JEAN CERF

Travaux de Smale sur la structure des variétés

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 230, p. 113-128

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__113_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 230

Février 1962

TRAVAUX DE SMALE SUR LA STRUCTURE DES VARIÉTÉS

par Jean CERF

Cet exposé est consacré aux principaux théorèmes récemment démontrés par S. SMALE sur la structure des variétés différentiables (cf. SMALE [9], [10], [11]). L'article essentiel est maintenant [11], dont les résultats contiennent ceux obtenus précédemment. On utilise des améliorations de présentation dues à J. MILNOR et A. HAEFLIGER.

1. Principaux résultats.

a. Le théorème sur le h-cobordisme et ses applications.

La notion de h-cobordisme a été introduite par R. THOM dans [12] (sous le nom de J-équivalence). C'est un affaiblissement de la notion de difféomorphisme.

Définition 1. - Soient V et V' deux variétés connexes, compactes, sans bord, orientées. On dit que V et V' sont h-cobordantes s'il existe une variété W compacte, orientée, telle que :

1° Le bord ∂W de W (muni de l'orientation induite) a deux composantes connexes dont l'une s'identifie à V et l'autre à $-V'$ (i. e., V' munie de l'orientation opposée).

2° Les applications d'inclusion $V \to W$ et $V' \to W$ sont des homotopie-équivalences.

SMALE démontre dans [11] le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit n un entier $\geqslant 5$; soient V et V' deux variétés de dimension n , compactes, sans bord, orientées. Si V et V' sont simplement connexes et h-cobordantes, alors il existe un difféomorphisme de V sur V' conservant l'orientation ; d'une façon plus précise, soit W une variété réalisant le h-cobordisme de V et V' (comme dans la définition 1) ; alors W est difféomorphe à $V \times I$.

COROLLAIRE 1. ("Conjecture de Poincaré différentiable pour $n \geqslant 6$ "). - Soit n un entier $\geqslant 6$. Toute variété différentiable V , de dimension n , qui a le type d'homotopie de la sphère S^n , est homéomorphe à S^n ; de façon plus précise, la structure différentiable de V peut être définie par recollement de deux sous-variétés difféomorphes à la n-boule fermée D^n.

[Démonstration. - On enlève de V deux n-boules de différentiables fermées sans point commun ; soit W l'adhérence de ce qui reste ; on applique le théorème 1 à W.]

Bien entendu, il n'est pas question d'affirmer que V est difféomorphe à S^n, puisqu'on sait, depuis MILNOR, qu'il peut exister sur S^n des structures différentiables distinctes. Mais le théorème 1 (et son corollaire 1) joints aux résultats de MILNOR [6], et MILNOR et KERVAIRE [5], donnent d'importants renseignements sur ces structures.

Soit en effet Γ^n l'ensemble de toutes les structures différentiables sur S^n obtenues par recollement de deux boules, ensemble que l'opération "somme" munit d'une structure de groupe abélien. Les méthodes de la topologie algébrique étant inadéquates à l'étude directe de l'ensemble de toutes les structures différentiables de S^n et du groupe Γ^n, MILNOR a introduit un ensemble Θ^n (dont l'opération "somme" fait aussi un groupe abélien) : c'est celui des variétés ayant le type d'homotopie de S^n, deux telles variétés étant identifiées si elles sont h-cobordantes. MILNOR et KERVAIRE ont obtenu des résultats très complets sur les groupes Θ^n. Ils ont montré que Θ^n est fini pour tout n, et ils ont donné un procédé de calcul de l'ordre de Θ^n. Ils ont trouvé en particulier :

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Θ^n	0	0	Z_{28}	Z_2	a 8 éléments	Z_6	Z_{992}	0	Z_3	Z_2	$Z_{8128} + Z_2$

Compte tenu de ces résultats, on déduit immédiatement du théorème 1 et de son corollaire 1 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. - Pour $n \geqslant 5$, le groupe Γ^n et le groupe Θ^n sont canoniquement isomorphes, et s'identifient à l'ensemble de toutes les structures différentiables de S^n ; cet ensemble est fini. En particulier, pour $n = 5, 6, 7, 8, 9$, etc., le nombre de structures différentiables sur S^n (y compris la structure triviale) est respectivement 1, 1, 28, 2, 8, etc. (cf. le tableau ci-dessus).

Remarque. - Pour $n \leqslant 3$, on sait démontrer directement qu'il n'y a pas de structure différentiable non triviale sur S^n ; on ne connait pas le nombre de structures différentiables de S^4 .

COROLLAIRE 3. - *Soit $n \geqslant 5$, soit C une variété compacte contractile de dimension n ; si $n \geqslant 6$ et si le bord ∂C de C est simplement connexe ; ou si $n = 5$ et ∂C est difféomorphe à S^4 ; alors C est difféomorphe au disque fermé D^n .*

[Démonstration. - Pour $n \geqslant 6$: on enlève de l'intérieur de C une n-boule différentiable fermée, et on applique le théorème 1. Pour $n = 5$: on recolle C à la boule D^5 ; puisque $\Theta^5 = 0$, la variété obtenue est h-cobordante à S^5 ; d'après le théorème 1, elle est donc difféomorphe à S^5 ; or, sur toute sphère S^n , l'adhérence du complémentaire d'une n-boule différentiable fermée est une n-boule différentiable.]

