walter). - Idempotent measures on abelian groups, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 195-209.

[12] SALEM (Raphaël). - On a problem of Littlewood, Amer. J. of Math., t. 77, 1955, p. 535-540.

[13] WENDEL (J. G.). - Haar measure and the semi-group of measures on a compact group, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 923-926.

[14] ZYGMUND (Antoni). - Trigonometrical series. - Warszawa, 1935 (Monografje Matematyczne, 5).