ADRIEN DOUADY

Le théorème de Grauert sur la cohérence des faisceaux-images d'un faisceau analytique cohérent par un morphisme propre

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 220, p. 235-248
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__235_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 220

LE THÉORÈME DE GRAUERT SUR LA COHÉRENCE DES FAISCEAUX-IMAGES D'UN FAISCEAU ANALYTIQUE COHÉRENT PAR UN MORPHISME PROPRE

par Adrien DOUADY

La rédaction primitive, par trop heuristique, a dû être modifiée. J'ai été amené à serrer de plus près l'ouvrage de GRAUERT [3], dont ce qu'on va lire n'est qu'un résumé, et auquel je renvoie pour toutes les obscurités de détail.

I. Espaces normés de cohomologie.

1. Pseudonormes ([3], § 3, n° 1, p. 24).

Soient $\pi : \underset{\sim}{C}^m \times \underset{\sim}{C}^n \to \underset{\sim}{C}^m$ la projection naturelle, et $U \subset \underset{\sim}{C}^{m+n}$ un ouvert de la forme $\underset{\sim}{C}^m \times G$, où $G \subset\subset \underset{\sim}{C}^n$ (cette notation signifie que G est un ouvert de Stein relativement compact dans $\underset{\sim}{C}^n$).

Pour tout polycylindre ouvert $B \subset\subset \underset{\sim}{C}^m$, de centre 0 et de polyrayon $(\rho_1, \ldots, \rho_m)$, on pose

$$U_B = U \cap \pi^{-1}(B) = B \times G \quad .$$

Toute fonction holomorphe φ sur $U_B = B \times G$ se développe en série de la forme

$$\varphi(x, y) = \sum f_{i_1,\ldots,i_m}(y)\left(\frac{x_1}{\rho_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\frac{x_m}{\rho_m}\right)^{i_m}$$

où les $f_{i_1,\ldots,i_m}$ sont des fonctions holomorphes sur G.

On pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{y\in G} |f(y)|$$

et

$$\|\varphi\| = \sup_{i_1,\ldots,i_m} \|f_{i_1,\ldots,i_m}\|_\infty \quad .$$

L'espace vectoriel des fonctions holomorphes φ sur U_B telles que $\|\varphi\|$ soit finie est un espace de Banach, qu'on notera $\Gamma_g(U_B\ ;\ \mathcal{O})$. Ces définitions s'étendent immédiatement au cas où φ est une fonction à valeurs dans $\underset{\sim}{C}^r$.

Si X est un ouvert de Stein de $\underset{\sim}{C}^{m+n}$ tel que $U_B \subset\subset X$, et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, on peut trouver un homomorphisme α de faisceaux analytiques sur X

$$\alpha : \mathcal{O}^r \to \mathcal{F}$$

surjectif sur un voisinage de $\overline{U_B}$. On note alors $\Gamma_g(U_B\ ;\ \mathcal{F})$ l'image par α de $\Gamma_g(U_B\ ;\ \mathcal{O}^r)$ dans $\Gamma(U_B\ ;\ \mathcal{F})$. C'est un espace de Banach quand on le munit de la topologie quotient de celle de $\Gamma_g(U_B\ ;\ \mathcal{O}^r)$. Cet espace, avec sa topologie, est indépendant du choix de α, et même de X : il ne dépend que du faiseau $\mathcal{F}$ sur $\overline{U_B}$.

Si maintenant X est un espace analytique quelconque, $\pi : X \to \underset{\sim}{C}^m$ un morphisme, $U \subset\subset X$, et $B \subset\subset \underset{\sim}{C}^m$ un polycylindre 0 ; si de plus on s'est donné un isomorphisme de $U_B = U \cap \pi^{-1}(B)$ sur un sous-espace analytique fermé de $B \times G$, où $G \subset\subset \underset{\sim}{C}^n$, qui se prolonge à un voisinage de $\overline{U_B}$, on peut définir par transport $\Gamma_g(U_B\ ;\ \mathcal{F})$ pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur X.

La nécessité d'avoir des ouverts "carrés" oblige GRAUERT à jouer continuellement sur deux recouvrements $\mathcal{W}' \ll \mathcal{W}$ tels que, pour chaque $(i_o, \ldots, i_q)$, on puisse trouver un ouvert carré $U_{i_o,\ldots,i_q}$ tel que $W'_{i_o,\ldots,i_q} \subset U_{i_o,\ldots,i_q} \subset W_{i_o,\ldots,i_q}$ ([3], § 4, p. 37). Ceci alourdit beaucoup la démonstration. Dans la suite de cet exposé, nous glisserons souvent sur ce genre de difficulté.