COROLLAIRE 4. "*Conjecture de Schönflies différentiable pour* $n \geqslant 4$ ". - *Soit $n \geqslant 4$, soit f un plongement différentiable de la sphère S^n dans R^{n+1} ; l'adhérence de la composante bornée de $R^{n+1} - f(S^n)$ est difféomorphe à la boule fermée D^{n+1} . (Autrement dit, il existe un plongement f' ayant même image que f , tel que f' puisse se prolonger en un plongement de D^{n+1} .)*

[Démonstration. - C'est une conséquence immédiate du corollaire 3 et du théorème de Mazur, valable pour tout entier n : tout plongement continu de S^n dans R^{n+1} , qui peut se prolonger en un plongement de la couronne $S^n \times [-1 , +1]$, peut se prolonger en un plongement de D^{n+1} ; cf. par exemple DOUADY [2].]

Remarque. - Pour $n \leqslant 2$, on sait que tout plongement différentiable de S^n dans R^{n+1} peut se prolonger en un plongement différentiable de D^{n+1} .

COROLLAIRE 5. "*Hauptvermutung pour les boules et les sphères de dimension* $\geqslant 6$ ". - *Pour $n \geqslant 6$, il y a une seule structure combinatoire (à une équivalence près) sur la boule D^n ; même résultat pour la sphère S^n .*

[Démonstration. - Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de D^n ; on sait (cf. par exemple MILNOR [7], p. 16) qu'il existe sur D^n une structure différentiable compatible avec $\mathcal{T}$; cette structure est triviale ; donc, d'après un théorème de J. H. C. WHITEHEAD [14], la triangulation $\mathcal{T}$ est triviale. Pour obtenir le même résultat relatif à S^n , on applique le résultat relatif à D^n à l'adhérence du complémentaire d'un n-simplexe d'une triangulation de S^n .]

Remarque. - La Hauptvermutung a été démontrée pour toutes les variétés de dimension ≤ 3 (MOÏSE, BING).

b. Généralisations diverses.

H. HAEFLIGER [3] a étendu la notion de h-cobordisme au cas des paires de variétés orientées ; (une telle paire est un couple (V, M) de variétés orientées, où la sous-variété M de V est munie de la structure induite par V). La définition est analogue à la définition 1 : il suffit de remplacer partout "variété" par "paire de variétés". SMALE démontre le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 1'. - Soit (V, M) une paire de variétés connexes, compactes, orientées, la dimension de M étant ≥ 5 ; soit de même (V', M'). Si (V, M) et (V', M') sont h-cobordantes, et si $\pi_1(M) = \pi_1(V - M) = 0$, alors toute paire (W, N) réalisant le h-cobordisme de (V, M) et (V', M') est difféomorphe à $(V, M) \times I$ (ce qui entraîne que (V, M) et (V', M') sont difféomorphes). En plus, on peut se donner à l'avance le difféomorphisme de $M \times I$ sur N, et le prolonger en un difféomorphisme de $V \times I$ sur W.

Ce théorème a d'importantes applications à la théorie des noeuds (HAEFLIGER) ; SMALE démontre directement le théorème 1' ; la démonstration est très analogue à celle du théorème 1.

D'autre part SMALE généralise comme suit le corollaire 3 du théorème 1 :

COROLLAIRE 3'. - Soit (V, M) une paire de variétés compactes connexes, telle que :

(a) M est sans bord ;

(b) $\pi_1(\partial V) = \pi_1(M) = 0$;

(c) (dimension V) ≥ 6 et codimension $M \geq 3$;

(d) l'inclusion de M dans V est une homotopie-équivalence.

Alors V est difféomorphe à un fibré en boules fermées sur M. Si en plus $M \subset V - \partial V$, V est difféomorphe à un voisinage tubulaire de M dans V.

[Démonstration. - On se borne au cas où $M \subset V - \partial V$; on considère un voisinage tubulaire T de M dans $V - \partial V$; une application simple du théorème de dualité de Poincaré montre que $\overline{V - T}$ réalise le h-cobordisme de ∂T et ∂V.]

c. Existence sur les variétés compactes simplement connexes de fonctions différentiables ayant le nombre minimum de points critiques compatible avec l'homologie.

THÉORÈME 2. - Soit V une variété compacte, sans bord, simplement connexe, de dimension $\geqslant 6$; soit, pour tout i, $p(i)$ le i-ième nombre de Betti de V, et soit $q(i)$ le nombre de générateurs d'une décomposition canonique du sous-groupe de torsion de $H_i(V)$. Alors il existe sur V une fonction excellente (cf. 2, a) dont le i-ième nombre typique [1] M_i est égal à $p(i) + q(i) + q(i-1)$ (autrement dit, M_i a la plus petite valeur compatible avec l'homologie de V).

Cas particulier : s'il n'y a pas de torsion dans l'homologie de V, alors on peut choisir sur V une fonction excellente telle que $M_i = p(i)$ pour tout i.

De ce théorème, SMALE déduit notamment le corollaire ci-après.

COROLLAIRE. - Soient V et V' deux variétés compactes, sans bord, de dimension $n \geqslant 6$. Soit $f : V \to V'$ une homotopie-équivalence tangentielle, i. e. une homotopie-équivalence telle que l'espace tangent T à V soit équivalent à $f^{-1}(T')$; si V, ∂V et $\partial V'$ sont simplement connexes, et si $H_i(V) = 0$ pour $i \geqslant n/2$, alors il existe un difféomorphisme $f' : V \to V'$, homotope à f.

On notera que le théorème 2 est une puissante généralisation du corollaire 1 du théorème 1 (conjecture de Poincaré).

2. Quelques résultats préliminaires.

a. Fonctions excellentes (ou "de Morse").

Soit W une variété de dimension n, de bord ∂W ; soit φ une fonction de classe C^∞ : $W \to [0, 1]$. Soit $c \in W$; on dit que c est un point critique de φ si, en c, $d\varphi = 0$; $\varphi(c)$ s'appelle la valeur critique correspondant à c. On dit que c est non dégénéré (ou de Morse) si la dérivée seconde $d^2\varphi$ est de rang n en c (autrement dit, si dans un système de coordonnées locales arbitraire, le déterminant hessien

$$\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j}\right|$$

est $\neq 0$ en c). Si c est un point critique de Morse pour φ, alors il existe

[1] C'est-à-dire le nombre de points critiques d'indice i.

un système de coordonnées locales d'origine c dans W, tel que dans ce système φ s'écrive :

$$\varphi = -x_1^2 - \dots - x_m^2 + x_{m+1}^2 + \dots + x_m^2 \tag{1}$$

m s'appelle *l'indice* du point critique c ; c'est un entier compris entre 0 et n ; en un minimum relatif, l'indice est 0 ; en un maximum relatif, l'indice est n. Un point critique non dégénéré est nécessairement *isolé*.

THÉORÈME (MORSE). – *Soit* W *une variété de bord* ∂W ; *il existe une fonction* φ *de classe* C^∞ : $W \to [0, 1]$, *telle que* :

a. $\varphi^{-1}(\{0, 1\}) = \partial W$;

b. φ *n'a pas de point critique dans* ∂W ;

c. *tous les points critiques de* φ *sont de Morse*.

d. *en deux points critiques distincts, les valeurs de* φ *sont distinctes*.

Une telle fonction φ est dite *excellente* (2). Si W est compacte et φ excellente, φ n'a qu'un nombre fini de points critiques.

b. *Théorèmes d'isotopie de Whitney*.

[N. B. – Les énoncés ci-dessous sont ceux qui servent dans la suite ; il existe des résultats plus forts dus à WHITNEY [15], [16], WU WEN TSUN [17] et surtout HAEFLIGER [4].]

THÉORÈME I. – *Soient* V *une variété et* X *une sous-variété fermée de* V ; *soit* X' *une variété ; on suppose* V *et* X' *compactes* (dénombrables à l'infini suffirait) ; *si*

$$(\text{dimension } X) + (\text{dimension } X') \leqslant (\text{dimension } V) - 1 .$$

Alors, pour toute application différentiable $f : X' \to V$, *il existe une application* f' *arbitrairement voisine de* f *telle que* $f'(X') \cap X = \emptyset$. *Si* f *est un plongement, on peut prendre pour* f' *un plongement isotope à* f (3).

---

(2) En fait, MORSE montre même que les fonctions excellentes forment un ouvert partout dense dans l'ensemble des fonctions vérifiant (a) (muni de la C^r-topologie). Le théorème de Morse est une conséquence immédiate du "théorème de transversalité" de Thom (cf. [12]).

(3) C'est le cas dès que f' est assez voisin de f.

THÉORÈME II. - Soient V une variété et X une sous-variété de V ; soit X' une variété. On suppose V , X et X' compactes, connexes, sans bord ; on suppose en plus :

(a) $\pi_1(V) = 0$; $\pi_1(V - X) = 0$ (cette dernière condition étant automatiquement remplie si codimension $X > 2$).

(b) (dimension V) $\geqslant 5$;

(c) (codimension X) $\geqslant 2$, codimension $X' > 2$;

(d) (dimension X) + (dimension X') = dimension V .

Soit $b = f(X') \circ X$ (nombre d'intersection de $f(X')$ et X).

Pour tout plongement $f : X' \to V$, il existe un plongement f' , isotope à f , tel que $f'(X')$ coupe X en b points, transversalement en chacun d'eux.