2. Espaces normés de cocycles.

Soient X un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique, π un morphisme propre de X dans un espace $\underset{\sim}{C}$-analytique Y que nous supposerons être un ouvert de $\underset{\sim}{C}^m$. Si $\mathcal{U} = (U_i)$ et $\mathcal{V} = (V_i)$ sont des recouvrements de Stein, indexés par le même ensemble fini, de X, on écrira $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$ si la relation $B' \subset\subset B \subset\subset Y$ entraîne pour tout indice i : $V_i \cap \pi^{-1}(B') \subset\subset U_i \cap \pi^{-1}(B) \subset\subset X$.

Soient donc $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$, et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Pour tout polycylindre $B \subset\subset Y$ de centre $y_o = 0$, on posera $X_B = \pi^{-1}(B)$,

$$\mathcal{C}^q_g(X_B , \mathfrak{U} ; \mathfrak{F}) = \prod_{i_0,\dots,i_q} \Gamma_g(U_{i_0,\dots,i_q} \cap X_B ; \mathfrak{F})$$

$$Z^q_g(X_B , \mathfrak{U} ; \mathfrak{F}) = \mathcal{C}^q_g(X_B , \mathfrak{U} ; \mathfrak{F}) \cap Z^q(X_B , \mathfrak{U} ; \mathfrak{F})$$

Z^q_g est un espace de Banach. $B^q_g(X_B , \mathfrak{U} , \mathfrak{V} ; \mathfrak{F})$ désignera le sous-espace vectoriel de $Z^q_g(X_B , \mathfrak{U} ; \mathfrak{F})$ formé des cocycles dont la restriction au recouvrement $\mathfrak{V}$ est le cobord d'une cochaîne $\beta \in \mathcal{C}^{q-1}_g(X_B , \mathfrak{V} ; \mathfrak{F})$.

Enfin on pose

$$H^q_g(X_B , \mathfrak{U} , \mathfrak{V} ; \mathfrak{F}) = Z^q_g(X_B , \mathfrak{U} ; \mathfrak{F})/B^q_g(X_B , \mathfrak{U} , \mathfrak{V} ; \mathfrak{F}) \quad .$$

Comme on ne sait pas a priori que B^q_g est un sous-espace fermé de Z^q_g , on ne sait pas que H^q_g est séparé (on le verra au paragraphe IV). Mais il est complet. GRAUERT parvient à démontrer (sans montrer que les H^q_g sont séparés !) le résultat suivant :

PROPOSITION 1 ([3], § 4, Lerayschensatz 8, p. 45). - Soient $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}' < \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}_0$ des recouvrements de Stein de X .

Alors, pour tout polycylindre B suffisamment petit de centre y_0 , on a un homomorphisme d'espaces vectoriels semi-normés :

$$H^q_g(X_B , \mathfrak{U} , \mathfrak{V} ; \mathfrak{F}) = H^q_g(X_B , \mathfrak{U}' , \mathfrak{V} ; \mathfrak{F}) \quad .$$

La démonstration fait intervenir $4q + 4$ recouvrements plus fins l'un que l'autre !

II. Énoncé et réductions des résultats.

1. Énoncé du théorème.

Si X et Y sont des espaces analytiques, $\pi : X \to Y$ un morphisme, $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique sur X , le faisceau $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}$ est, par définition, le faisceau analytique sur Y associé au préfaisceau $U \to H^q(\pi^{-1}(U) ; \mathfrak{F})$.

THÉORÈME FONDAMENTAL. - Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme propre d'espaces $\underset{\sim}{C}$-analytiques. Pour tout faisceau $\mathfrak{F}$ analytique cohérent sur X , les faisceaux $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}$ sont des faisceaux analytiques cohérents sur Y .

2. Premières réductions.

Le théorème étant de nature locale par rapport à Y, et tout point de Y ayant un voisinage isomorphe à un sous-espace analytique fermé d'un polycylindre, il suffit de démontrer le théorème fondamental dans le cas où $Y = B_0 \times D$ est un polycylindre de $\underset{\sim}{C}^m$, B_0 étant un polycylindre de $\underset{\sim}{C}^{m-1}$ et D un disque de $\underset{\sim}{C}$. On pourra de plus remplacer le polycylindre $B = B_0 \times D$ par un polycylindre plus petit B' de même centre y_0.

Pour tout sous-espace analytique localement fermé $A \subset B$, on posera $X_A = \pi^{-1}(A)$, et on écrira X_0 au lieu de $X_{B_0 \times 0}$.

La démonstration se fera par récurrence sur m [1]. On appliquera donc en particulier les résultats énoncés dans ce paragraphe au faisceau $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \otimes \mathcal{O}_{X_0}(X_0)$ sur X_0. On fera (§ IV et § V), à l'intérieur de cette récurrence, une récurrence descendante sur q.