THÉORÈME III. - Soit V une variété de dimension n ; soit f un plongement différentiable de la sphère S^m dans V ; on suppose $n \geqslant 2m + 2$; alors, si f est homotope à 0 dans V , $f(S^m)$ borde un disque dans V .

c. Variétés à bords anguleux ; suppression et introduction d'angles ; recollement. (cf. [1], [8])

Une n-variété différentiable à bord anguleux est une variété V qui peut avoir sur son bord des singularités analogues à celles du cube I^n : les modèles sont les parties de R^n définies par des systèmes d'inégalités du type $\{x_{n-m} \geqslant 0 , \dots , x_{n-1} \geqslant 0 , x_n \geqslant 0\}$ où m est un entier tel que $0 \leqslant m \leqslant n$ (pour les variétés à bord ordinaires, on se borne à $m = 0$). On a une notion de face, d'arête, etc., d'une telle variété ; une face a des voisinages tubulaires qui sont des fibrés de fibre $[0 , 1]$; une arête a des voisinages tubulaires fibrés en secteurs circulaires convexes. On peut "supprimer une arête" (en "ouvrant" les secteurs circulaires d'un voisinage tubulaire) ; on peut aussi "introduire une arête" le long d'une sous-variété convenable du bord ; le résultat de chacune de ces opérations est bien défini à un difféomorphisme près.

Recollement. - Soit V une variété (au sens ci-dessus) compacte, de dimension n ; soit A une sous-variété fermée de dimension $(n - 1)$ de ∂V ; soient de même V' et A' . Soit f un difféomorphisme : $A \to A'$. Soit W l'espace topologique obtenu par recollement de V et V' suivant A et A' à l'aide de f ; identifions V et V' à leur image dans W ; on peut munir W d'une structure différentiable compatible avec celles de V et V' ; deux telles structures se déduisent l'une de l'autre par un homéomorphisme de W laissant stables V et V' et induisant l'identité sur $V \cap V'$; la variété ainsi obtenue (définie à un difféomorphisme près) se note $V \smile_f V'$. [4]

Propriétés de l'opération "recollement" :

1° Si $f' = g \circ f$ où g est un difféomorphisme de V', donc en particulier si f' est isotope à f, on a un difféomorphisme :

$$V \smile_{f'} V' \approx V \smile_f V' \quad .$$

2° L'opération de recollement est associative au sens suivant : si on recolle à $V \smile_f V'$ une troisième variété compacte V'' par un difféomorphisme $h \smile h'$ (où h et h' sont respectivement définis sur des sous-variétés compactes de dimension $(n-1)$ de V et V'), on a un difféomorphisme :

$$(V \smile_f V') \smile_{h \smile h'} V'' \approx V \smile_{f \smile h} (V' \smile_{h'} V'') \quad .$$

3. Présentations par anses.

Anses. - Soit M une variété différentiable à bord (au sens habituel) ; soit n la dimension de M ; soit m un entier tel que $0 \leq m \leq n$, et soit f un plongement :

$$S^{m-1} \times D^{n-m} \to \partial M \quad .$$

Soit $V = M \smile_f (D^m \times D^{n-m})$; on dit que l'image h_m de $D^m \times D^{n-m}$ dans V est une anse ("handle") d'indice m de V, et que V (qu'on note $M \smile_f h_m$) est obtenue à partir de M par attachement de l'anse h_m à l'aide de f.

Exemples. - Attacher à M une anse d'indice 0, c'est faire la somme disjointe de M et de D^n ; attacher une anse d'indice n, c'est "boucher un trou".

Quelques définitions relatives aux anses : Soit $V = M \smile_f h_m$.

a. l'image par f de $S^{m-1} \times D^{n-m}$ s'appelle la surface d'attachement de h_m.

b. l'image par f de $S^{m-1} \times \{0\}$ s'appelle la sphère d'attachement de h_m.

---

[4] Pour définir $V \smile_f V'$, on commence par supprimer les angles de A et A', puis on introduit des arêtes le long du bord de A et A', qui deviennent ainsi des faces de V et V' respectivement ; on définit alors la structure différentiable de $V \smile_f V'$ à l'aide de voisinages tubulaires de A et A' dans V et V' respectivement.

c. la sphère $\{0\} \times S^{n-m-1}$ s'identifie à une sphère de ∂V qu'on appelle sphère transverse de h_m.

Présentations par anses. - Soit W une variété compacte, et soit φ une fonction excellente sur W, donnée par le théorème de Morse (cf. 2, a). Pour $\xi \in [0, 1]$, on pose : $\varphi^{-1}[0, \xi] = W(\xi)$. Soient ξ et ξ' deux valeurs non critiques de φ.

- S'il n'y a aucune valeur critique dans $]\xi, \xi'[$, alors $W(\xi)$ et $W(\xi')$ sont difféomorphes.

- S'il y a un seul point critique c tel que la valeur critique correspondante γ soit dans $]\xi, \xi'[$, alors $W(\xi')$ est difféomorphe à une variété obtenue en attachant à $W(\xi)$ une anse d'indice égal à l'indice m de c.

[Il suffit de montrer que pour ε assez petit, $W(\gamma + \varepsilon)$ est difféomorphe à une variété du type $(W(\gamma - \varepsilon)) \smile h_m$; ceci se ramène à un problème local qu'on résout en se plaçant au voisinage de c dans un système de coordonnées où φ s'exprime par la formule (1) de 2, a. On définit alors un "voisinage cylindrique" Z de c (hachuré sur la figure 1), analogue aux classiques voisinages cylindriques de MORSE, tel que $(W(\gamma - \varepsilon)) \cup Z$ soit à la fois difféomorphe à $W(\gamma + \varepsilon)$ et à une variété du type $(W(\gamma - \varepsilon)) \smile h_m$.]

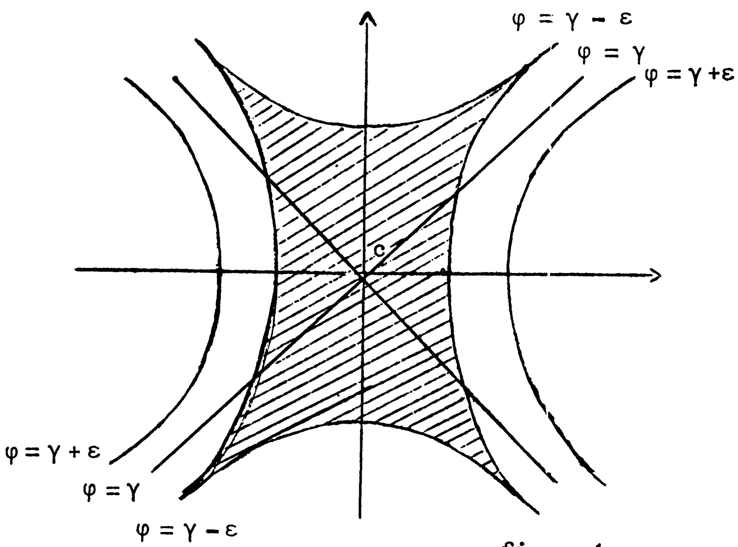

figure 1

Il en résulte que W est difféomorphe à une variété d'anses ("handlebody") obtenue en attachant une anse à $W(0) \times I$, puis une deuxième anse à la variété ainsi obtenue, et ainsi de suite (un nombre fini de fois) ; on écrit ceci (en convenant d'omettre les parenthèses qu'il faudrait mettre à chaque fois à partir de la gauche) :

(2) $$W \approx (W(0) \times I) \smile h^1_{m_1} \smile \dots \smile h^r_{m_r} \quad .$$

Un difféomorphisme de W sur une variété d'anses s'appelle une présentation par anses de W ; (2) est une présentation par anses associée à φ. En intercalant entre les valeurs critiques de φ des nombres ξ_i, on peut aussi associer à φ un difféomorphisme :

$$(2') \quad W \approx (W(0) \times I) \smile h^1_{m_1} \smile (W(\xi_1) \times I) \smile h^2_{m_2} \smile \dots \smile (W(\xi_{r-1}) \times I) \smile h^r_{m_r} \smile (W(1) \times I).$$

La propriété d'associativité des recollements (cf. 2, c) est valable pour le second membre de (2') ; on peut donc faire les recollements à partir de la droite ; on trouve ainsi une présentation dont la suite d'indices s'obtient à partir de celle de (2) en renversant l'ordre, et en remplaçant chaque indice par son complémentaire ; cette présentation est dite duale de la présentation (2). Ce procédé s'applique aussi bien à n'importe quelle présentation (non nécessairement associée à une fonction φ) ; on peut d'ailleurs (en reconstituant pour chaque anse une figure analogue à la figure 1) définir pour toute présentation une fonction φ telle que cette présentation soit associée à φ ; la présentation duale est alors associée à la fonction $-\varphi$.

Réarrangement des anses ; présentations ordonnées. - Soit M une variété de dimension n ; soit $W = (M \smile h_m) \smile h_{m'}$, avec $m' \leq m$; la sphère transverse X de h_m est de dimension $(n - m - 1)$; la sphère d'attachement X' de $h_{m'}$ est de dimension $(m' - 1)$; on a :

$$(m' - 1) + (n - m - 1) \leq (\text{dimension } \partial W) - 1 \quad .$$

Donc, d'après le théorème I de Whitney (cf. 2, b), on peut déplacer un peu X' par isotopie, de manière que son intersection avec X devienne vide ; cette isotopie peut se prolonger à la surface d'attachement de $h_{m'}$. On peut alors, d'une part, rétracter h_m sur un voisinage tubulaire arbitrairement petit de sa boule transverse ; et, d'autre part, rétracter la surface d'attachement de $h_{m'}$ sur un voisinage arbitrairement petit de X' ; les surfaces d'attachement de h_m et $h_{m'}$ seront alors disjointes, donc en particulier h_m et $h_{m'}$ seront permutables. On en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Pour toute variété compacte W de dimension n, il existe une présentation

$$(3) \quad W \approx (W(0) \times I) \smile h^1_0 \smile \dots \smile h^{r_0}_0 \smile h^1_1 \smile \dots \smile h^{r_1}_1 \smile \dots \smile h^1_n \smile \dots \smile h^{r_n}_n$$

où, pour tout m $(0 \leq m \leq n)$, les anses d'indice m sont attachées indépendamment les unes des autres.

COROLLAIRE. - Sur toute variété compacte W , il existe une fonction excellente ayant la propriété suivante : si on range les points critiques par ordre de valeurs croissantes, la suite de leurs indices est non décroissante.