B étant un polycylindre, donc une variété de Stein, la suite spectrale

$$H^*(B\ ;\ \mathcal{R}^*\pi\mathfrak{F}) \Longrightarrow H^*(X\ ;\ \mathfrak{F})$$

dégénère, et $H^q(X\ ;\ \mathfrak{F}) = \Gamma(B\ ;\ \mathcal{R}^q\pi\mathfrak{F})$. On aura également, au moins pour $B' \subset B$ suffisamment petit (Théorème 2 ci-dessous) :

$$H^q_g(X_{B'}\ ;\ \mathfrak{F}) = \Gamma_g(B'\ ;\ \mathcal{R}^q\pi\mathfrak{F}) \quad .$$

3. Réduction au cas "sans h-torsion".

Soit h la projection de $B = B_0 \times D$ sur D, considérée comme un élément de $\Gamma(B\ ;\ \mathcal{O})$ ou de $\Gamma(X\ ;\ \mathcal{O})$.

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $\mathfrak{F}$ est sans h-torsion, c'est-à-dire quand l'application, définie par la multiplication par $h \circ \pi$ et qu'on note encore $h : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$, est injective. En effet, si $\mathfrak{F}$ est un faisceau analytique cohérent quelconque, le sous-faisceau $\mathfrak{F}' = \bigcup_r \operatorname{Ker} h^r : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ est un sous-faisceau analytique cohérent de $\mathfrak{F}$, car la réunion d'une famille filtrante croissante de sous-faisceaux cohérents d'un faisceau analytique cohérent est cohérente, et le faisceau $\mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}/\mathfrak{F}'$ est sans h-torsion. La suite exacte

---

[1] Le cas $m = 0$ n'est autre que le théorème de finitude de Cartan-Serre [2].

$$0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$$

donne naissance à la suite exacte

$$\mathcal{R}^{q-1}\,\pi\mathfrak{F}'' \to \mathcal{R}^{q}\,\pi\mathfrak{F}' \to \mathcal{R}^{q}\,\pi\mathfrak{F} \to \mathcal{R}^{q}\,\pi\mathfrak{F}'' \to \mathcal{R}^{q+1}\,\pi\mathfrak{F}'$$

de faisceaux sur B , et la cohérence de $\mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F}$ résultera de la cohérence des quatre autres. La cohérence de $\mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F}'$ résultera de l'hypothèse de récurrence sur la dimension de B , car $\mathfrak{F}'$ admet une suite de composition formée de faisceaux analytiques cohérents sur X_o . Il suffit donc de démontrer la cohérence de $\mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F}''$.

Remarquons que si $h : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ est injective, l'application $h - a : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ est également injective sur $X_{B'}$, $B' \subset B$ relativement compact donné, pourvu que la constante $a \in \underset{\sim}{C}$ soit suffisamment petite.

On pourra donc supposer dans la suite que $\mathfrak{F}$ est sans $(h - a)$-torsion pour tout a .

III. Le type fini des fibres de $\mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F}$.

1\. THÉORÈME 1. - La fibre $(\mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F})_{y_o}$ est un $\mathcal{O}_{y_o}$-module de type fini.

On supposera que y_o est le centre du polycylindre $B = B_o \times D$, et que $\mathfrak{F}$ est sans h-torsion. Posons

$$\mathfrak{F}_o = \mathfrak{F} \otimes \mathcal{O}(X_o) = \mathfrak{F}/h\mathfrak{F} \quad .$$

C'est un faisceau analytique cohérent sur X_o , et par hypothèse de récurrence $\mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F}_o$ est un faisceau analytique cohérent sur B_o . L'application $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_o$ donne naissance à une application $\varepsilon : \mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F} \to \mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F}_o$, qui n'est pas surjective en général, mais le module $(\mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F}_o)_{y_o}$ étant noethérien, il existe des éléments $s_1 , \dots , s_r \in (\mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F}_o)_{y_o}$ qui engendrent l'image par ε de $(\mathcal{R}^q\,\pi\mathfrak{F})_{y_o}$. On peut donc trouver $B_1 = B_{1,o} \times D_1 \subset B$, et des éléments $\xi_1 , \dots , \xi_r \in H^q_b(X_{B_1} ; \mathfrak{F})$ qui ont pour image $s_1 , \dots , s_r$.

Le théorème 1 peut maintenant s'énoncer sous la forme plus précise :

THÉORÈME 1 bis ([3], § 6, lemma (*), p. 54). – Soient $\xi_1, \dots, \xi_r \in H_b^q(X_{B_1}; \mathfrak{F})$ des éléments dont les images dans $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_o)_{y_o}$ engendrent l'image par ε de $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F})_{y_o}$. Alors $\xi_1, \dots, \xi_r$ engendrent $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F})_{y_o}$.