(C'est à peu de choses près ce que SMALE appelle une "nice function".)

4. Démonstration d'un lemme fondamental.

LEMME FONDAMENTAL ("Handlebody theorem"). - Soient m et n deux entiers tels que $m \geq 2$ et $n - m \geq 4$. Soit M une variété compacte de dimension n ; soit Q une composante connexe de ∂M ; soit V une variété obtenue en recollant à M une anse h_m d'indice m le long d'une sous-variété de Q ; soit W une variété obtenue en recollant r anses d'indice $(m + 1)$ à V . Si :

(a) $\pi_1(Q) = 0$

(b) la composée des applications canoniques

$$H_m(D^m , S^{m-1}) \to H_m(V , M) \to H_m(W , M)$$

est zéro.

Alors W peut être obtenue en recollant $(r - 1)$ anses d'indice $(m + 1)$ à M .

La démonstration du lemme fondamental utilise deux lemmes.

LEMME 1. - Soit M une variété compacte de dimension n ; soient V et W deux variétés de la forme :

$$V = M \smile h_m$$

$$W = V \smile h^1_{m+1} \smile \dots \smile h^r_{m+1}$$

les r anses d'indice $(m + 1)$ étant attachées indépendamment les unes des autres. Si la sphère transverse de h_m ne coupe pas les sphères d'attachement des anses h^i_{m+1} pour $i = 1 , \dots , r - 1$; et coupe transversalement et en un seul point la sphère d'attachement de l'anse h^r_{m+1} ; alors W peut être obtenue en recollant $(r - 1)$ anses d'indice $(m + 1)$ à M .

[Démonstration du lemme 1. - On peut permuter h_m avec les anses $h^1_{m+1} , \dots , h^{r-1}_{m+1}$; on est donc ramené au cas $r = 1$. En remplaçant au besoin l'anse h_m par un voisinage assez petit de sa sphère d'attachement, on peut supposer que $h_{m+1} \cap h_m$ est une sous-variété de h_m et de h_{m+1}, difféomorphe à $D^m \times D^{n-m-1}$; résultat analogue pour $h_{m+1} \cap M$; d'après l'associativité du recollement (cf. 2, c), on a donc :

$$W \approx M \smile (h_m \smile h_{m+1}) \quad .$$

Or $h_m \smile h_{m+1}$ est difféomorphe (une fois les arêtes supprimées) à D^n ; et la variété d'attachement de $(h_m \smile h_{m+1})$ à M est elle-même obtenue par recollement de $D^m \times D^{n-m-1}$ à $S^{m-1} \times D^{n-m}$ le long de $S^{m-1} \times D^{n-m-1}$, elle est donc difféomorphe à D^{n-1} ; donc W est difféomorphe à M.]

LEMME 2. - Soit V une variété compacte de dimension n ; soit Q une composante connexe de ∂V ; soit $W = V \smile h_{m+1}$, l'attachement se faisant le long d'une sous-variété de Q ; on suppose $m \geqslant 2$ et $(n - m) \geqslant 3$. Soit X une sous-variété de dimension $(n - m - 1)$ de Q ; soit b le nombre d'intersection de la sphère d'attachement de h_{m+1} avec X (ou l'opposé de ce nombre). Soit f un plongement de S^m dans l'intérieur de $Q \cap \partial W$; il existe un autre tel plongement f', isotope à f, tel que le nombre d'intersection $f'(S^m) \circ X$ soit égal à $(f(S^m) \circ X) + b$.

[Démonstration du lemme 2. - Soit $x_o \in \partial D^{n-m-1}$, et soit S' la sphère "parallèle" à la sphère d'attachement de h_{m+1}, définie comme image canonique de $S^m \times \{x_o\}$. D'après la condition $m \geqslant 2$, $(Q - X)$ est connexe ; on peut donc joindre un point de $f(S^m)$ à un point de S' par un chemin sans point double de $(Q - X)$; on "étire" $f(S^m)$ le long de ce chemin par isotopie, jusqu'à amener $f(S^m)$ à être tangent à S' (avec ou sans coïncidence de l'orientation : les deux sont possibles d'après l'hypothèse $(n - m) \geqslant 3$) ; par une nouvelle isotopie, on fait coïncider $f(S^m)$ avec S' le long d'un petit m-disque ; enfin, par une troisième isotopie, on déforme ce disque sur le bord de h_{m+1}, jusqu'à l'amener à coïncider avec son complémentaire sur S' ; on dit qu'on a "fait sauter $f(S^m)$ au-dessus de h_{m+1}".]

Démonstration du lemme fondamental. - Soit X la sphère transverse de h_m. L'hypothèse homologique (b) entraîne qu'il existe un m-cycle de V qui soit combinaison linéaire des m-cycles $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ définis respectivement par les sphères d'attachement de $h^1_{m+1}, \dots, h^r_{m+1}$, et dont le nombre d'intersection avec X soit 1. Cette combinaison linéaire peut être obtenue par une suite d'opérations élémentaires ; chacune de ces opérations peut être traduite géométriquement à l'aide du lemme 2, ce qui permet de se ramener au cas où la sphère d'attachement de $h_{m+1}^{(i)}$ a un nombre d'intersection avec X égal à 1 pour $i = r$, et à 0 pour $1 \leqslant i \leqslant (r-1)$. L'application r fois répétée des théorèmes I et II de Whitney permet de se ramener au cas du lemme 1.

5. Démonstration du théorème 1.

Soit W une variété de dimension n réalisant le h-cobordisme des variétés V et V' simplement connexes ; on suppose $n \geqslant 6$. On va montrer que W est difféomorphe à $V \times I$.

On munit W d'une présentation par anses d'indices non décroissants :

$$(3)\quad W \approx (V \times I) \smile h_0^1 \smile \dots \smile h_0^{r_0} \smile h_1^1 \smile \dots \smile h_1^{r_1} \smile \dots \smile h_n^1 \smile \dots \smile h_n^{r_n}$$

où toutes les anses de même indice sont indépendantes les unes des autres.

On va supprimer successivement toutes les anses. On pose

$$(V \times I) \smile h_0^1 \smile \dots \smile h_i^{r_i} = W_i \quad .$$

a. Suppression des anses d'indice 0. - Les anses d'indice 0 sont autant de nouvelles composantes connexes (difféomorphes à D^{n+1}) qu'on a rajoutées à $V \times I$; comme l'application $\pi_0(W_1) \to \pi_0(W)$ est un isomorphisme, ces nouvelles composantes doivent se "tuer" déjà dans W_1 ; donc en changeant au besoin l'ordre des anses d'indice 1, on aura un difféomorphisme :

$$W_0 \smile h_1^1 \smile \dots \smile h_1^{r_0} \approx V \times I \quad .$$

b. Suppression des anses d'indice 1. - On travaille sur une présentation du type (3), avec $r_0 = 0$. L'anse $h_1^{r_1}$ est définie par une application $f : D^1 \times D^{n-1} \to W_1$, telle que $f(S^0 \times D^{n-1}) \subset V \times \{1\}$; soit q un point du bord S^{n-2} de D^{n-1} ; on considère l'arc $C^1 = f(D^1 \times \{q\})$; les extrémités de C^1 peuvent être jointes par un arc sans point double C^2 de $V \times \{1\}$; et pour des raisons de dimension C^2 peut éviter les autres anses d'indice 1 et 2 ; $C_1 \cup C_2$ définit un lacet C de ∂W_2, nécessairement homotope à zéro (car d'une part $\pi_1(W_2) \approx \pi_1(W) = 0$; et d'autre part $\pi_2(W_2, \partial W_2) = 0$). Donc d'après le théorème III de Whitney (cf. 2, b), C borde un disque dans W_2 ; attachons à W_2 une nouvelle anse $\overline{h}_2$ d'indice 2, dont la sphère d'attachement soit C ;

puisque C borde un disque dans W_2 , $\bar{h}_2$ peut être tuée par une anse $\bar{h}_3$ d'indice 3 ; de sorte que

$$W_2 \approx (V \times I) \smile h_1^1 \smile \dots \smile h_1^{r_1} \smile h_2^1 \smile \dots \smile h_2^{r_2} \smile \bar{h}_2 \smile \bar{h}_3 \quad .$$

D'après le lemme 1, $\bar{h}_2$ tue $h_1^{r_1}$.

c. Suppression des anses d'indice m pour $2 \leqslant m \leqslant n-4$. - On suppose déjà supprimées les anses d'indice $\leqslant m-1$, de sorte qu'on a une présentation :

$$W \approx (V \times I) \smile h_m^1 \smile \dots \smile h_m^{r_m} \smile h_{m+1}^1 \smile \dots \quad .$$

On pose :

$$(V \times I) \smile h_m^1 \smile \dots \smile h_m^{r_m - 1} = M \quad .$$

On applique le lemme fondamental avec M , W_m , W_{m+1} dans les rôles respectifs de M , V , W [c'est légitime car d'une part $\pi_1(\partial M) = 0$ puisque $\pi_1(V) = 0$; et d'autre part l'hypothèse homologique (b) du lemme fondamental est vérifiée, car $H_m(W_{m+1}, M)$ est isomorphe à $H_m(W, M)$, qui est nul].

Le lemme fondamental permet donc de supprimer $h_m^{r_m}$.

d. Suppression des anses d'indice m pour $n-3 \leqslant m \leqslant n$. - On suppose supprimées les anses d'indice $< n-3$, et on passe à la présentation duale (cf. 3) ; celle-ci n'a que des anses d'indice 0 , 1 , 2 , 3 ; on les supprime comme ci-dessus ; on notera qu'en tuant les anses d'indice 1 on fait apparaître des anses d'indice 3 ; on tue les anses d'indice 2 sans faire apparaître de nouvelles anses; les anses d'indice 3 doivent nécessairement disparaître du même coup.

6. Démonstration du théorème 2.

La démonstration utilise le lemme ci-dessous.