Plus précisément pour tout $B' = B'_o \times D' \subset B_1$, tel que B'_o soit un voisinage privilégié assez petit de y_o dans B_o pour les sections $s_1, \dots, s_r$ du faisceau $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_o$ définies par $\xi_1, \dots, \xi_r$, il existe $D'' \subset D'$ tel que tout élément $\zeta \in H_g^q(X_{B'}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ se mette sur $X_{B'_o \times D''}$ sous la forme $\zeta = \sum \varphi_i \xi_i$, où $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ sont des fonctions holomorphes bornées sur $B'' = B'_o \times D''$.

Par voisinage priviligié, nous entendons un voisinage B'_o de y_o tel que toute section bornée u de $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_o$ sur B'_o, dont le germe au point y_o appartient au sous-module de $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_o)_{y_o}$ engendré par $s_1, \dots, s_r$, se mette sous la forme $u = \sum \alpha_i s_i$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont des fonctions holomorphes bornées sur B'_o. D'après un théorème de H. CARTAN ([1], ou [3], § 3, Satz 1, p. 25), y_o admet un système fondamental de tels voisinages. D'autre part, si B'_o est suffisamment petit, $h\mathfrak{F}$ est un sous-faisceau de $\mathfrak{F}$ sur $X_{B'}$.

2. Démonstration du théorème 1 bis.

Nous écrirons X', X'', ... au lieu de $X_{B'}$, $X_{B''}$, ...

LEMME 1. – Soient $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^q(X_{B_1}; \mathfrak{F})$ et $B' \subset B_1$ vérifiant les hypothèses du théorème 1 bis. Alors il existe un nombre réel $c > 0$, tel que tout élément $\zeta \in H_g^q(X', \mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ se mette sous la forme

$$\zeta = \sum_1^r a_i \xi_i + h\zeta_1 ,$$

avec

$$a_i \in \Gamma_g(B'_o; \mathcal{O}), \quad \zeta_1 \in H_g^q(X', \mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}),$$

et

$$\|\zeta_1\| \leq c\|\zeta\|, \quad \|a_i\| \leq c\|\zeta\| .$$

DÉMONSTRATION du lemme. - Il résultera du théorème de Banach appliqué à la suite exacte d'espaces semi-normés complets :

$$H^q_g(X' , \mathcal{U} , \mathcal{V} ; \mathcal{F}) \xrightarrow{h} H^q_g(X' , \mathcal{U} , \mathcal{V} ; \mathcal{F}) \xrightarrow{\chi} H^q_g(X'_o ; \mathcal{F}_o) \quad .$$

En effet, soient $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{V}'$ des recouvrements tels que $\mathcal{V} \ll \mathcal{V}' \ll \mathcal{U}' \ll \mathcal{U}$. On a, par hypothèse de récurrence sur m :

$$H^q_g(X'_o , \mathcal{U} , \mathcal{V} ; \mathcal{F}_o) = H^q_g(X'_o , \mathcal{U} , \mathcal{U}' ; \mathcal{F}_o) = \Gamma_g(B'_o ; \mathcal{R}^q \pi\mathcal{F}_o) \quad .$$

Soit $\zeta \in H^q_g(X' , \mathcal{U} , \mathcal{V} ; \mathcal{F})$ un élément tel que $\chi(\xi) = 0$ dans $H^q_g(X'_o , \mathcal{U} , \mathcal{V} ; \mathcal{F}_o)$, donc aussi dans $H^q_g(X'_o , \mathcal{U}, \mathcal{U}' ; \mathcal{F}_o)$. Si $z \in Z^q_g(X' , \mathcal{U} ; \mathcal{F})$ est un cocycle représentant ζ , $\chi(z)$ est de la forme δv , avec $v \in Z^q_g(X'_o , \mathcal{U}' ; \mathcal{F}_o)$, et on peut relever v en un cocycle $u \in Z^q_g(X , \mathcal{U}' ; \mathcal{F})$. On a alors $z|_{\mathcal{U}'} = \delta u + z'$, avec $\chi(z') = 0$. Ceci entraîne que $z'|_{\mathcal{V}'} = hz_1$, avec $z_1 \in Z^q_g(X' , \mathcal{V}' ; \mathcal{F})$, donc $\zeta = h\zeta_1$, avec $\zeta_1 \in H^q_g(X' , \mathcal{V}' , \mathcal{V} ; \mathcal{F}) = H^q_g(X' , \mathcal{U} , \mathcal{V} ; \mathcal{F})$ d'après la proposition 1, ce qui démontre le lemme.