LEMME. - Soit M une variété compacte simplement connexe, de dimension $n \geqslant 6$. Soit m un entier $\leqslant n/2$. Alors il existe une variété compacte simplement connexe X_m telle que :

a. $H_j(X_m) = 0$ pour $j \geqslant m+1$.

b. Il existe sur X_m une "nice function" f (cf. corollaire de la proposition 1) ayant le nombre minimum de singularités compatible avec l'homologie de X_m.

c. Il existe un plongement $i_m : X_m \to M$, tel que l'homomorphisme

$$H_j(X_m) \to H_j(M) \quad ,$$

induit par i_m soit bijectif pour $j \leqslant m-1$ et surjectif pour $j = m$.

[Démonstration du lemme. - Elle procède par récurrence sur m. Pour X_1, on prend un n-disque. Soit $k \leqslant n/2$; on suppose construit (X_{m-1}, i_{m-1}) ; on identifie X_{m-1} à son image par i_{m-1}. D'après le théorème de Hurewicz relatif, l'homomorphisme

$$h : \pi_m(M , X_{m-1}) \to H_m(M , X_{m-1})$$

est bijectif. Considérons d'autre part la suite exacte

$$0 \to H_m(M) \to H_m(M , X_{m-1}) \to H_{m-1}(X_{m-1}) \to H_{m-1}(M) \to 0 \quad .$$

Soit $(\gamma_1 , \dots , \gamma_p)$ un système de générateurs de $H_m(M , X_{m-1})$ obtenu de la façon suivante : on prend d'une part l'image d'un système minimal de générateurs de $H_m(M)$, et d'autre part on relève un système minimal de générateurs de l'image de $H_m(M , X_{m-1})$ dans $H_{m-1}(X_{m-1})$. On représente les éléments $h^{-1}(\gamma_1) , \dots , h^{-1}(\gamma_p)$ de $\pi_m(M , X_{m-1})$ par des plongements

$$g_n : (D^m , \partial D^m) \to (\overline{M - X_{m-1}} , \partial X_{m-1})$$

transversaux à ∂X_{m-1}, et dont les images sont deux à deux disjointes. A l'aide de voisinages tubulaires des images de ces plongements, on attache à X_{m-1} des anses d'indice m ; la sous-variété X_m de M ainsi obtenue a toutes les propriétés voulues.]

Démonstration du théorème 2. - Soit m = partie entière de $n/2$; soient $X_m \subset M$ et f, donnés par le lemme ; soit K l'adhérence de $M - X_m$. Alors $H_i(W , X) = 0$ pour $i \leqslant m$; donc par dualité $H^j(K) = 0$ pour $j \geqslant n - m$. Donc, d'après le théorème des coefficients universels, $H_{n-m-1}(K)$ est sans torsion. Soient maintenant $Y_{n-m-1} \subset K$ et g, donnés par le lemme ; d'après le théorème 1', on peut supposer que $Y_{n-m-1} = K$, de sorte que $M = X_m \cup Y_{n-m-1}$; en recollant le long de ∂X_m la fonction f et la fonction $(1 - g)$ on obtient une fonction qui a les propriétés voulues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 227-380 (Thèse Sc. math. Paris. 1960).

[2] DOUADY (Adrien). - Plongements de sphères, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 205, 6 pages.

[3] HAEFLIGER (André). - Knotted (4k - 1)-spheres in 6k-space (à paraître).

[4] HAEFLIGER (André). - Plongements différentiables des variétés dans des variétés, Comment. Math. Helvet., t. 36, 1961, p. 47-82.

[5] KERVAIRE (M.) and MILNOR (J.). - Groups of homotopy spheres (à paraître).

[6] MILNOR (J.). - Differentiable manifolds which are homotopy spheres. - Princeton, Princeton University, 1959 (multigraphié).

[7] MILNOR (J.). - Microbundles and differentiable structures. - Princeton, Princeton University, 1961 (multigraphié).

[8] Séminaire CARTAN : Topologie différentielle, t. 14, 1961/62 (à paraître).

[9] SMALE (Stephen). - Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, Annals of Math., Series 2, t. 74, 1961, p. 391-406.

[10] SMALE (Stephen). - Differentiable and combinatorial structures on manifolds, Annals of Math. (à paraître).

[11] SMALE (Stephen). - On the structure of manifolds (à paraître).

[12] THOM (René). - Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Symposium internacional de Topologia algebraica [1958. Mexico] ; p. 54-67. - Mexico, Universidad nacional autonomica, 1958.

[13] THOM (René). - Un lemme sur les applications différentiables, Bol. Soc. mat. Mexicana, Série 2, t. 1, 1956, p. 59-71.

[14] WHITEHEAD (J. H. C.). - On C^1-complexes, Annals of Math., t. 41, 1940, p. 809-824.

[15] WHITNEY (Hassler). - Differentiable manifolds, Annals of Math., t. 37, 1936, p. 645-680.

[16] WHITNEY (Hassler). - The self-intersection of a smooth n-manifold in 2n-space, Annals of Math., t, 45, 1944, p. 247-293.

[17] WU WEN TSUN. - On the isotopy of C^r-manifolds of dimension n in Euclidean (2n + 1)-space, Science Record, New Series, t. 2, 1958, p. 271-275.