DÉMONSTRATION du théorème à partir du lemme. - Soit $\zeta \in H^q_g(X_{B'} ; \mathcal{F})$. Écrivons

$$\zeta = \sum a^i_o \, \xi_i + h\zeta_1$$

$$\zeta_1 = \sum a^i_1 \, \xi_i + h\zeta_2$$

$$\vdots$$

$$\zeta_N = \sum a^i_N \, \xi_i + h\zeta_{N+1}$$

d'où

$$\zeta = \Big(\sum_{1 \leq i \leq r} \Big(\sum_{0 \leq n \leq N} a^i_n \, h^n \, \xi_i \Big)\Big) + h^{N+1} \, \zeta_{N+1} \quad \text{avec} \quad \|\zeta_{N+1}\| \leq c^{N+1} \|\zeta\| \quad .$$

Le reste $h^{N+1} \, \zeta_{N+1}$ tend vers 0 à condition de se restreindre à un polycylindre $B'_o \times D''$ défini par $|h| < \rho$, avec $\rho < \frac{1}{c}$ [2]. Dans un tel polycylindre, la

---

[2] C'est ici qu'on a besoin d'avoir des espaces de Banach.

série $\sum a_n^i h^n$ définit une fonction holomorphe bornée φ_i , et on a $\zeta = \sum \varphi_i \xi_i$, à un élément de norme nulle près. Le calcul au niveau des cochaînes montre que cette égalité a lieu en fait exactement.

3. COROLLAIRE. - Il existe un voisinage B_o' de y_o dans B_o , qu'on peut supposer arbitrairement petit, tel que pour tout disque $D' \subset D$, il existe un disque $D'' \subset D'$ tel que, en posant $B' = B' \times D'$ et $B'' = B_o' \times D''$, on ait

$$\mathrm{Ker}(H_g^o(X_{B'} ; \mathfrak{F}) \to H_g^q(X_{B''} ; \mathfrak{F})) = \mathrm{Ker}(H_g^q(X_{B'} ; \mathfrak{F}) \to (\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F})_{y_o}) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Considérons le $\mathcal{O}_{y_o}$-module des relations entre les ξ_i dans $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F})_{y_o}$, i. e.

$$\mathrm{Ker} : (\mathcal{O}_{y_o})^r \xrightarrow{(\xi_i)} \mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F} \quad .$$

Comme $\mathcal{O}_{y_o}$ est un anneau noethérien, ce module admet un nombre fini de générateurs $\eta_1 , \dots , \eta_s$, qui peuvent être réalisés comme des éléments de $(\Gamma_b(B' , \mathcal{O}))^r$ si B' est assez petit. De plus, si B' est assez petit, $\eta_j((\xi_i)) = 0$ comme élément de $H_g^q(X_{B'} ; \mathfrak{F})$. Supposons que $B'' = B_o' \times D''$ soit un voisinage priviligié aussi par rapport aux sections (η_j) de $\mathcal{O}^r$, alors si $\zeta \in H_g^q(X_{B'} ; \mathfrak{F})$ a une image nulle dans $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F})_{y_o}$, $\zeta = \sum \varphi_i \xi_i$ sur $X_{B''}$, et les φ_i forment une relation entre les ξ_i , donc $\varphi_i = \sum \alpha_j^i \eta_j$, où les α_j^i sont des fonctions holomorphes bornées sur B'' . On en déduit que ζ a déjà une image nulle dans $H_b^q(X_{B''} ; \mathfrak{F})$.

C. Q. F. D.

IV. Le type fini du faisceau $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}$.

A partir de maintenant, nous commençons à démontrer le théorème fondamental et les théorèmes ci-dessous par récurrence descendante sur q . Pour $q > \dim X$, $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F} = 0$, et le théorème est trivial. Nous supposerons donc en particulier $\mathcal{R}^{q+1} \pi\mathfrak{F}$ cohérent.

En reprenant les notations introduites dans la démonstration du corollaire du théorème 1 bis définissons un faisceau analytique cohérent $\mathfrak{S}$ sur $B' = B_o' \times D'$ comme conoyau de l'application $\eta : \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^r$. Les éléments (ξ) de $H^q(X_{B'} ; \mathfrak{F})$

définissent un homomorphisme $\gamma : \mathcal{G} \to \mathcal{R}^q \pi\mathcal{F}$ de faisceaux analytiques sur B'. Par construction, γ est un isomorphisme sur les fibres au point y_o.

THÉORÈME 2. - Pour tout disque D''' de centre 0 et de rayon $\rho''' < \rho''$, on a, en posant $B''' = B'_o \times D'''$:

$$H^q_g(X''' , \mathcal{U} , \gamma ; \mathcal{F}) = \Gamma_g(B''' ; \mathcal{G}) \qquad .$$

DÉMONSTRATION. - Soit $z \in Z^q_g(X''' , \mathcal{U} ; \mathcal{F})$. On peut mettre z sous forme d'une série : $z = \sum (\frac{h}{\rho'''})^k z_k$, où les z_k sont des cochaînes de $\mathcal{C}^q_g(X' , \mathcal{U} ; \mathcal{F})$, avec $\|z_k\|$ borné indépendamment de k.

LEMME 2. - Si $\mathcal{U}' \ll \mathcal{U}$, on peut également mettre $z|_{\mathcal{U}'}$ sous forme d'une série $\sum(\frac{h}{\rho'''})^k z'_k$, où les z'_k sont <u>cocycles</u> de $Z^q_g(X' , \mathcal{U}' ; \mathcal{F})$, avec $\|z'_k\|$ borné indépendamment de k.

DÉMONSTRATION du lemme ([3], p. 52 et p. 53). - Écrivons

$$z = \sum (\frac{h}{\rho'''})^k z_k = \sum_o^{N-1} (\frac{h}{\rho'''})^k z_k + (\frac{h}{\rho'''})^N \sum (\frac{h}{\rho'''})^k z_{N+k} \qquad .$$

Posons

$$u_N = \sum_{k<N} (\frac{h}{\rho'''})^k z_k \in \mathcal{C}^q_g(X' , \mathcal{U} ; \mathcal{F})$$

$$v_N = \sum (\frac{h}{\rho'''})^k z_{N+k} \in \mathcal{C}^q_g(X''' , \mathcal{U} ; \mathcal{F}) \qquad .$$

On a :

$$- \delta u_{N|X'''} = (\frac{h}{\rho'''})^N \delta v_N \qquad .$$

Soit $y_N \in Z^{q+1}(X' , \mathcal{U} ; \mathcal{F})$ le cocycle obtenu en recollant sur $X''' - X'_o$ les cocycles $-(\frac{\rho'''}{h})^N \delta u_N$ et δv_N. La section du faisceau $\mathcal{R}^{q+1} \pi\mathcal{F}$ définie par y_N est nulle sur B''' puisque y_N y est le cobord de v_N. Elle est donc nulle sur B', si on a pris soin de choisir B' privilégié pour le faisceau cohérent $\mathcal{R}^{q+1} \pi\mathcal{F}$, et, d'après le théorème 2 appliqué en degré $q + 1$, on peut écrire $y_N = \delta W_N$, avec $W_N \in \mathcal{C}^q(X , \mathcal{U}' ; \mathcal{F})$. En posant $z'_k = z_k - W_k + \frac{h}{\rho'''} W_{k+1}$, on voit que z'_k est un cocycle. Cherchons à majorer sa norme. On a

$$u_N = \left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^{N-1} \sum_{k<N} \left(\frac{h}{\rho'}\right)^k \left(\frac{\rho''}{\rho'}\right)^{N-1-k} z_k$$

d'où

$$\|u_N\| \leq \left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^{N-1} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} \|z\| = \left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^N \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \|z\| .$$

On en déduit :

$$\|\delta u_N\| \leq (q + 1)\left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^N \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \|z\|$$

et

$$\|y_N\| \leq (q + 1) \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \|z\|$$

(par application du principe du maximum).

On peut donc choisir W_N tel que $\|W_N\| \leq c\|z\|$, avec une certaine constante c indépendnate de N. Ceci montre bien que les cocyles z'_k sont bornés en norme dans leur ensemble. Il en résulte que la série $\sum \left(\frac{h}{\rho''}\right)^k z'_k$ converge sur X'' vers z, ce qui démontre le lemme.

DÉMONSTRATION du théorème à partir du lemme. - Soit $z \in Z^q_g(X'' , \mathfrak{U} ; \mathfrak{F})$, on peut mettre z sous la forme d'une série de cocycles : $z = \sum \left(\frac{h}{\rho''}\right)^k z_k$, avec $z_k \in Z^q_g(X' , \mathfrak{U}' ; \mathfrak{F})$, et chaque z_k se met sur X'' sous la forme

$$z_k = \sum \varphi^i_k \xi_i , \quad \varphi^i_k \in \Gamma_g(B'' ; \mathcal{O}) .$$

On a donc $z = \sum \varphi_i \xi_i$ en posant $\varphi_i = \sum \left(\frac{h}{\rho''}\right)^k \varphi^2_k$. Comme les φ^i_k sont bornés dans $\Gamma_g(B'' , \mathcal{O})$, les φ_i sont des éléments de $\Gamma_g(B'' ; \mathcal{O})$, et donnent naissance à un élément de $\Gamma_g(B'' ; \mathcal{G})$. Cet élément est bien déterminé, car on connait son germe à l'origine (on suppose B'' priviligié pour le faiscoau $\mathcal{G}$). L'application en sens inverse $\Gamma_g(B'' ; \mathcal{G}) \to H^q_g(X'' , \mathfrak{U} , \mathfrak{V} ; \mathfrak{F})$ se définit à partie des ξ_i, et on a ainsi un isomorphisme qui démontre le théorème 2. Cet isomorphisme préserve la topologie : on voit en particulier que l'espace $H^q_g(X'' ; \mathfrak{F})$ est séparé.

THÉORÈME 3. - L'homomorphisme $\gamma : \mathcal{G} \to \mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}$ est surjectif au voisinage de y_0. En particulier le faisceau analytique $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}$ est de type fini.

Pour toute constante $a \in \underset{\sim}{C}$, soit $B_a \subset B$ le sous-espace analytique fermé des y tels que $h(y) = a$, posons $X_a = \pi^{-1}(B_a)$, et $\mathfrak{F}_a = \mathfrak{F} \otimes \mathcal{O}(X_a) = \mathfrak{F}/(h - a)\mathfrak{F}$.

LEMME 3. - Soit $B'' = B_0 \times D''$ un polycylindre tel qu'on puisse appliquer le corollaire du théorème 1 bis en degrés q et $q + 1$. Alors pour tout $y \in B''$, l'image de $H^q_g(X'' ; \mathfrak{F})$ dans $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_{h(y)})_y$ engendre comme $\mathcal{O}_y(X_{h(y)})$-module l'image de $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F})_y$ dans $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_{h(y)})_y$.

DÉMONSTRATION du lemme. -

a. Cas $h(y) = 0$. - La suite exacte

$$0 \to \mathfrak{F} \xrightarrow{h} \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_0 \to 0$$

donne naissance à la suite exacte

$$\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F} \to \mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{R}^{q+1} \pi\mathfrak{F}$$

de faisceaux sur B. Le faisceau $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_0$ est cohérent par hypothèse de récurrence sur m, et $\mathcal{R}^{q+1} \pi\mathfrak{F}$ par hypothèse de récurrence descendante sur q. Il en résulte que le faisceau $\mathcal{G}_0$ image de $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}$ dans $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_0$, qui est le noyau de δ_1 est cohérent. Les sections définies par $\xi_1, \ldots, \xi_r$ engendrent $\Gamma_g(B'_0, \mathcal{G}_0)$, donc chaque fibre de $\mathcal{G}_0$ aux points $y \in B'_0$ d'après le théorème A de H. CARTAN appliqué à B'_0 qui est relativement compact dans un ouvert de Stein.

b. Cas $h(y) \neq 0$. - Pour la même raison, le faisceau $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_{h(y)}$ est cohérent. On va montrer que l'application :

$$H^q_g(X'' ; \mathfrak{F}) \to H^q_g(X'' ; \mathfrak{F}_{h(y)}) = \Gamma_g(B''_{h(y)} ; \mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_{h(y)})$$

est surjective. Le lemme 2 s'en déduira en appliquant le théorème A de H. CARTAN au faisceau cohtérent $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_{h(y)}$. Il suffit de montrer que, dans la suite exacte

$$H^q_g(X'' ; \mathfrak{F}) \to H^q_g(X'' ; \mathfrak{F}_{h(y)}) \xrightarrow{\delta} H^q_g(X'' ; \mathfrak{F}) \quad ,$$

δ est nulle. Or on a

$$H^q_g(X'' ; \mathfrak{F}_{h(y)}) = H^q_g(X' ; \mathfrak{F}_{h(y)}) \qquad ,$$

donc δ se factorise à travers $H^{q+1}(X' ; \mathfrak{F})$ et pour montrer que $\delta\alpha = 0$ dans $H^{q+1}(X'' ; \mathfrak{F})$, il suffit de démontrer que son image est nulle dans $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F})_{y_0}$. Mais pour tout $\alpha \in H^q_g(X'' ; \mathfrak{F}_{h(y)})$, on a

$$(h - h(y))\ \alpha = 0 \qquad ,$$

d'où

$$(h - h(y))\ \delta\alpha = 0 \qquad .$$

Comme $(h - h(y))$ est inversible dans $\mathcal{O}_{y_0}$, on en déduit que

$$\delta\alpha = 0 \qquad .$$

C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION du théorème à partir du lemme. - Nous allons montrer maintenant que les sections de $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}$ définies par les éléments $\xi_1 , \ldots , \xi_r$ choisis au paragraphe précédent engendrent le faisceau $\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}$ au voisinage de y_0 . L'application

$$\gamma_a : \Gamma_g(B'' , \mathcal{O})^r \oplus H^q_g(X'' ; \mathfrak{F}) \to H^q_g(X'' ; \mathfrak{F})$$

définie par $\gamma_a(\varphi_1 , \ldots , \varphi_r , \zeta) = \sum \varphi_i\ \xi_i + (h - a)\ \zeta$ est surjective pour $a = 0$, donc aussi pour $a < \rho$ suffisamment petit en vertu d'un corollaire du théorème de Banach. Donc, pour $a < \rho$, les ξ_i engendrent $H^q_g(X'' ; \mathfrak{F})/\mathrm{Im}(h - a)$, donc engendrent aussi, d'après le lemme 2, l'image de $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F})_y$ dans $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F}_{h(y)})_y$ pour tout point y tel que $h(y) = a$. En appliquant le théorème 1 bis, en en déduit que les ξ_i engendrent la fibre $(\mathcal{R}^q \pi\mathfrak{F})_y$ pour tout point y tel que $h(y) < \rho$.

C. Q. F. D.

V. Le type fini des relations.

Pour démontrer le théorème fondamental, il reste à montrer :

THÉORÈME 3. - L'homomorphisme γ défini plus haut est injectif sur B''.

Définissons les faisceaux $\mathcal{F}_a^n$ sur X et $\mathcal{G}_a^n$ sur B par les suites exactes :

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{(h-a)^n} \mathcal{F} \to \mathcal{F}_a^n \to 0$$

$$0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{(h-a)^n} \mathcal{G} \to \mathcal{G}_a^n \to 0 \quad .$$

LEMME 3. - Si $a \in D''$, l'homomorphisme $\gamma_a^n : \mathcal{G}_a^n \to \mathcal{R}^q \pi \mathcal{F}_a^n$ induit par γ est injectif sur B''.

DÉMONSTRATION. - Le faisceau $\mathcal{F}_a^n$ admet une suite de composition formée de faisceaux analytiques cohérents sur X_a, donc $\mathcal{R}^q \pi \mathcal{F}_a^n$ est un faisceau analytique cohérent sur B par hypothèse de récurrence sur la dimension m de B. Le faisceau $\mathcal{G}_a^n$ étant également cohérent, il suffit de montrer que

$$\gamma_a^n : \Gamma_g(B'' ; \mathcal{G}_a^n) \to \Gamma_g(B'' ; \mathcal{R}^q \pi \mathcal{F}_a^n)$$

est injectif.

Or, toujours en vertu de l'hypothèse de récurrence sur m,

$$\Gamma_g(B'' ; \mathcal{R}^q \pi \mathcal{F}_a^n) = H_g^q(X'' ; \mathcal{F}_a^n) \quad .$$

Soit $u \in \Gamma_g(B'' ; \mathcal{G}_a^n) = \Gamma_g(B' ; \mathcal{G}_a^n)$ tel que $\gamma_a^n(u) = 0$ dans $H_g^q(X' ; \mathcal{F}_a^n)$. Comme B' est un espace de Stein, la section u peut se relever en $v \in \Gamma_g(B' ; \mathcal{G})$, et $\gamma(v) \in H_g^q(X' ; \mathcal{F})$ a une image nulle dans $H_g^q(X' ; \mathcal{F}_a^n)$ et la suite exacte

$$H_g^q(X' ; \mathcal{F}) \xrightarrow{(h-a)^n} H_g^q(X' ; \mathcal{F}) \to H_g^q(X' ; \mathcal{F}_a^n)$$

montre que $v = (h-a)^n w$ pour un certain $w \in H_g^q(X' ; \mathcal{F})$.

D'après le théorème 1 bis, la restriction de w à X'' est de la forme $\gamma(w')$, $w' \in \Gamma_g(B'' , \mathcal{G})$. Maintenant $v|B''$ et $(h-a)^n w'$ sont deux sections de $\mathcal{G}$ sur B'' qui ont même image $(h-a)^n \gamma(v)$ dans $H_g^q(X'' ; \mathcal{F})$ n donc aussi dans $(\mathcal{R}^q \pi \mathcal{F})_{y_0} = \mathcal{G}_{y_0}$. Comme B'' est un voisinage priviligié de y_0 pour les relations entre les sections de $\mathcal{S}$, ceci entraîne $v|B'' = (h-a)^n w'$, donc $v|B''$ a une image nulle dans $\Gamma_g(B'' ; {}^n_a)$, d'où $u = 0$, ce qui démontre le lemme 3.

DÉMONSTRATION du théorème 3. - Soient $y \in B''$ et $u \in \mathcal{S}_y$. Si $\gamma(u) \in (\mathcal{R}^q \pi \mathcal{T})_y$ est nul, son image dans $(\mathcal{R}^q \pi \mathcal{T}^n_{h(y)})$ est nulle pour tout n, et ceci entraîne d'après le lemme 2 que u a une image nulle dans $(\mathcal{S}^n_{h(y)})_y$ pour tout n. On en déduit que u est nul, car $\mathcal{S}$ est cohérent (théorème d'Artin-Krull). Ceci achève la démonstration du théorème 3 et du théorème fondamental.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Idéaux de fonctions analytiques de n-variables complexes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 61, 1944, p. 149-197.

[2] CARTAN (Henri). - Un théorème de finitude, Séminaire Cartan, t. 6, 1953/54, n° 17.

[3] GRAUERT (Hans). - Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexen Strukturen. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 5).

[2e rédaction : Juillet 1961]